

УДК 532.54.031

© 2007 г. В. П. КАРЛИКОВ, А. В. РОЗИН, С. Л. ТОЛОКОННИКОВ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ВОРОНКООБРАЗОВАНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА

Изучены основные закономерности процесса нестационарного истечения жидкости из вращающегося вместе с ней с постоянной угловой скоростью цилиндрического сосуда через центральное сливное отверстие в его дне. Использован пакет программ STAR-CD, оттестированный на основе результатов проведенных экспериментов с водой при отсутствии вращения. Установлен ряд существенных особенностей изучаемого явления, связанных с формированием в жидкости вихревых воронок. Сделан анализ влияния на процесс истечения жидкости основных определяющих параметров задачи: угловой скорости вращения, вязкости, начальной глубины и др.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, истечение вращающейся жидкости, свободная поверхность, воронкообразование.

Проблема воронкообразования, представляющая и научный, и практический интерес, давно привлекает внимание исследователей. Ей посвящен ряд монографий и огромное число журнальных публикаций. Весьма подробная библиография представлена в [1, 2].

В настоящее время также регулярно появляются работы, например [3, 4], содержащие результаты исследования вихревых воронок, однако в большинстве из них рассматриваются только течения со стационарными воронками. В этих работах изучаются структура течения в окрестности воронок, влияние их на расходные характеристики, возможности устранения их или практического использования и т.п.

Значительно меньше исследований посвящено изучению течений с воронками, возникающими при нестационарном истечении жидкости из сосудов. В работах последнего времени [5, 6] экспериментально изучалось нестационарное истечение из цилиндрического сосуда воды, приведенной перед открытием сливного отверстия во вращательное движение путем погружения в нее на некоторое время с последующим извлечением вращающегося горизонтального диска. Находились зависимости момента образования воронки и расходных характеристик от начальной интенсивности вихревого движения жидкости, которая характеризовалась величиной окружной скорости частицы, расположенной на свободной поверхности на определенном расстоянии от оси цилиндра.

Следует заметить, что принятый в этих работах параметр, характеризующий степень начальной закрученности жидкости в сосуде, не является определяющим параметром задачи, поскольку заданному значению его может соответствовать бесконечное множество вариантов распределения окружных скоростей в объеме жидкости. Поэтому полученные в [5, 6] закономерности носят частный характер, относящийся лишь к одному из таких вариантов.

Очевидно, что степень начальной закрученности может быть задана значением единственного параметра лишь в случае твердотельного вращения жидкости вместе с сосудом с угловой скоростью ω .

Настоящая работа посвящена численному анализу основных особенностей течения, возникающего после открытия сливного отверстия именно при твердотельном начальном вращении жидкости.

1. Постановка задачи. Изучалось истечение жидкости из цилиндрического сосуда с диаметром $D = 0.26$ м через круглое центральное сливное отверстие в дне. Рассматривались сливные отверстия с диаметрами $d = 0.025; 0.03; 0.035$ м. Значение угловой скорости ω вращения жидкости и сосуда выбирались в диапазоне $0 \leq \omega \leq 7c^{-1}$. Начальный объем Q_0 жидкости в сосуде менялся в пределах $5.31 \cdot 10^{-3} \leq Q_0 \leq 8.49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Изучались жидкости с кинематическим коэффициентом вязкости в диапазоне $10^{-6} \leq \nu \leq 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$.

Основные определяемые параметры – объем жидкости, находящейся в сосуде в данный момент времени – Q , и значение его в момент достижения концом воронки выходного сечения – Q^* (критический объем).

Изучалась зависимость этих параметров от времени t , угловой скорости ω , кинематического коэффициента вязкости ν , начального значения объема жидкости в сосуде Q_0 , диаметров сливного отверстия d и сосуда D , а также ускорения силы тяжести g , т.е. зависимости:

$$Q = f(d, D, Q_0, \omega, \nu, g, t), \quad Q^* = \varphi(d, D, Q_0, \omega, \nu, g, t)$$

Находилась также зависимость от указанных определяющих параметров формы свободной поверхности жидкости в сосуде и момента времени t^* , в который достигается критическое значение остающегося в сосуде объема жидкости.

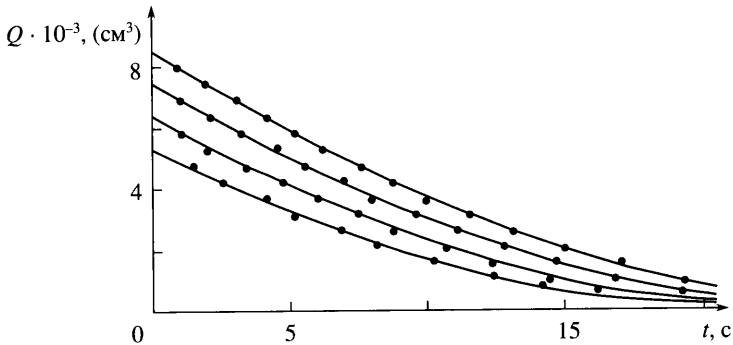
Из соображений теории размерностей искомая зависимость для Q может быть представлена в виде

$$\frac{Q}{Q_0} = \Psi \left(\frac{d}{D}, \frac{Q_0}{D^3}, \frac{\omega D^{1/2}}{g^{1/2}}, \frac{\nu}{g^{1/2} D^{3/2}}, \frac{t g^{1/2}}{D^{1/2}} \right)$$

Зависимости для Q^*/Q_0 и $\bar{t}^* = t^* g^{1/2} / D^{1/2}$ включают те же безразмерные параметры, кроме последнего.

Поскольку истечение жидкости приводило к появлению поля окружных скоростей в относительном движении, обусловленному действием сил Кориолиса, был исследован также характер радиального распределения этих скоростей на определенном уровне над дном сосуда в некоторый момент времени, а также зависимость от времени связанного с этим полем дополнительного момента количества движения частиц жидкости, находящейся в сосуде, относительно оси вращения сосуда.

Для численных расчетов использовался пакет программ STAR-CD (лицензия НИИ механики МГУ). Система пространственных уравнений Рейнольдса и уравнения неразрывности решалась для случая нестационарного трехмерного течения двух несмешивающихся вязких несжимаемых тяжелых жидкостей (например, вода-воздух). Для замыкания системы уравнений использовалась стандартная для STAR-CD “высокореинольдсовая” $k - \epsilon$ модель турбулентности с алгебраическими пристеночными функциями для слабо шероховатых стенок. Для отслеживания границы раздела жидкость-воздух применялся метод VOF. В качестве граничных условий ставились условия прилипания на твердых стенках сосуда и постоянства давления на других границах расчетной области, включающей зону течения внутри сосуда и окрестность истекающей струи. Для параметров турбулентности принималось граничное условие нулевого градиента вдоль линий тока. Расчет велся в цилиндрической вращающейся системе координат, начало которой совпадало с центром отверстия, ось – с осью симметрии сосуда, а скорость вращения – со скоростью вращения сосуда. Для задания начальных условий использовалось точное решение для жидкости во вращающемся с постоянной угловой скоростью сосуде: скорости равны нулю, свободная поверхность – параболоид вращения. Неявная расчетная схема в численной модели строилась методом конечного объема, использовались противопоточные разности первого порядка аппроксимации. Полученная в резуль-



Фиг. 1. Сравнение найденных экспериментально значений объема жидкости в сосуде в разные моменты времени (точки) с полученным численным расчетом (сплошные линии). $\omega = 0$; $d = 0.025$ м, $Q_0 = 5.31 \cdot 10^{-3}$; $6.37 \cdot 10^{-3}$; $7.43 \cdot 10^{-3}$; $8.49 \cdot 10^{-3}$ м³ (кривые 1, 2, 3, 4), $\nu_0 = 10^{-6}$ м²/с

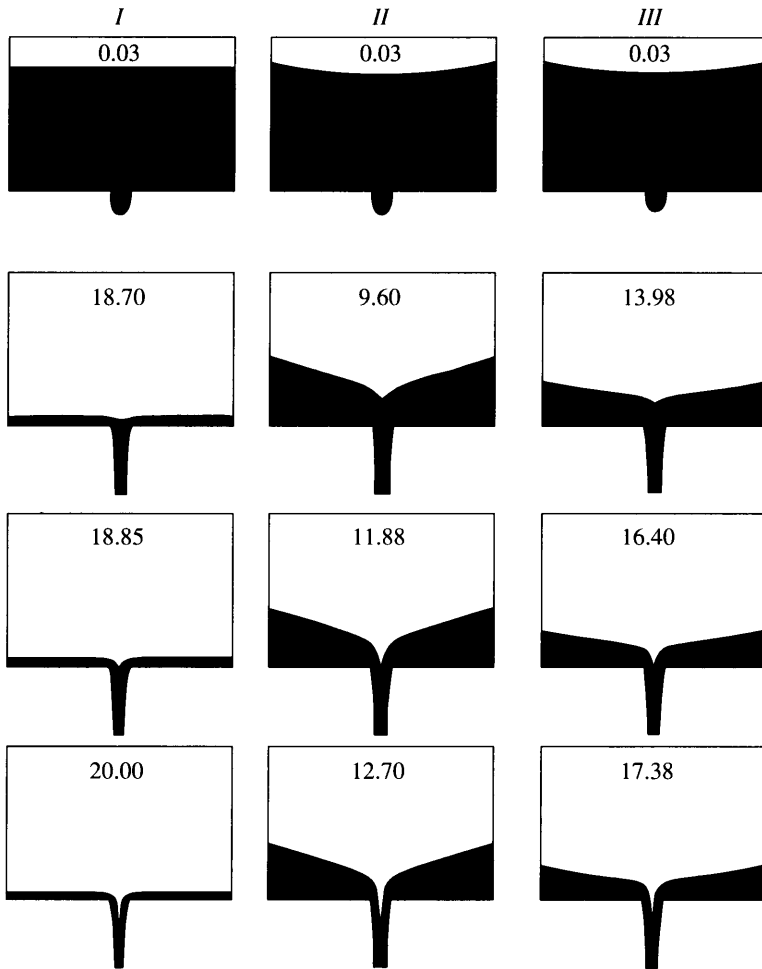
тате дискретизации система алгебраических уравнений решалась методом итераций по давлению PISO.

Численный анализ проводился после тщательного тестирования численной модели путем сопоставления получаемых результатов с результатами большой серии специально проведенных авторами экспериментов, в которых изучалось истечение невращающихся жидкостей ($\omega = 0$) с разными вязкостями, и начальными объемами их в сосуде и размерами сливного отверстия. На фиг. 1 показано в качестве примера сравнение значений объема остающейся в сосуде воды Q в разные моменты времени t , найденных экспериментально, с результатами численных расчетов. Аналогичные результаты были получены и для глицерина. Проводилось также сравнение с данными, получаемыми по известным гидравлическим формулам для истечения с переменным напором [7]. Как видно, расчетные результаты для расходных характеристик практически совпадают с экспериментальными (относительная погрешность не превышает 3%).

2. Результаты численного анализа. Установленная в результате тестирования численного метода достоверность получаемых при его использовании результатов позволила провести весьма обширное исследование различных аспектов изучаемого явления и при $\omega \neq 0$ без проведения дополнительных экспериментов.

Общее представление о характере зависимости формы свободной поверхности от времени, угловой скорости и вязкости жидкости дает фиг. 2, где показаны для $\omega = 0$ и $\omega = 4$ с⁻¹ полученные расчетом формы свободной поверхности для воды и жидкости с большим на три порядка значением вязкости в некоторые характерные моменты времени. Над каждой картиной свободной границы указано значение соответствующего момента времени в секундах. Начальный объем жидкости для всех представленных случаев $Q_0 = 7.43 \cdot 10^{-3}$ м³, коэффициент вязкости воды $\nu_0 = 10^{-6}$ м²/с, у более вязкой жидкости $\nu = 1000\nu_0$. Показанные на фиг. 2 контуры свободной границы I относятся к воде при $\omega = 0$, II и III – соответственно к воде и к вязкой жидкости при $\omega = 4$ с⁻¹. Первый ряд соответствует моментам времени, близким к началу истечения, второй – начальной стадии формирования воронки, третий – моментам достижения критического объема и четвертый – моментам времени после проникновения воронки в вытекающую струю.

Обращает на себя внимание существенно разная в рассмотренных случаях динамика формирования воронок. Рост ω замедляет процесс истечения жидкости из сосуда, существенно ускоряет процесс формирования воронки и сокращает время достижения ею сечения сливного отверстия.



Фиг. 2. Форма свободной поверхности воды (I, II) и вязкой жидкости (III) при $\omega = 0$ (I) и $\omega = 4c^{-1}$ (II, III) в моменты времени, указанные в секундах

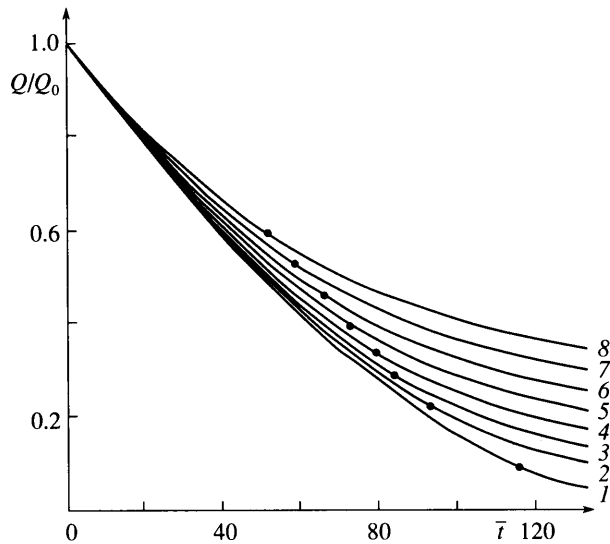
Это подтверждается также показанной на фиг. 3 найденной для воды зависимостью от времени относительного значения находящегося в сосуде объема жидкости Q/Q_0 при разных $\bar{\omega} = \omega D^{1/2}/g^{1/2}$. Точками на кривых отмечены моменты достижения объемом Q критического значения Q^* (касание воронкой сечения сливного отверстия).

Для воды зависимости критического объема Q^* и момента времени t^* его достижения от ω в диапазоне его изменения $1 \leq \omega \leq 7 c^{-1}$ близки к линейным и могут быть аппроксимированы формулами

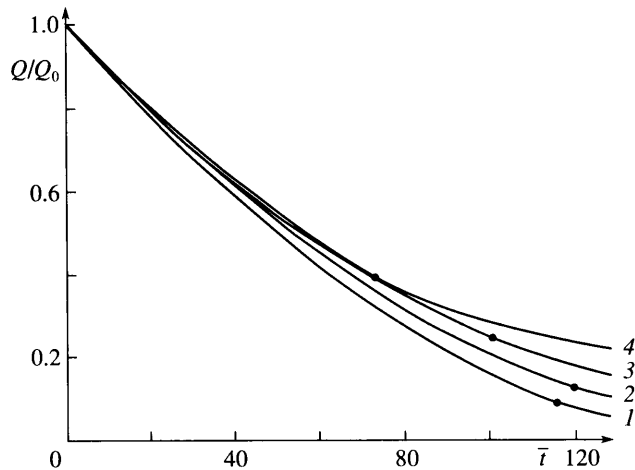
$$Q^*/Q_0 = 0.16 + 0.38\bar{\omega}, \quad \bar{t}^* = 99.3 - 41.7\bar{\omega}$$

Линейный характер таких зависимостей в этом диапазоне ω сохраняется и для более вязкой жидкости (изменяются лишь значения коэффициентов).

Любопытный эффект был обнаружен в результате сравнительного анализа зависимости от времени относительного значения остающегося в сосуде объема жидкости при

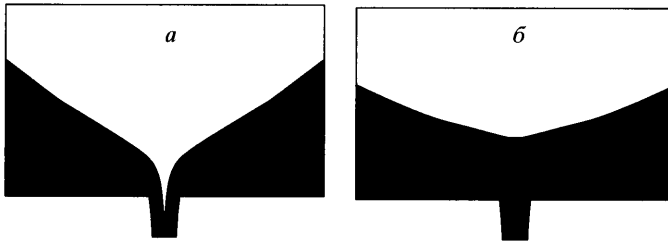


Фиг. 3. Зависимость относительного объема Q/Q_0 от времени $i = t\sqrt{D/g}$ для воды при $\omega = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7c^{-1}$ (кривые 1–8). Точки на кривых соответствуют критическим объемам

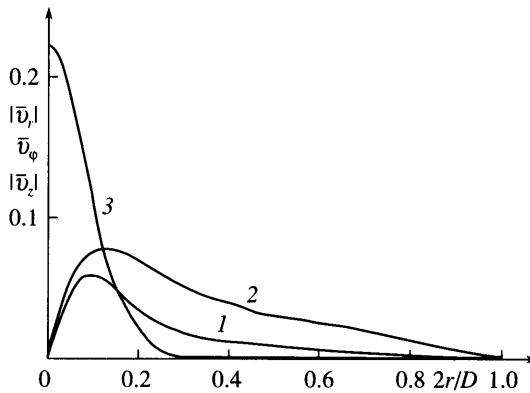


Фиг. 4. Зависимость объема жидкости в сосуде от времени i при $\omega = 0$ и $\omega = 4c^{-1}$ для воды с $v = v_0$ (кривые 1, 4) и вязкой жидкости с $v = v_0 10^3$ (кривые 2, 3). Точки – то же, что и на фиг. 3

разных v . На фиг. 4 эти зависимости показаны для воды с $v = v_0$ и более вязкой жидкости с $v = 1000v_0$ при $\omega = 0$ и $\omega = 4c^{-1}$. Если при $\omega = 0$ более вязкая, чем вода, жидкость вытекает всегда медленнее воды (в каждый фиксированный момент времени остающийся в сосуде объем жидкости у нее всегда больше, чем у воды) (кривые 2 и 1), то при $\omega = 4c^{-1}$ эта тенденция наблюдается только до некоторого момента, близкого к достижению водой критического объема, после чего вязкая жидкость вытекает быстрее воды (кривые 3, 4).



Фиг. 5. Контуры объемов жидкости в сосуде в одинаковый момент времени при $\omega = 7c^{-1}$: *a* – вода, $v = v_0$; *б* – вязкая жидкость с $v = 800v_0$

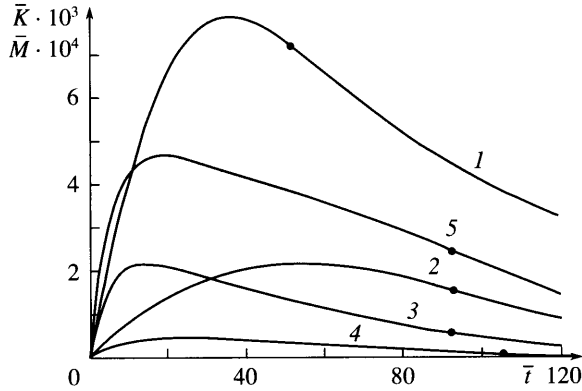


Фиг. 6. Радиальное распределение безразмерных значений величины составляющих скорости $|\bar{v}_r| = |v_r|/\sqrt{gD}$, $\bar{v}_\phi = v_\phi/\sqrt{gD}$, $|\bar{v}_z| = |v_z|/\sqrt{gD}$ (кривые 1–3 соответственно) на горизонтальном уровне $h = 0.57d$ над дном сосуда для глицерина с $v = 800v_0$ при $\omega = 7c^{-1}$

Этот эффект, очевидно, связан с резким сокращением расхода воды после внедрения воронки в сливное отверстие и тем самым уменьшением проходного сечения. Для более вязкой жидкости этот момент наступает позже, чем у воды, а до него продолжается истечение ее через сливное отверстие полным сечением, причем с напором большим, чем у воды.

Это подтверждается фиг. 5, где показана для фиксированного момента времени после внедрения водяной воронки в сливное отверстие форма свободной поверхности при $\omega = 7c^{-1}$ у воды (*a*) и более вязкой жидкости – глицерина с $v = 800v_0$ (*б*). Хорошо видно, что при относительно близких в этот момент времени значениях остающихся в сосуде объемов воды и глицерина у последнего наблюдается достаточно большой уровень над отверстием, напор которого и обеспечивает превышение расхода его над расходом воды.

Существенной особенностью изучаемых течений при $\omega \neq 0$ является, как указывалось, возникновение под действием сил Кориолиса поля окружных скоростей v_ϕ в относительном движении. Представление о характере распределения таких окружных скоростей вдоль радиуса дает фиг. 6. Здесь для случая истечения глицерина при $\omega = 7c^{-1}$ приведено радиальное распределение величин окружной v_ϕ , а также осевой v_z и ради-



Фиг. 7. Зависимости от времени безразмерных значений дополнительного момента количества движения жидкости $\bar{K} = K/(\rho g^{1/2} D^{9/2})$, обусловленного действием сил Кориолиса (кривые 1–4), и момента $\bar{M} = M/(\rho g D^4)$ сил, действующих на стенки и дно сосуда (кривая 5). При $\omega = 1c^{-1}$ и $\omega = 7c^{-1}$ для воды с $v = v_0$, (кривые 2, 1) и глицерина с $v = 800v_0$ (кривые 4, 3). Кривая 5 — $\omega = 7c^{-1}$, $v = 800v_0$

альной v , составляющих скорости на горизонтальном уровне $h = 0.57d$ в определенный момент времени.

На фиг. 7 показаны зависимости от времени вычисленных при $\omega = 1c^{-1}$ и $\omega = 7c^{-1}$ для воды и глицерина значений дополнительных, обусловленных возникновением окружных скоростей, моментов количества движения K находящейся в сосуде жидкости относительно оси вращения.

Наличие возникшего поля окружных скоростей создает на боковых стенках сосуда и его дне касательные напряжения, которые должны приводить к увеличению угловой скорости вращения сосуда в случае, если бы он находился в свободном вращении. Этот эффект, отмеченный акад. М.А. Лаврентьевым в [8], нашел подтверждение в проведенном исследовании. На фиг. 7 показана также зависимость от времени величины возникающего момента сил M , действующего на стенки и дно вращающегося сосуда при вытекании из него глицерина при $\omega = 7c^{-1}$. Этот момент вызвал бы рост угловой скорости сосуда при наличии у него возможности свободного вращения вокруг своей оси.

Заключение. Наличие начального твердотельного вращения жидкости, вытекающей через круглое отверстие в дне цилиндрического сосуда, вращающегося с постоянной угловой скоростью, замедляет истечение ее, ускоряет начало формирования воронки и сокращает время достижения воронкой сечения сливного отверстия. Относительное значение критического объема и время достижения его в диапазоне значений $1 \leq \omega \leq 7c^{-1}$ линейно зависят от угловой скорости вращения сосуда. Обнаружено, что в случае истечения жидкости из вращающегося с постоянной угловой скоростью сосуда более вязкая жидкость начиная с некоторого момента времени вытекает быстрее менее вязкой. Исследование подтвердило описанный М.А. Лаврентьевым эффект ускорения вращения свободно вращающегося цилиндрического сосуда с жидкостью вследствие истечения ее через центральное отверстие в его дне.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 07-01-00296, 05-01-00375), фонда поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4474.2006.1), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МК-3022.2006.1.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поликовский В.И., Перельман Р.Г.* Воронкообразование в жидкости с открытой поверхностью. М.: Л.: Госэнергоиздат, 1959. 190 с.
2. *Логвинович Г.В., Буйвол В.Н., Дудко А.С и др.* Течения со свободными поверхностями. Киев: Наук. думка, 1985. 295 с.
3. *Shiraishi M., Sato T.* Switching phenomenon of a bathtub vortex // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. № 4. P. 850–854.
4. *Andersen A., Bohr T., Stenum T.* Anatomy of a Bathtub vortex Rev. Letters. 2003. V. 91. № 10. P. 104502–1.
5. *Штарев А.А.* Экспериментальное исследование расхода жидкости при нестационарном истечении из заполненной емкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 113–121.
6. *Павельев А.А., Штарев А.А.* Влияние симметрии положения сливного отверстия на формирование нестационарных вихревых воронок // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 182–188.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.2007