

УДК 532.592:532.516

© 2007 г. А. Г. ПЕТРОВ

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ И СТРУЯХ

Рассмотрены уравнения длинных нелинейных волн в струях кругового сечения и каналах произвольного поперечного сечения с учетом поперечного ускорения частиц жидкости (приближение Буссинеска). Уравнения в виде уравнений мелкой воды, в которых давление выражено через вариационную производную от кинетической энергии поперечного тонкого слоя жидкости, в общем случае стационарных движений имеют три первых интеграла с тремя произвольными постоянными. Приведены примеры решений уравнений для уединенных капиллярно-гравитационных волн в прямоугольном и треугольном каналах и их сравнение с другими более высокими приближениями. Найдена форма свободной границы струи кругового сечения. Для истечения жидкости из конического сопла получена аналитическая зависимость коэффициента сжатия струи от угла раствора конуса. Зависимость находится в согласии с опытными данными для углов менее  $45^\circ$ .

*Ключевые слова:* приближение Буссинеска, каналы, струи, уединенные волны.

**1. Уравнения длинноволнового приближения.** Асимптотическое приближение Буссинеска обычно предполагает наличие двух малых параметров: отношения глубины к длине волны и амплитуды к глубине. Такие, ставшие уже традиционными, подходы излагаются, например, в [1]. Для каналов уравнения Буссинеска получены в [2]. Совершенно иной подход к выводу уравнений Буссинеска для течения жидкости в каналах дан в [3]. Подход [3] не предполагает малость второго параметра и существенно проще, чем в [2], а иная достаточно простая форма полученных уравнений позволяет построить новые общие решения. Их можно использовать не только для описания волновых движений жидкости в каналах, но и учитывать на поверхности капиллярные эффекты, упругую пленку, моделирующую лед, а также применять их для расчета формы свободной поверхности истекающих струй.

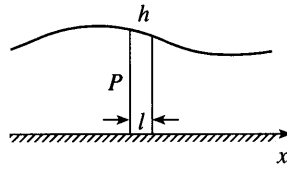
В [3] записываются законы сохранения массы и количества движения для потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости в горизонтальном канале произвольного сечения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S u}{\partial x} = 0, \quad S \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.1)$$

где  $t$  – время;  $x$  – координата вдоль оси русла;  $u$  – средняя по сечению скорость вдоль оси русла;  $P$  – деленная на плотность сумма сил давления в поперечном сечении;  $S$  – площадь поперечного сечения потока.

Поясним метод на примере волн, распространяющихся в прямоугольном канале единичной ширины. Запишем уравнение волнового движения волны в виде (1.1), а вклад, который дает ускорение жидкости по вертикали, попытаемся учесть в функции  $P$ . Способ определения функции  $P$  в [3] основан на применении к жидкому объему  $x_0 - l/2 \leq x \leq x_0 + l/2$  малой ширины  $l$  и площадью сечения  $S = h$  (фиг. 1) метода обобщенных координат Лагранжа.

Этот элемент жидкости движется в потоке, деформируясь. Деформацией боковых стенок элемента пренебрегается, так что они остаются параллельными плоскостями. В



Фиг. 1. Жидкий элемент

качестве обобщенных координат элемента принимаем  $h$  и координату центра масс элемента  $x_0$ . Записываем уравнение Лагранжа для координаты  $h$

$$\frac{\delta L}{\delta h} = -Q_h, \quad \frac{\delta L}{\delta h} = \frac{\partial L}{\partial h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}}$$

Здесь и далее точкой обозначается полная производная по времени, а символом  $\delta L/\delta h$  – вариационная производная функции Лагранжа  $L = T - U$ , равная разности кинетической и потенциальной энергий элемента жидкости. Потенциальная энергия слоя равна

$$U = \rho g l h^2 / 2$$

Вычисляем кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} \rho l h \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} \rho l \int_0^h v^2 dz$$

Скорость в поперечном направлении  $v = v_z$  находится с помощью уравнения неразрывности. Пользуясь принятым приближением, в котором скорость в направлении оси  $x$  не зависит от  $z$ :  $v_x = u(x)$ , получим

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dot{h}}{h}$$

Отсюда находим

$$v = \frac{\dot{h}}{h} z, \quad T = \rho l h \left( \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + \frac{1}{6} \dot{h}^2 \right)$$

Функция  $L$  зависит также от толщины слоя  $l$ , которая выражается через  $h$  из уравнения сохранения массы  $hl = \text{const}$ . Обобщенная внешняя сила, соответствующая обобщенной координате  $h$ , вводится с помощью работы, совершаемой силами давления на поперечных площадках жидкого слоя  $\rho P \delta l = -Q_h \delta h$ . Отсюда, принимая во внимание уравнение сохранения массы, можно вычислить суммарное давление  $\rho P$ , действующее на поперечную площадку

$$P = \frac{h Q_h}{\rho l} = -\frac{h}{\rho l} \frac{\delta L}{\delta h} \quad (1.2)$$

Подставляя в  $L = T - U$  найденные выражения  $T$  и  $U$ , получим

$$P = -\frac{h}{\rho l} \frac{\delta}{\delta h} \left[ \rho l h \left( \frac{\dot{h}^2}{6} - \frac{g h}{2} \right) \right] = -h^2 \frac{\delta}{\delta h} \left( \frac{\dot{h}^2}{6} - \frac{g h}{2} \right) = -\frac{1}{2} g h^2 + \frac{1}{3} \dot{h} h^2$$

После подстановки полученного выражения для  $P$  в уравнения (1.1) получим известное приближение Грина-Нагди [4].

Этот подход в [3] применен для каналов, форма сечения которых не зависит от  $x$ . Вместо  $h$  за обобщенную координату принята площадь  $S$  поперечного сечения жидкости в канале. Функция  $L(S, S, l)$  содержит параметр  $l$ , для которого используется дополнительное условие  $Sl = V = \text{const}$ . В [3] дается метод вычисления и приведены аналитические выражения функции Лагранжа  $L$  для каналов различных поперечных сечений. Подстановка этих зависимостей в систему уравнений приведет к замкнутой системе уравнений для  $S, u$  и  $l$ .

Если отнести функцию Лагранжа слоя жидкости бесконечно малой толщины  $l$  к массе этого слоя  $\rho V$ , то получим плотность  $L/(\rho V)$  функции Лагранжа. С помощью нее можно исключить переменную  $l$  в выражении для функции  $P$  (1.2) следующим образом. Постоянную массу  $\rho V$  можно вносить и выносить за знак вариационной производной. Тогда суммарное давление  $P$  можно выразить через плотность  $L/(\rho V)$ , в которую ширина слоя  $l$  не входит. В результате получим систему двух уравнений [5]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} = 0, \quad S \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -P = \left[ S^2 \frac{\delta}{\delta S} \left( \frac{L}{\rho V} \right) \right] \quad (1.3)$$

Систему уравнений (1.3) можно применять для расчета волновых движений не только в каналах, но и струях. Форма поверхности волны в канале получается в виде зависимости  $h(t, x)$ , где  $h$  – средняя по поперечному слою аппликата волны. Форма поверхности струи находится в виде зависимости  $R(t, x)$ , где  $R$  – радиус струи.

**2. Интеграл стационарного движения.** В [5] найдены три интеграла системы (1.3), если движение жидкости установившееся и функция  $L/(\rho V)$  явно не зависит от времени  $t$ . Два интеграла – это постоянство расхода и интеграл Бернулли

$$Su = Q, \quad -\frac{Q^2}{S} + S^2 \frac{\delta}{\delta S} \left( \frac{L}{\rho V} \right) = A_1$$

Интеграл Бернулли можно записать в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{\delta F(\dot{S}, S)}{\delta \dot{S}} = 0, \quad F = \frac{L}{\rho V} + \frac{Q^2}{2S^2} + \frac{A_1}{S} + A_2 \quad (2.1)$$

Поскольку функция Лагранжа  $F(\dot{S}, S)$  от времени явно не зависит, то полученные уравнения Лагранжа имеют третий интеграл энергии

$$\dot{S} \frac{\partial F}{\partial \dot{S}} - F = 0 \quad (2.2)$$

Удобнее выразить этот интеграл через функции координаты  $x$ . Для этого перейдем от переменных  $t, S, \dot{S} = dS/dt$  к  $x, S, S' = dS/dx$  с помощью замен

$$dt = \frac{S}{Q} dx, \quad \dot{S} = Q \frac{S'}{S}, \quad F(\dot{S}, S) = \frac{\Lambda(S', S)}{S} \quad (2.3)$$

Через новые переменные интеграл энергии (2.2) преобразуется так

$$Q \frac{S'}{S} \frac{\partial \Lambda}{\partial S'} - \frac{\Lambda(S', S)}{S} = 0$$

В итоге интеграл энергии приведет к виду

$$S' \frac{\partial}{\partial S'} \frac{L}{\rho l} - \frac{L}{\rho l} = \frac{Q^2}{2S} + A_1 + A_2 S \quad (2.4)$$

в котором все три произвольные постоянные  $Q, A_1, A_2$  отнесены в правую часть. Для периодических волн три постоянные выражаются через параметры волны: амплитуду  $a$ ,

длину  $\lambda$  и среднюю глубину  $H$ . Кроме того, из связи между расходом  $Q$  и  $a, \lambda, H$  находится зависимость скорости распространения волны от параметров волны. В пределе, когда период волны равен бесконечности, получается уединенная волна. Ниже представлены примеры точных решений уравнений в виде уединенных волн, полученные с помощью общего интеграла (2.4). Такие решения имеют наиболее простой вид.

**3. Вариационная формулировка для стационарных волн.** Уравнения Эйлера – Лагранжа (2.1) для периодической волны можно получить также из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(\dot{S}, S) dt = 0, \quad \delta S(t_1) = \delta S(t_2) = 0 \quad (3.1)$$

где интеграл берется по периоду волны.

При переходе к переменной  $x$  с помощью (2.3) принцип Гамильтона преобразуется к виду

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \Lambda(S', S) dx = 0, \quad \Lambda = \frac{L}{\rho l} + \frac{Q^2}{2S} + A_1 + A_2 S \quad (3.2)$$

где отрезок интегрирования – период волны.

Уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие принципу (3.2), имеют интеграл энергии (2.4). Вариационные принципы (3.1) и (3.2) можно распространить и на уединенные волны, в пределе, когда период волны стремится к бесконечности.

**4. Плотность кинетической энергии.** В [3] представлены методы вычисления плотности кинетической энергии жидкости в поперечном сечении канала произвольной формы

$$\frac{T}{\rho l} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (v_y^2 + v_z^2) dydz \quad (4.1)$$

где  $y, z$  – декартовы координаты в поперечном сечении канала, координата  $z$  направлена вертикально вверх,  $v_y, v_z$  – соответствующие компоненты скорости частиц жидкости. Интеграл берется по смоченной площади поперечного сечения  $\Sigma$ .

Поле скорости имеет потенциал  $\phi$ , который определяется из решения краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Из уравнения сохранения расхода  $uS = Q$  находим правую часть  $-\partial u/\partial x = uS'(x)/S(x) = QS'(x)/S^2(x)$  и, подставляя ее, получим уравнение для потенциала скорости в поперечном сечении

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{QS'(x)}{S^2} \quad (4.2)$$

Обозначим через  $\Sigma$  область смоченной части плоскости сечения канала или струи через  $\partial\Sigma$  – границу этой области. Граница  $\partial S$  состоит из двух частей:  $\partial\Sigma_1$  – твердые стенки канала и  $\partial\Sigma_2$ :  $z = h(x, y)$  – свободная граница. На твердой стенке нормальная скорость жидкости равна нулю, а на свободной границе равна нормальной скорости изменения границы  $\partial\Sigma_2$

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\partial\Sigma_1} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\partial\Sigma_2} = u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad u = \frac{Q}{S} \quad (4.3)$$

Для каналов прямоугольного и треугольного сечений в [3] кинетическая энергия вычисляется точно. Также точно вычисляется кинетическая энергия в струе круглого сечения переменного радиуса  $r$ .

Приведем решение краевой задачи (4.2), (4.3) и вывод выражений кинетической энергии для этих случаев.

1. *Прямоугольный канал.* Область сечения, занятого жидкостью:  $0 \leq z \leq h$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , имеет площадь  $S = h$ . Решение краевой задачи (4.2), (4.3) и вычисленная по формуле (4.1) кинетическая энергия имеют вид

$$\varphi = \frac{Qh'}{2h^2}z^2, \quad v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{Qh'}{h^2}\right)^2 z^2, \quad \frac{T}{\rho l} = \frac{1}{2} \left(\frac{Qh'}{h^2}\right)^2 \int_0^h z^2 dz = \frac{Q^2(h')^2}{6h}$$

2. *Треугольный канал.* Область сечения, занятого жидкостью  $k|y| \leq z \leq h$ , представляет собой равнобедренный треугольник с основанием  $2h/k$ , высотой  $h$  и площадью  $S = h^2/k$ . Находим решение краевой задачи (4.2), (4.3) и квадрат скорости

$$\varphi = \frac{uh'}{2h}(y^2 + z^2), \quad v_y^2 + v_z^2 = \left(\frac{uh'}{h}\right)^2 (y^2 + z^2), \quad u = \frac{Qk}{h^2}$$

Интегрируя квадрат скорости по области сечения, занятого жидкостью  $k|y| \leq z \leq h$ , получим кинетическую энергию

$$\frac{T}{\rho l} = \left(\frac{uh'}{h}\right)^2 \int_0^h dy \int_{ky}^h (y^2 + z^2) dz = \frac{1 + 3k^2}{12k} Q^2 \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

3. *Струя круглого сечения переменного радиуса  $R(x)$ .* Площадь сечения струи равна  $S = \pi R^2$ . Краевая задача (4.2), (4.3) в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2uR'}{R}, \quad \left[ \frac{d\varphi}{dr} \right]_{r=R} = uR'(x)$$

Находим ее решение и квадрат скорости

$$\varphi = \frac{uR'}{2R} r^2, \quad v^2 = \left(\frac{uR'}{R}\right)^2 r^2, \quad u = \frac{Q}{\pi R^2}$$

и вычисляем кинетическую энергию

$$\frac{T}{\rho l} = \frac{1}{2} \left(\frac{uR'}{R}\right)^2 \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{Q^2}{4\pi R^2} (R')^2$$

5. **Плотность потенциальной энергии.** Потенциальная энергия  $U$  включает энергию силы тяжести  $U_g$  и может дополнительно включать энергии поверхностного натяжения  $U_\sigma$  или энергию упругой пленки на поверхности жидкости

$$U = U_g + U_\sigma + U_E, \quad \frac{U_g}{\rho l} = Sgz_c$$

$$\frac{U_\sigma}{\rho l} = \frac{b\sigma(\sqrt{1+h'^2}-1)}{\rho} \approx \frac{b\sigma}{2\rho}(h')^2, \quad \frac{U_E}{\rho l} = \frac{bEI}{2\rho}(h'')^2$$

Здесь  $z_c$  – вертикальная координата геометрического центра смоченного сечения,  $S$  – площадь сечения (функция глубины  $S(h)$ ),  $b = dS/dh$  – ширина свободной поверхности,

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $E$  и  $I$  – модуль Юнга и момент инерции упругой пленки.

Выпишем рассчитанные по приведенным формулам выражения потенциальных энергий.

1. Прямоугольный канал:  $0 \leq z \leq h, 0 \leq y \leq 1$

$$\frac{U_g}{\rho l} = hg \frac{h}{2} = \frac{1}{2} h^2 g, \quad \frac{U_\sigma}{\rho l} \approx \frac{\sigma}{2\rho} (h')^2$$

2. Треугольный канал:  $k|y| \leq z \leq h$

$$\frac{U_g}{\rho l} = \frac{2h^3}{3k} g$$

3. Струя круглого сечения переменного радиуса  $R(x)$

$$\frac{U_\sigma}{\rho l} = 2\pi R \frac{\sigma}{\rho} \sqrt{1 + (R')^2} \approx 2\pi R \frac{\sigma}{\rho} \left(1 + \frac{(R')^2}{2}\right)$$

**6. Функция Лагранжа и интегралы.** Приведем выражения для функции Лагранжа  $\Lambda_0 = (T - U)/(\rho l)$  и интеграла (2.4) для рассмотренных выше случаев

1. Прямоугольный канал:  $0 \leq z \leq h, 0 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{L}{\rho l} &= \left[ \frac{Q^2}{6h} - \frac{\sigma}{2\rho} \right] (h')^2 - \frac{1}{2} g h^2, \quad S = h \\ \left[ \frac{Q^2}{6} - \frac{\sigma}{2\rho} h \right] (h')^2 &= \frac{Q^2}{2} + A_1 h + A_2 h^2 - \frac{1}{2} g h^3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

2. Треугольный канал:  $k|y| \leq z \leq h$

$$\begin{aligned} \frac{L}{\rho l} &= \frac{1 + 3k^2}{12k} Q^2 \left(\frac{h'}{h}\right)^2 - \frac{2g}{3k} h^3, \quad S = \frac{h^2}{k} \\ \frac{1 + 3k^2}{12k} Q^2 (h')^2 &= \frac{Q^2 k}{2} + A_1 h^2 + A_2 \frac{h^4}{k} - \frac{2g}{3k} h^5 \end{aligned} \quad (6.2)$$

3. Струя круглого сечения переменного радиуса  $R(x)$

$$\begin{aligned} \frac{L}{\rho l} &= \left[ \frac{Q^2}{4\pi R^2} - \frac{\sigma \pi R}{\rho} \right] (R')^2 - \frac{\sigma 2\pi}{\rho} R, \quad S = \pi R^2 \\ \left[ \frac{Q^2}{4\pi} - \frac{\sigma \pi R^3}{\rho} \right] (R')^2 &= \frac{Q^2}{2\pi} + A_1 R^2 - \frac{\sigma 2\pi}{\rho} R^3 + A_2 \pi R^4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Решения уравнений (6.1)–(6.3) выражаются через эллиптические интегралы, а решения в виде уединенных волн – через элементарные функции. Ниже некоторые из этих решений выписываются в явном виде. Они применяются для анализа гравитационных волн в каналах различной формы с учетом поверхностного натяжения, а также для течения струй с поверхностным натяжением.

**7. Волны в прямоугольном канале.** Решение, вытекающее из интеграла (6.1), при  $\sigma = 0$  описывает гравитационные волны. Следуя [6], введем скорость волны  $c$  как отношение длины волны  $\lambda$  к времени  $t$ , за которое частица жидкости, двигаясь со скоростью

$u = Q/S$ , пройдет расстояние, равное длине волны  $\lambda$ . Тогда с помощью очевидных равенств

$$t = \int_0^{\lambda} \frac{S}{Q} dx, \quad \int_0^{\lambda} S dx = H\lambda, \quad \lambda = ct = \frac{c}{Q} H\lambda$$

получим выражение для скорости волны

$$c = Q/H \quad (7.1)$$

где  $H$  – средняя глубина.

Подставляя  $Q = cH$  в интеграл (6.1), можно привести его к виду

$$(h')^2 = 3 \left( 1 + \frac{2}{c^2 H^2} A_1 h + \frac{2}{c^2 H^2} A_2 h^2 - \frac{1}{c^2 H^2} g h^3 \right)$$

Заметим, что этот же интеграл можно получить из модели Грина-Нагди [4] с помощью уравнений импульса и энергии. Правая часть уравнения – полином третьей степени. Пусть  $h_1 < h_2 < h_3$  – корни полинома, расположенные в порядке возрастания. Тогда интеграл примет вид

$$h' = \pm \sqrt{P(x)}, \quad P(x) = 3(1 - h/h_1)(1 - h/h_2)(1 - h/h_3) \quad (7.2)$$

Корни  $h_3$  и  $h_2$  соответствуют высшей и низшей точкам волны  $h_3 = \max(h)$ ,  $h_2 = \min(h)$ . Через корни  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  можно вычислить среднюю глубину  $H$ , длину волны  $\lambda$  и скорость ее распространения  $c$

$$\lambda = \int_0^{\lambda} dx = 2 \int_{h_2}^{h_3} \frac{dh}{\sqrt{P(x)}}, \quad H\lambda = \int_0^{\lambda} h dx = 2 \int_{h_2}^{h_3} \frac{h dh}{\sqrt{P(x)}}, \quad \frac{c^2}{gH} = \frac{h_1 h_2 h_3}{H^3} \quad (7.3)$$

Полученное семейство решений выражается через эллиптическую функцию и называется кноидальными периодическими волнами. В частном случае, когда первые два корня равны  $h_1 = h_2 = H$ , получаем уединенную волну. Уравнение (7.2) для уединенной волны на участке монотонного возрастания  $h$  примет вид

$$h' = (1 - h/H) \sqrt{3(1 - h/(H+a))}, \quad h_3 = H+a$$

где  $H$  – высота уровня волны в бесконечности,  $a$  – амплитуда волны (возвышение гребня волны над уровнем в бесконечности).

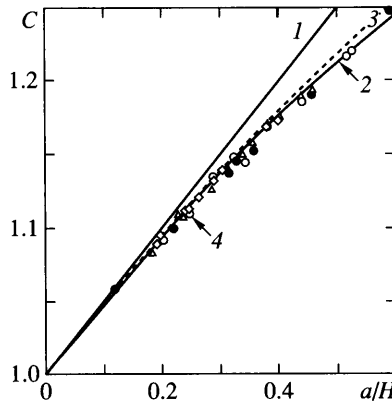
Уравнение имеет точное решение

$$h(x) = H + a(\cos(x/s))^{-2}, \quad s = \frac{2}{3} H \sqrt{3(H/a + 1)}$$

Величина  $s$  характеризует ширину уединенной волны. Для скорости распространения волны из (7.1) получим

$$c/\sqrt{gH} = \sqrt{1 + a/H} = 1 + (1/2)(a/H) - (1/8)(a/H)^2 + \dots \quad (7.4)$$

Трехчленное разложение по уточненной теории Лэтона [7] (см. [6])  $c/\sqrt{gH} = 1 + (1/2)(a/H) - (3/20)(a/H)^2 + \dots$  незначительно отличается от приближения (7.4), что можно видеть из фиг. 2, взятой из [8].



Фиг. 2. Сравнение теоретической скорости распространения волны с экспериментом: 1 – линейная теория, 2 – уточненная теория Лэтона, 3 – формула (7.4), 4 – экспериментальные данные

**8. Волны в треугольном канале.** Задача о волне в треугольном канале с формой сечения  $z = k|y|$  решается аналогично. Ограничимся рассмотрением уединенной волны. Аналогично равенству (7.1) находим для треугольного канала  $Q = cH^2/k$ , где  $H$  – глубина канала,  $c$  – скорость волны. Подставляя это выражение в интеграл энергии (6.2), получим уравнение

$$\frac{1 + 3k^2}{6k^2} (h')^2 = -\frac{4}{3} \frac{g}{c^2 H^4} h^5 + 2 \frac{A_2}{c^2 H^4} h^4 + 2 \frac{A_1}{c^2 H^4} kh^2 + 1$$

Как и в предыдущем случае, решение в виде уединенной волны получим только, если полином в правой части имеет два корня, равных  $h_1 = h_2 = H$ , и корень  $h_3 = H + a$ . Выделяя множители, соответствующие этим корням, полином пятой степени в правой части можно представить в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3} \frac{g}{c^2 H^4} h^5 + 2 \frac{A_2}{c^2 H^4} h^4 + 2 \frac{A_1}{c^2 H^4} kh^2 + 1 = \\ & = \left(1 - \frac{h}{H+a}\right) \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 \left[1 + A \frac{h}{H} + B \left(\frac{h}{H}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $h$ ,  $h^3$  и  $h^5$ , получим три уравнения, из которых найдем коэффициенты  $A$ ,  $B$  и скорость волны  $c$

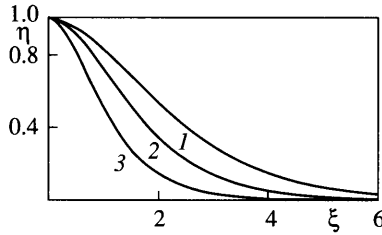
$$h: \frac{A-2}{H} - \frac{1}{H+a} = 0 \Rightarrow \left\{ A = \frac{3H+2a}{H+a} \right\}$$

$$h^3: \frac{2A-B-1}{H^2(H+a)} + \frac{A-2B}{H^3} = 0 \Rightarrow \left\{ B = 2 \frac{(2H+a)^2}{(H+a)(3H+2a)} \right\}$$

$$h^5: B = \frac{4}{3} \frac{g}{c^2} (H+a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{\sqrt{2gH}} = \frac{1+a/H}{1+(1/2)a/H} \sqrt{1 + \frac{2a}{3H}} = 1 + \frac{5}{6} \left(\frac{a}{H}\right) - \frac{5}{36} \left(\frac{a}{H}\right)^2 + O\left(\frac{a}{H}\right)^3$$





Фиг. 3. Профили уединенных волн в треугольном канале: 1 – амплитуда  $a/H = 0.1$ ; 2 – 0.2, 3 – 0.5

Интересно, что при изменении формы треугольного канала (параметра  $k$ ) все волны с одной и той же амплитудой получаются друг из друга растяжением по оси  $x$ . Форма волны определяется уравнением  $h/H = Y(\xi, a/H)$  и зависит от амплитуды и комплекса

$$\xi = \frac{x}{H} \sqrt{\frac{6k^2}{1+3k^2}}$$

На фиг. 3 приведены профили волн при разных амплитудах. По осям абсцисс и ординат отложены величины  $\xi$  и  $\eta = (h-H)/a$ . Этот результат в кратком виде приведен в [5].

**9. Капиллярно-гравитационные уединенные волны.** Рассматриваемую волну в прямоугольном канале можно описать двумя безразмерными числами: скорость волны  $C$  и число Бонда  $\beta$

$$C^2 = \frac{c^2}{gH}, \quad \beta^2 = \frac{3\sigma}{\rho gH^2}$$

В безразмерных переменных  $X, Y$  интеграл энергии (6.1) примет вид

$$(Y)^2 = 3(Y-1)^2 \frac{C^2 - Y}{C^2 - \beta^2 Y}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{h}{H} \quad (9.1)$$

При  $\beta = 0$  из (9.1) вытекает рассмотренное выше уравнение энергии для уединенной волны.

Уравнение (9.1) можно точно проинтегрировать. Запишем его в дифференциальной форме

$$\pm \sqrt{3} dX = \frac{dY}{Y-1} \sqrt{\frac{C^2 - \beta^2 Y}{C^2 - Y}}$$

Сделаем замену переменной

$$\frac{C^2 - \beta^2 Y}{C^2 - Y} = \frac{1}{t^2}$$

Отсюда определим  $Y$

$$Y - 1 = (C^2 - 1) \frac{1 - B^2 t^2}{1 - \beta^2 t^2}, \quad B^2 = \frac{C^2 - \beta^2}{C^2 - 1} > 0$$

логарифмическую производную  $d \ln(Y-1) = dY/(Y-1)$  и получим уравнение для  $X$

$$\pm \sqrt{3} dX = 2 \left( \frac{\beta^2}{1 - \beta^2 t^2} - \frac{B^2}{1 - B^2 t^2} \right) dt$$

Затем находим решение уравнения (9.1), удовлетворяющее условиям  $Y \rightarrow 1$  при  $X \rightarrow \pm\infty$ , в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{3}X &= -\beta \ln \left| \frac{1+\beta t}{1-\beta t} \right| + B \ln \left| \frac{1+Bt}{1-Bt} \right| \\ Y &= C^2 \frac{1-t^2}{1-\beta^2 t^2} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Точке  $X = \infty$  соответствуют значения  $t = 1/\beta$  и  $t = 1/B$ ; точке  $X = 0$  соответствует  $t = 0$  или  $t = \infty$ . Из соотношения  $B^2 - \beta^2 = C^2(1 - \beta^2)/(C^2 - 1)$  следует, что при  $(C^2 - 1)(1 - \beta^2) > 0$  параметр  $t$  изменяется в интервале  $t \in [0, 1/B]$  или  $t \in [1/\beta, \infty)$ .

Ограничимся изучением случая  $t \in [0, 1/B]$ . Скорость волны не зависит от  $\beta$  и равна  $C = \sqrt{1+a}$ . Солитоны симметричны относительно точки  $X = 0$  и имеют гладкий профиль. В окрестности  $|X| \ll 1$  профиль параболический

$$Y = 1 + a - \frac{3a^2 X^2}{4(1 - \beta^2)(1 + a)}$$

При  $\beta < 1$  солитон имеет положительную амплитуду  $a > 0$  (возвышение), при  $\beta > 1$  амплитуда отрицательна  $a < 0$  (обратный солитон). Эффект обращения солитона при превышении числа Вебера некоторого порогового значения был отмечен в численных исследованиях: для уединенных волн в [9], а для периодических – в [10]. В аналитических исследованиях [11] и [12] найдено пороговое значение числа Бонда  $\beta$ , при котором происходит смена знака амплитуды солитона. Аналитическое решение для обратного солитона при большом коэффициенте поверхностного натяжения было получено в [13].

Представленные здесь результаты для капиллярно-гравитационных волн кратко изложены в [5]. В ней также рассмотрен второй случай, который определяет другой тип солитонов с бесконечной производной в вершине или впадине волны.

**10. Истечение струй из конических сопел.** Интеграл (6.3) описывает длинные периодические капиллярно-гравитационные волны струй круглого сечения. При отсутствии поверхностного натяжения получим

$$(1/2)(R')^2 = 1 + A_1 R^2 + A_2 R^4$$

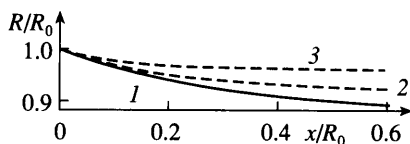
Это уравнение описывает истечение струй из конических сопел, которое трудно поддается теоретическому исследованию. Решение в виде струи, у которой радиус стремится на бесконечности к постоянному значению  $R_\infty$ , получится, если правая часть представляется квадратом полинома второй степени. Отсюда уравнение струи примет вид

$$R'(x) = \sqrt{2}(1 - R^2/R_\infty^2), \quad R(0) = R_0 > R_\infty$$

Из уравнения нетрудно найти зависимость коэффициента сжатия струи  $k = R_\infty/R_0$  от угла раствора конуса  $2\alpha = 2 \arctg(-R'(0))$ .

$$k = [(\operatorname{tg} \alpha)/\sqrt{2} + 1]^{-1/2} \quad (10.1)$$

Эта зависимость с большой точностью подтверждается опытом при  $\alpha < \pi/4$ . В [14] приведены данные экспериментов Вейсбаха и Цейнера для отношения  $k(\alpha)/k(\pi/2)$ . Экспериментальное значение  $k(\pi/2) = 0.632$  соответствует истечению струи из кругового отверстия в плоской стенке. При углах  $\alpha = \pi/8$  и  $\pi/4$  экспериментальные значения таковы:  $k = 0.878$  и  $0.752$ , а рассчитанные по формуле (10.1) –  $0.879$  и  $0.752$ .



Фиг. 4. Формы струй, вытекающих из конического отверстия при  $\alpha = \pi/8$ : 1 – число Вебера  $W = \infty$ ; 2 – 6.8, 3 – 4.4

Решение уравнения для свободной границы имеет вид

$$\frac{R}{R_\infty} = \frac{R_0 - R_\infty + e^\xi (R_0 + R_\infty)}{-R_0 + R_\infty + e^\xi (R_0 + R_\infty)}, \quad \xi = \frac{2\sqrt{2}x}{R_\infty}$$

Форма струи, соответствующая этому решению при  $\alpha = \pi/8$ , изображена на фиг. 4 (кривая 1).

**11. Капиллярные струи.** При небольшом поверхностном натяжении истечение струй будет происходить аналогично. Поверхностное натяжение, однако, окажет влияние на коэффициент сужения струи. С учетом поверхностного натяжения интеграл (6.3) удобно записать в безразмерных переменных  $W = \rho u^2 R_0 / \sigma$ ,  $r = R/R_0$ ,  $X = x/R_0$ .

Тогда для зависимости  $r(X)$  получаем задачу Коши

$$[(1/2) - (2/W)r^3](r')^2 = 1 + A_1 r^2 - (4/W)r^3 + A_2 r^4, \quad r(0) = 1 \quad (11.1)$$

Режим течения при числе Вебера  $W > 4$  назовем докритическим. В этом случае полином в правой части может иметь два равных положительных корня  $r = k < 1$  и уравнение (11.1) приведет к виду

$$r' = -\left(\frac{r}{k} - 1\right) \sqrt{2 \frac{(1 + r/k)^2 + 2r^2(k/W)}{1 - (4/W)r^3}}, \quad r(0) = 1 \quad (11.2)$$

Решение этого уравнения определяет монотонное уменьшение радиуса  $r$  от 1 на выходе из отверстия при  $X = 0$  до значения  $r = R_\infty/R_0 = k$  на бесконечном удалении. Для истечения струи из конического сопла с углом раствора  $2\alpha = 2 \arctg(-R'(0))$  можно получить следующее соотношение для коэффициента сжатия струи

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sqrt{2 \frac{(1 + 1/k)^2 + 2k/W}{1 - 4/W}}$$

На фиг. 4 кривые 2 и 3 – струи, истекающие из конического сопла с углом раствора  $\alpha = \pi/8$  при значениях числа  $W = 6.8$  и 4.4. Поверхностное натяжение, как видно из рисунка, увеличивает коэффициент сжатия струи. Прирост коэффициента сжатия можно приблизительно определить из асимптотической формулы первого приближения по малому числу  $1/W$

$$k = k_0 + \frac{k_0(1 - k_0)(k_0^3 + 2k_0^2 + 4k_0 + 2)}{2(k_0 + 1)} \frac{1}{W}$$

где  $k_0$  вычисляется по формуле (10.1).

Полином правой части может иметь также два положительных корня  $0 < r_1 < r_2$ . Тогда, выделив два множителя, соответствующие этим корням, представим уравнение (11.1) в виде

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{W}r^3\right](r')^2 = \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)\left(1 - \frac{r}{r_2}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{r_1}\right)\left(1 + \frac{r}{r_2}\right) + \frac{4r_1r_2}{W(r_1+r_2)}r^2\right]$$

Рассмотрим докритический случай  $W > 4$ . Тогда в точке  $x = 0$  имеем  $r(0) = 1$  и левая часть уравнения будет положительной. Из условия положительности правой части следует, что оба корня либо меньше 1, либо больше 1.

В первом случае  $0 < r_1 < r_2 < 1$  радиус струи уменьшается до значения  $r_2$  и затем будет неограниченно возрастать. В случае равных корней  $r_1 = r_2 = k$  получим уже изученное уравнение (11.2).

Во втором случае  $1 < r_1 < r_2$  радиус струи монотонно уменьшается до нулевого значения. При  $r = 0$  производная  $r' = -\sqrt{2}$ , а скорость струи обращается в бесконечность.

При числе Вебера  $W < 4$  истечение струи с монотонным изменением радиуса невозможно. В этом случае существуют режимы течений в виде периодической волны. Они соответствуют положительному корню  $(W/4)^{1/3} < r_1 < 1$  и корню  $r_2 > 1$ . Уравнение имеет вид

$$\left[\frac{2}{W}r^3 - \frac{1}{2}\right](r')^2 = \left(\frac{r}{r_1} - 1\right)\left(1 - \frac{r}{r_2}\right)\left[\left(1 + \frac{r}{r_1}\right)\left(1 + \frac{r}{r_2}\right) + \frac{4r_1r_2}{W(r_1+r_2)}r^2\right]$$

Радиус струи колеблется между минимальным  $r_1$  и максимальным значением  $r_2$ . Такой стационарный режим течения будет, по-видимому, неустойчивым. В силу известной рэлеевской неустойчивости минимальное значение радиуса  $r_1$  будет со временем уменьшаться, а максимальное  $r_2$  расти, и струя распадется на капли.

**Заключение.** Уравнения, описывающие нестационарные нелинейные волны в каналах произвольного сечения, сведены к более простой форме, удобной как для аналитического, так и численного исследования. Для волн в жидкости конечной глубины они совпадают с известной формой уравнений Грина-Нагди с симметриями, позволяющими для них находить дополнительные интегралы.

Для стационарных течений жидкости в каналах произвольного сечения полученные уравнения имеют полный интеграл с тремя произвольными постоянными. Он определяет все многообразие стационарных течений в каналах со свободной границей и струях. Решения выбирались с целью показать их высокую точность и получить новые гидродинамические течения: уединенная волна в треугольном канале; различные формы струй, вытекающих из круглого сопла. Приведенные решения с высокой точностью подтверждаются экспериментами.

Автор благодарит В.Ю. Ляпидевского за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00403).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
2. Peregrine D.H. Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. Pt 2. P. 353–365.
3. Дроздова Ю.А., Куликовский А.Г. Об описании длинных нелинейных волн в каналах // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 136–145.
4. Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 2. P. 237–246.

5. *Петров А.Г.* Интегрирование уравнений длинных волн в форме Дроздовой – Куликовского // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 6. С. 762–766.
6. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
7. *Laitone E.V.* The second approximation to cnoidal and solitary waves // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. Pt 3. P. 430–444.
8. *Weidman P.D., Maxworthy T.* Experiments on strong interactions between solitary waves // J. Fluid Mech. 1978. V. 85. Pt 3. P. 417–431.
9. *Brooke B.T.* The solitary wave with surface tension // Quart. J. Appl. Math. 1982. V. 40. № 2. P. 231–234.
10. *Петров А.Г., Смолянин В.Г.* Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1991. № 3. С. 92–96.
11. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
12. *Ioss G., Kirchgassner K.* Water waves for small surface tension: an approach via normal form // Proc. Roy. Soc. Edinburg. Ser. A. 1922. V. 122. № 3–4. P. 267–299.
13. *Черноусько Ф.Л.* Движение тонкого слоя жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 856–862.
14. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

Москва

Поступила в редакцию  
29.VIII.2006