МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2007

УДК 532.546

© 2007 г. Н. М. ДМИТРИЕВ, В. М. МАКСИМОВ

МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрена математическая модель теории фильтрации в анизотропных трещиновато-пористых средах. Приведено новое построение функции перетоков, которая задается зависящей от направления приложенного воздействия, т.е. от разности градиентов давлений в блоках и трещинах. Подобное задание функции перетоков позволяет учесть анизотропию фильтрационных свойств не только в законе Дарси, но и в уравнениях неразрывности, и делает закон массообмена более физически обоснованным. Для выписанной математической модели проанализированы варианты обобщения на случай анизотропии произвольного вида моделей Баренблатта–Желтова–Кочиной и Уоррена–Рута.

Ключевые слова: анизотропия, среда с двойной пористостью, функция перетока, трещиновато-пористые среды.

Большое число крупных месторождений, открытых в России и других регионах мира, приурочены к карбонатным коллекторам, которые отличаются трещиновато-пористым строением. Трещиновато-пористая среда представляет собой совокупность пористых блоков, которые отделены между собой трещинами. Флюид насыщает и пористые блоки, и трещины. При этом линейные размеры раскрытости трещин значительно превосходят характерные размеры диаметров пор, так что проницаемость трещин значительно больше, чем проницаемость пористых блоков. Объем пустотного пространства, приходящегося на трещины, значительно меньше объема, представленного порами. Поэтому коэффициент пористости трещин m_1 (отношение объема, занятого трещинами, к общему объему породы) существенно меньше коэффициента пористости блоков m_2. Таким образом, основные фильтрационные потоки идут по трещинам, а основные "запасы" флюида находятся в пористых блоках. Эти особенности строения пустотного пространства трещиновато-пористых сред, отражены в соответствующих моделях теории фильтрации [1–3], которые часто называют средами с двойной пористостью. К недостаткам этих моделей, получивших широкую известность, можно отнести следующие: в конкретных задачах обычно предполагается, что система трещин описывается как изотропная среда, хотя хорошо известно, что трещиноватые коллекторы обладают значительной анизотропией [3], движение в блоках матрицы породы, как правило, отсутствует, движущей силой перетока флюида из блоков в трещины является разность давлений.

1. Модель фильтрации с двойной пористостью. Для описания фильтрационных течений в трещиновато-пористых средах были предложены модели [1, 2], в которых трещины и пористые блоки наделяются своими фильтрационно-емкостными свойствами и, следовательно, имеют различные характеристики фильтрационных потоков. Математическая модель, получившая название модели фильтрации с двойной пористостью, задается системой уравнений вида

$$
\begin{gathered}
w_i^\alpha = -\frac{k_{ij}^\alpha}{\mu}\nabla_j p_\alpha \\
\frac{\partial m_\alpha \rho}{\partial t} + \nabla_j \rho w_j^\alpha = q_\alpha \\
q_\alpha = q_\alpha(p_\alpha, \rho, \mu, \chi_j), \quad \rho = \rho(p_\alpha), \quad m_\alpha = m(p_\alpha), \quad \alpha = 1, 2
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

где w_i^α – компоненты вектора скорости фильтрации, k_{ij}^α – компоненты тензора коэффициентов проницаемости, p_α – давление, m_α – пористость, ρ и μ – плотность и вязкость флюида соответственно, q_α – функции задают перетоки из блоков в трещины (источниковый член в уравнениях неразрывности) при этом $q_1 = -q_2 = q$, χ_j – другие возможные параметры, от которых зависит функция перетоков.

Первые уравнения задают закон Дарси и уравнения неразрывности для трещин и блоков соответственно, т.е. индекс $\alpha = 1$ присваивается трещинам, $\alpha = 2$ – блокам. Последние два уравнения задают функцию перетоков и уравнение состояния.

В работах [1, 2] рассмотрен случай изотропных трещин и блоков. В то же время из практики разработки месторождений углеводородного сырья известно, что трещиновато-пористые среды обладают значительной анизотропией [3, 4]. Анизотропия фильтрационных свойств трещин и пористых блоков может быть учтена заданием анизотропных тензоров коэффициентов проницаемости k_{ij}^α в законе Дарси. Однако переток из пористых блоков в трещины при анизотропных фильтрационных свойствах пористых блоков и/или трещин должен зависеть от направления приложенного воздействия. Если положить, что проницаемость пористых блоков обладает ортотропной симметрией фильтрационных свойств ($k_1^2 \neq k_2^2 \neq k_3^2$), то перетоки должны быть разными вдоль разных направлений пористых блоков. Следовательно, скалярная функция q_α должна быть функцией векторного аргумента, задающего направление приложенного воздействия. Подобная ситуация при описании фильтрационных свойств анизотропных сред встречалась и ранее. Самый простой пример – определение направленной проницаемости в анизотропных средах. Направленная проницаемость, по определению, есть скалярная функция и определяется по формуле $k(n_i) = k_{ij}n_in_j$ [5], т.е. является функцией от векторного аргумента n_i. Определение следует из закона Дарси, умножив который скалярно на орт, задающий направление градиента давления, будем иметь

$$
Q^\alpha = w_i^\alpha n_i^\alpha = -\frac{k_{ij}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha}{\mu}|\nabla_j p_\alpha|
$$

где Q^α – проекция вектора скорости на направление приложения градиента давления, $|\nabla^j p^\alpha|$ – модуль градиента давления и $\nabla^j p_\alpha = |\nabla_j p_\alpha| n_j$. Тогда величина $k(n_i)$, определяемая равенством

$$
k(n_i) = k_{ij}^\alpha n_i^\alpha n_j^\alpha = -\frac{\mu w_i^\alpha n_i^\alpha}{|\nabla_j p_\alpha|}
$$

и задает направленную проницаемость.

2. Функция перетока в анизотропных средах с двойной пористостью. В случае определения функции перетока можно использовать аналогичные рассуждения. Предположив структуру равенства, определяющего функцию перетока аналогичной закону Дарси, умножим последний скалярно на $\rho S n_i$, где S – площадь поверхности, через которую происходит переток из пористого блока в трещину, ρ и n_i – плотность флюида и орт, задающий направление вектора градиента давления, и получим

$$q^* = \rho S n_i w_i^\alpha = -\rho S n_i \frac{k_{ij}^\alpha}{\mu} \nabla_j p_\alpha \tag{2.1}$$

Так как в качестве движущей силы, обуславливающей переток, в [1.2] выступает разность давлений в пористых блоках и трещинах, то при построении функции перетока в анизотропных пористых блоках необходимо рассмотреть градиент разности давлений. Поэтому равенство (2.1) для функции перетока, приходящегося на единицу площади q, перепишем в виде

$$q = \frac{\rho}{\mu} n_i q_{ij} \nabla_j (p_2 - p_1) = \frac{\rho}{\mu} q_{ij} n_i n_j |\nabla_j (p_2 - p_1)| \tag{2.2}$$

где q_{ij} – тензор коэффициентов, определяющий и задающий функцию перетока $q = q^*/S$.

Если $|\nabla_j (p_2 - p_1)|$ линейная функция, то формула для перетока (2.2) принимает вид

$$q = \alpha \frac{\rho}{\mu} n_i q_{ij} n_j \frac{(p_2 - p_1)}{l} \tag{2.3}$$

где α – безразмерный коэффициент пропорциональности, l – характерный линейный размер пористых блоков.

Представление (2.3) имеет наиболее простой вид при изотропных фильтрационных свойствах пористых блоков. В этом случае имеем $q_{ij} = k^* \delta_{ij}$ и $q_{ij} n_i n_j = k^*$, где k^* – коэффициент перетока, который определяется геометрией пустотного пространства трещиновато-пористой среды.

Формула для функции перетока в [1, 2] задается в виде

$$q = \alpha \frac{\rho}{\mu} k_2 \frac{(p_2 - p_1)}{l^2} \tag{2.4}$$

где α – безразмерный коэффициент, характеризующий геометрию среды, k_2 – проницаемость пористых блоков.

Очевидно, что $(p_2 - p_1)/l$ в (2.3) модуль величины, обуславливающей переток, а величина $(p_2 - p_1)/l^2$ в (2.4) таким образом интерпретироваться не может. Поэтому в [6] величина $1/l^2$ интерпретируется как S – коэффициент трещиноватой породы, обратно пропорциональный удельной поверхности блока, и формула (2.4) представляется в виде

$$q = \left(S \frac{\rho}{\mu} k_2\right)(p_2 - p_1)$$

из которого следует, что переток обуславливается разностью давлений. Последнее обстоятельство представляется не физичным.

После определения вида функции перетока для построения модели теории фильтрации с двойной пористостью (1.1) необходимо задать определяющие уравнения для плотности и пористости. Уравнения состояния $\rho_\alpha = \rho(p_\alpha)$, $m_\alpha = m(p_\alpha)$ примем таким же, как и в [1]

$$\rho_\alpha = \rho_0 [1 + \beta(p_\alpha - p_0)], \quad m_\alpha = m_{\alpha 0}[-\beta_{\alpha 1}(p_1 - p_0) + \beta_{\alpha 2}(p_2 - p_0)] \tag{2.5}$$

где β – коэффициент сжимаемости флюида, $\beta_{\alpha 1}$ и $\beta_{\alpha 2}$ – коэффициенты сжимаемости блоков и трещин.

Таким образом, математическая модель фильтрации с двойной пористостью в анизотропных средах (1.1) после определения функции перетока (2.2) и уравнений состояния (2.5) становится замкнутой.

3. Варианты моделей теории фильтрации с двойной пористостью в анизотропных средах. Система уравнений, определяющая математическую модель фильтрации с двойной пористостью в анизотропных средах, может быть преобразована к уравнениям относительно p_1 и p_2 с помощью дополнительных предположений, упрощающих систему, и стандартных преобразований [1, 2].

Рассмотрим модель Баренблатта–Желтова–Кочиной [1]. При выводе уравнений для давления в модели (1.1) полагается, что изменение плотности флюида и пористость в трещинах пренебрежимо малы, т.е. $\rho_1 \approx \rho_0$ и $m_1 \approx 0$, а также пренебрежимо мала проницаемость блоков – $k_{ij}^2 \approx 0$, из чего следует, что $\mathbf{w}^2 \approx 0$. Учитывая сделанные допущения, верхние индексы у тензора коэффициентов проницаемости и скорости фильтрации можно опустить, т.е. $k_{ij}^1 = k_{ij}$ и $\mathbf{w}^1 = \mathbf{w}$ и положить $m_{20} = m_0$. В результате математическая модель (1.1) принимает вид

$$
\begin{aligned}
& w_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}\nabla_j p_1 \\
& \rho_0 \nabla_j w_j - q = 0, \quad \frac{\partial m_2 \rho_2}{\partial t} + q = 0 \\
& q = \frac{\rho}{\mu} n_i q_{ij} \nabla_j (p_2 - p_1), \quad \rho_2 = \rho_0[1 + \beta(p_2 - p_0)] \\
& m_2 = m_0[-\beta_{21}(p_1 - p_0) + \beta_{22}(p_2 - p_0)]
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

Далее примем

$$
q = \frac{\rho_0}{\mu} n_i q_{ij} n_j \frac{(p_2 - p_1)}{l}, \quad \frac{\partial m_2 \rho_2}{\partial t} \approx m_0 \rho_0 \left(\beta_{22} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) \qquad (3.2)
$$

Тогда в результате преобразований систему можно привести к двум уравнениям относительно давлений, которые будут иметь вид

$$
\nabla_i (k_{ij} \nabla_j p_1) + q_{ij} n_i n_j \frac{p_2 - p_1}{l} = 0
$$

$$
m_0 \mu \left(\beta_{22} \frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) + q_{ij} n_i n_j \frac{p_2 - p_1}{l} = 0
$$

Выразив из первого уравнения значение p_2 и подставив полученное выражение во второе равенство, получим

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \nabla_i (k_{ij} \nabla_j p_1) = \lambda \nabla_i k_{ij} \nabla_j p_1 \\
& \eta = \frac{l \beta_{22}}{q_{ij} n_i n_j (\beta_{22} - \beta_{21})}, \quad \lambda = \frac{1}{m_0 \mu (\beta_{22} - \beta_{21})}
\end{aligned}
\qquad (3.3)
$$

Формально уравнение (3.3) для давления p_1 имеет тот же вид, что и в [1], но с заменой k^1 на k_{ij} и с другим представлением коэффициентов η и λ, при этом значение коэффициента η зависит от направления приложения градиента разности давлений в блоках и трещинах.

Если положить, что функция перетока представляется в виде (2.2), то модель (3.1) приводится к виду

$$\nabla_i(k_{ij}\nabla_j p_1) + q_{ij}n_i\nabla_j(p_2 - p_1) = 0$$

$$m_0\mu\left(\beta_{22}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{21}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) + q_{ij}n_i\nabla_j(p_2 - p_1) = 0$$

В модели Уоррена–Рута [8] по сравнению с [1] предполагается, что $m_1 \neq 0$, все остальные допущения остаются прежними. Поэтому принимая, что выполняются равенства (3.2) и (3.3), а также соотношение

$$\frac{\partial m_1\rho_1}{\partial t} \approx m_{10}\rho_0\left(-\beta_{11}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{21}\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)$$

для модели [7], обобщенной на случай анизотропных сред с функцией перетока в виде (2.3), получим следующую систему уравнений

$$m_{10}\mu\left(-\beta_{11}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{12}\frac{\partial p_2}{\partial t}\right) - \nabla_i(k_{ij}\nabla_j p_1) - q_{ij}n_in_j\frac{p_2 - p_1}{l} = 0$$

$$m_{20}\mu\left(\beta_{22}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_{21}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) + q_{ij}n_in_j\frac{p_2 - p_1}{l} = 0$$

В общем случае математическая модель фильтрации с двойной пористостью в анизотропных средах после подстановки в уравнения неразрывности законов фильтрации преобразуется в уравнения

$$\frac{\partial m_\alpha\rho_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\nabla_i(\rho_\alpha k_{ij}^\alpha\nabla_j p_\alpha) - q_\alpha = 0$$

Далее, полагая что

$$\frac{\partial m_\alpha\rho_\alpha}{\partial t} \approx m_{\alpha0}\rho_{\alpha0}\left(-\beta_{\alpha1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{\alpha2}\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)$$

будем иметь

$$m_{\alpha0}\rho_{\alpha0}\left(-\beta_{\alpha1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{\alpha2}\frac{\partial p_2}{\partial t}\right) - \frac{1}{\mu}\nabla_i(\rho_\alpha k_{ij}^\alpha\nabla_j p_\alpha) - q_\alpha = 0$$

Для упрощения уравнений полагают $\rho_\alpha = \rho_{\alpha0} \approx \rho_0$. Тогда уравнения для p_1 и p_2 принимают вид

$$m_{\alpha0}\mu\left(-\beta_{\alpha1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{\alpha2}\frac{\partial p_2}{\partial t}\right) - \nabla_i(k_{ij}^\alpha\nabla_j p_\alpha) + (-1)^\alpha n_iq_{ij}\nabla_i(p_2 - p_1) = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

4. Представление тензоров проницаемости и функции перетока. Представление тензоров коэффициентов проницаемости k_{ij}^α и тензора коэффициентов в функции перетока q_{ij} зависит от типа анизотропии (группы симметрии фильтрационных свойств) и для всех групп симметрии в самом общем виде выписано в [8]. Заметим, что в общем случае симметрия тензоров k_{ij}^1 и k_{ij}^2 может не совпадать. Например, тензор для трещин может быть анизотропным, а для блоков – изотропный, или оба тензора анизотропны, но имеют разный тип анизотропии. В этом случае можно положить, что симметрия тензора q_{ij} совпадает с симметрией тензора k_{ij}^2.

Все четыре возможных типа симметричных материальных тензоров, задающих анизотропные физические свойства тензорам второго ранга, представляются в виде [4]

$$k_{ij}^{\delta} = k_1^{\alpha}\delta_{ij} + k_2^{\alpha}B_{ij}^{\alpha}, \quad k_{ij}^{\alpha} = k_1^{\alpha}\delta_{ij} + k_2^{\alpha}B_{ij}^{\alpha} + k_3^{\alpha}D_{ij}^{\alpha}$$

$$k_{ij}^{\alpha} = k_1^{\alpha}\delta_{ij} + k_2^{\alpha}a_i^{\alpha}a_j^{\alpha} + k_3^{\alpha}c_i^{\alpha}a_j^{\alpha} + k_4^{\alpha}(a_i^{\alpha}c_j^{\alpha} + c_i^{\alpha}a_j^{\alpha})$$

$$k_{ij}^{\alpha} = k_1^{\alpha}a_i^{\alpha}a_j^{\alpha} + k_2^{\alpha}c_i^{\alpha}c_j^{\alpha} + k_3^{\alpha}b_i^{\alpha}b_j^{\alpha} + k_4^{\alpha}(a_i^{\alpha}c_j^{\alpha} + c_i^{\alpha}a_j^{\alpha}) +$$
$$+ k_5^{\alpha}(a_i^{\alpha}b_j^{\alpha} + b_i^{\alpha}c_j^{\alpha}) + k_6^{\alpha}(c_i^{\alpha}b_j^{\alpha} + b_i^{\alpha}c_j^{\alpha})$$

где k_i^{α} – инвариантные коэффициенты тензоров проницаемости блоков и трещин, B_{ij}^{α}, D_{ij}^{α}, $a_i^{\alpha}a_j^{\alpha}$, $b_i^{\alpha}b_j^{\alpha}$, $c_i^{\alpha}c_j^{\alpha}$ – базисные тензоры, определяющие и задающие физические свойства анизотропных сред, при этом три последних тензора представляются диадами, образованными ортами кристаллофизической системы координат [8]. Аналогичными формулами задаются и тензоры, определяющие функцию перетоков в представлениях (2.2) и (2.3).

Первые два тензора описывают среды, в которых направления всех трех главных осей могут быть определены с помощью прямых или косвенных измерений (например, упругих свойств керна) и соответствуют трансверсально-изотропным и ортотропным фильтрационным свойствам. В двух последних случаях направления главных осей неизвестно. В третьем случае (моноклинной симметрии фильтрационных свойств) известно положение только одной главной оси (обычно перпендикулярно к плоскости напластования), в последнем случае (триклинной симметрии фильтрационных свойств) неизвестно положение всех главных осей. Ситуация с неизвестным направлением двух или трех главных осей характерна для трещиноватых пластов. Поэтому можно ожидать, что симметрия тензоров коэффициентов проницаемости для блоков и трещин, как правило, различна.

Заключение. Дано новое представление функции перетоков флюида между блоками матрицы и трещинами в анизотропных трещиновато-пористых средах. Предлагаемое задание функции перетоков позволяет учесть анизотропию фильтрационных свойств не только в законе Дарси, но и в уравнениях неразрывности, и делает закон массообмена более физически обоснованным. Для выписанной математической модели проанализированы варианты обобщения на случай анизотропии произвольного вида моделей Баренблатта–Желтова–Кочиной и Уоррена–Рута. Данные обобщения моделей сред с двойной пористостью имеют важное прикладное значение, так как реальные трещиновато-пористые коллекторы углеводородного сырья обладают анизотропией фильтрационных свойств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 05-08-33699).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.

2. *Баренблатт Г.И, Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
3. *Голф-Рахт Т.Д.* Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М.: Недра, 1986. 608 с.
4. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. 496 с.
5. *Шувалов Л.А.* Основы тензорного и симметрийного описания физических свойств кристаллов // Современная кристаллография. Т. 4. М.: Наука, 1981. 496 с.
6. *Kazemi H., Seth M.S., Thomas Q.W.* The interpretations of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fractured distribution. SPEJ, December, 1969. P. 463–472.
7. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // Soc. Petrol. Eng. 1963. P. 60–66.
8. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.

Москва
E-mail: dmitriev.msc@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
10.I.2007