

УДК 532.526.3:533.6.011.55

© 2007 г. В. В. БОГОЛЕПОВ, В. Я. НЕЙЛАНД

О РАЗВИТИИ МЕДЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Выявлены механизмы развития медленных нестационарных возмущений в пристеночной части гиперзвукового пограничного слоя, построена схема режимов возмущенного течения, для каждого из которых сформулирована нелинейная краевая задача. Показано, что основными факторами, формирующими возмущенное течение, являются значение энтальпии газа у поверхности тела, уровень локального вязко-невязкого взаимодействия и дозвуковой или сверхзвуковой тип пограничного слоя в целом. Численные и аналитические решения получены в линейном приближении. Установлено, что усиление локального вязко-невязкого взаимодействия или повышение роли сверхзвуковой основной части пограничного слоя придают возмущенному течению "сверхзвуковые" в целом черты: ослабляется распространение возмущений вверх по потоку и усиливается их рост вниз по потоку. Ослабление же локального вязко-невязкого взаимодействия или повышение роли дозвуковой основной части пограничного слоя производят обратное воздействие. Охлаждение поверхности способствует усилению влияния основной части пограничного слоя, а ее нагрев – его пристеночной части. Получено также, что для рассмотренных режимов возмущения распространяются от участка турбулентного течения, находящегося по потоку ниже исследуемой возмущенной области, навстречу набегающему потоку, что может иметь существенное значение при построении нелинейной теории устойчивости.

Ключевые слова: гиперзвуковой пограничный слой на охлаждаемой поверхности, нестационарное самоиндуцированное возмущение давления, схема режимов распространения медленных возмущений.

Обычно линейная фаза развития нестационарных возмущений исследуется при использовании композитных уравнений типа Орра–Зоммерфельда [1, 2]. Они содержат внепорядковые члены, в которые входит большое число Рейнольдса, что усложняет, в общем случае, анализ получаемых результатов, и не позволяют переходить к нелинейной фазе. Более рациональный подход к решению этой проблемы может заключаться в использовании асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, как это сделано при построении классической теории пограничного слоя Прандтля [3] или асимптотической теории его отрыва (теория свободного взаимодействия) [4–9]. Нестационарная форма этой теории позволила изучить развитие длинноволновых возмущений в пограничном слое в достаточно широком диапазоне изменения скорости внешнего потока [10–16]. Ниже при использовании известного метода сращиваемых асимптотических разложений [17] анализируется развитие медленных возмущений в пристеночной части гиперзвукового пограничного слоя [18, 19], что является обобщением стационарной теории отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле [20].

1. Постановка задачи, основные оценки. Рассматривается обтекание плоской поверхности равномерным потоком вязкого совершенного газа. Предполагается, что число Маха в набегающем потоке велико: $M_\infty \gg 1$, а число Рейнольдса, посчитанное по параметрам набегающего потока и расстоянию l от передней кромки поверхности, большое, но докритическое: $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty \gg 1$ (здесь ρ_∞ , u_∞ и μ_∞ – значения плотности газа, его скорости и коэффициента вязкости в набегающем потоке). Это означает, что погранич-

ный слой вблизи поверхности остается ламинарным, а сама поверхность будет подвергаться сильному аэродинамическому нагреванию. Поэтому для сохранения ее конструкционной прочности она должна быть охлаждаемой.

Исследуется локальная возмущенная область течения на расстоянии l от передней кромки поверхности, возникающая в результате воздействия самоиндуцированного возмущения давления.

В дальнейшем используются только безразмерные переменные. Для этого все линейные размеры относятся к l , компоненты скорости u и v вдоль осей прямоугольной системы координат x и y – к u_∞ , время t , давление p , энтальпия h и функция тока ψ – к величинам l/u_∞ , $\rho_\infty u_\infty^2$, u_∞^2 и $\rho_\infty u_\infty l$ соответственно, а плотность газа ρ и его коэффициент вязкости μ – к своим значениям в набегающем потоке: ρ_∞ и μ_∞ .

Предполагается, что возмущение давления Δp_δ , возникающее за счет вытесняющего действия пограничного слоя, мало по сравнению с давлением в набегающем потоке

$$\Delta p_\delta \sim \frac{\delta}{M_\infty} \ll \frac{1}{M_\infty^2} \quad (1.1)$$

где δ – толщина пограничного слоя. То есть рассматривается режим слабого вязкого взаимодействия [21] при малом значении его параметра $\chi \sim M_\infty \delta \ll 1$.

Принимаются еще уравнение состояния для совершенного газа и степенная зависимость коэффициента вязкости от энтальпии

$$\gamma p = (\gamma - 1) \rho h, \quad \mu = A M_\infty^{2\omega} h^\omega \quad (1.2)$$

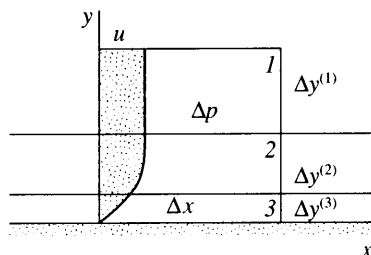
где γ – отношение удельных теплоемкостей, а A и ω – некоторые постоянные. Тогда в области ламинарного пограничного слоя с характерными размерами $\Delta x \sim 1$ и $\Delta y \sim \delta \sim M_\infty^{\omega+1} / \text{Re}_\infty^{1/2}$ будут справедливы оценки для функций течения

$$u \sim h \sim 1, \quad v \sim \delta, \quad p \sim \rho \sim \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \mu \sim M_\infty^{2\omega}, \quad \psi \sim \frac{\delta}{M_\infty^2} \quad (1.3)$$

Слабое локальное возмущение давления $\delta/M_\infty \ll \Delta p \ll 1/M_\infty^2$ (малое по сравнению со значением в набегающем потоке или в пограничном слое, но большое по сравнению с возмущением от его вытесняющего воздействия, и проявляющееся на малой протяженности $\delta \leq \Delta x \leq 1$) по-разному влияет на отдельные области течения на конечном расстоянии от передней кромки поверхности. В тонкой пристеночной части пограничного слоя (в области 3, см. схему течения на фиг. 1) с малой характерной толщиной $\Delta y^{(3)} \ll \delta$ (верхний индекс в скобках обозначает номер области), где в силу прилипания газа к поверхности мала его продольная компонента скорости $u^{(3)} \ll 1$, такое возмущение давления может индуцировать в общем случае нелинейные возмущения функций течения ($\Delta u^{(3)} \sim u^{(3)} \ll 1$, например). И изменение толщины этой области будет иметь тот же порядок, что и сама ее величина: $\Delta \Delta y^{(3)} \sim \Delta y^{(3)}$.

В основной части пограничного слоя (в области 2) с такой же характерной толщиной $\Delta y^{(2)} \sim \delta$ продольная компонента скорости уже не мала: $u^{(2)} \sim 1$. И малое возмущение давления Δp может индуцировать здесь только малые, линейные возмущения функций течения ($\Delta u^{(2)} \ll u^{(2)} \sim 1$, например). Эта область как целое сдвигается областью 3, а возмущение давления Δp индуцирует дополнительно собственное изменение ее толщины $\Delta \Delta y^{(2)}$.

В итоге смещается и внешняя граница пограничного слоя. А за счет локального (на малой протяженности $\delta \ll \Delta x \leq 1$) взаимодействия с гиперзвуковым набегающим пото-



Фиг. 1. Локальная возмущенная область течения: 1 – возмущенная часть равномерного набегающего потока; 2 – основная часть пограничного слоя; 3 – пристеночная часть пограничного слоя

ком в более толстой по порядку величины, чем пограничный слой, области 1 (в возмущенной части равномерного набегающего потока) при $\delta \ll \Delta y^{(1)} \sim \Delta x/M_\infty$ индуцируется “подправленное” возмущение давления Δp .

Это возмущение давления Δp “корректирует” изменение толщин областей 3 $\Delta y^{(3)}$ и 2 $\Delta y^{(2)}$ и соответственно величину самого возмущения давления. Таким образом, устанавливается согласованная величина самоиндуцированного возмущения давления Δp , для определения которого необходимо и достаточно в общем случае рассмотрения трех перечисленных выше областей возмущенного течения [4–6].

Если предположить, что коэффициенты теплового потока C_q и напряжения трения C_f сохраняют свои порядки величин в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя

$$C_q = \frac{\mu}{Re_\infty Pr} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\delta}{M_\infty^2} \frac{B}{Pr}$$

$$C_f = \frac{\mu}{Re_\infty} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\delta}{M_\infty^2} C$$
(1.4)

то при использовании выражения для коэффициента вязкости (1.2) можно получить профили продольной компоненты скорости u и энтальпии h для этой области

$$h = \left[(\omega + 1) \frac{B y}{A \delta} + h_w^{\omega+1} \right]^{1/(\omega+1)}, \quad u = \frac{C}{B} (h - h_w)$$
(1.5)

где Pr – число Прандтля, B и C – некоторые постоянные, а индекс “ w ” относится к значениям параметров на плоской поверхности.

В случае несильно охлажденной поверхности при

$$\left(\frac{y_*}{\delta} \right)^{1/(\omega+1)} \ll h_w \leq 1$$
(1.6)

где y_* – толщина пристеночной части невозмущенного пограничного слоя, из (1.5) в первом приближении получают представления для u и h

$$h \approx h_w + \frac{B y}{A \delta h_w^\omega}, \quad u \approx \frac{C y}{A \delta h_w^\omega}$$
(1.7)

которые показывают, что тогда эта часть пограничного слоя – изотермическая.

2. Схема режимов развития пристеночных возмущений. Полагая теперь, что в результате воздействия самоиндуцированного возмущения давления Δp в пристеночной

области 3 возникают вязкие нелинейные возмущения, из сопоставления порядков величин основных членов уравнений Навье–Стокса

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

и при использовании соотношений (1.2) и профилей (1.7) можно получить оценки для ее характерной толщины и величины возмущения давления, которое не изменяется поперек пограничного слоя при $1 \gg \Delta x \gg \delta$ [20]

$$\Delta y^{(3)} \sim \delta h_w^{(2\omega+1)/3} \Delta x^{1/3}, \quad \Delta p \sim \frac{\Delta x^{2/3}}{M_\infty^2 h_w^{(2\omega+1)/3}} \quad (2.1)$$

Принимая, что характерные толщины области 3 и пристеночной части невозмущенного пограничного слоя одинаковы по порядку величины $\Delta y^{(3)} \sim y_*$, условие (1.6) дает критерий ее изотермичности

$$\Delta x \ll h_w^{\omega+2} \leq 1 \quad (2.2)$$

В области 2 порядки величин функций течения определяются в основном соотношениями (1.3). И возмущение давления (2.1) индуцирует здесь возмущение продольной компоненты скорости, например, и изменение толщины этой области

$$\begin{aligned} \Delta u^{(2,1)} &\sim \frac{\Delta p}{\rho^{(2)} u^{(2)}} \sim \frac{\Delta x^{2/3}}{h_w^{(2\omega+1)/3}} \\ \Delta \Delta y^{(2)} &\sim \frac{\Delta u^{(2,1)} \Delta y^{(2)}}{u^{(2)}} \sim \frac{\delta \Delta x^{2/3}}{h_w^{(2\omega+1)/3}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

А смещение всей области 2 на толщину области 3 $\Delta y^{(3)}$ вызовет соответствующее возмущение продольной компоненты скорости

$$\Delta u^{(2,2)} \sim \frac{u^{(2)} \Delta y^{(3)}}{\Delta y^{(2)}} \sim h_w^{(2\omega+1)/3} \Delta x^{1/3} \quad (2.4)$$

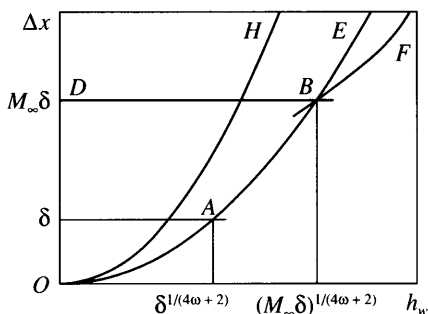
И, наконец, по теории малых возмущений [21] суммарное локальное изменение толщины пограничного слоя индуцирует в области 1 возмущение давления

$$\Delta p \sim \frac{1}{M_\infty} \frac{\Delta y^{(3)} + \Delta \Delta y^{(2)}}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Оценки (2.1)–(2.5) получены в предположении, что основные вязкие нелинейные процессы происходят в тонкой пристеночной области 3, где мала продольная компонента скорости $u^{(3)} \ll 1$. Поэтому они позволяют построить схему режимов развития медленных пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое около охлаждаемой поверхности, представленной на фиг. 2.

Соотношение (2.2) определяет левую границу (это линия $ОН$ при $\Delta x \sim h_w^{\omega+2}$) диапазона изменения величин энтальпии газа у поверхности h_w и протяженности локальной возмущенной области течения Δx , когда область 3 изотермическая.

На линии $ОАВЕ$ при $\Delta x \sim h_w^{2(2\omega+1)}$ одинаковы по порядку величины изменения толщин областей 3 и 2 $\Delta y^{(3)} \sim \Delta \Delta y^{(2)}$ и возмущения функций течения в области 2 от возмуще-



Фиг. 2. Схема режимов развития медленных пристеночных возмущений: OH – левая граница изотермичности области 3; на линии $OABE$ возмущения от областей 3 и 2 одинаковы по порядку величины; DBF – линия взаимодействия областей 2 и 1; в точке A $dp/du \neq 0$ в области 2

ния давления Δp и от смещения ее на толщину области 3 $\Delta u^{(2,1)} \sim \Delta u^{(2,2)}$, например, (см. соотношения (2.3) и (2.4)). Слева от этой линии при меньших значениях h_w или больших Δx на толщину пограничного слоя влияют в основном изменения в области 2, а условие локального взаимодействия с внешним потоком (2.5) определяет линию DB при $\Delta x \sim M_\infty \delta$.

Справа от линии $OABE$ при больших значениях h_w или меньших Δx толщина пограничного слоя изменяется в основном за счет области 3, и условие локального взаимодействия с областью 1 (2.5) выполняется на линии BF при $\Delta x \sim (M_\infty \delta)^{3/4} h_w^{\omega+1/2}$.

В точке B реализуется наиболее общий режим развития медленных пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое около охлаждаемой поверхности, так как здесь существенны все члены соотношения (2.5). При смещении от этой точки влево (по линии DB) или вправо (по линии BF) уменьшается соответственно роль областей 3 или 2 в развитии возмущений. При смещении по линии BAO вниз к точке A ослабляется локальное взаимодействие с внешним набегающим потоком и становится несущественным член в левой части соотношения (2.5). Это означает, что толщина пограничного слоя в первом приближении не должна изменяться, а возмущение давления Δp будет определяться из условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2

$$\Delta y^{(3)} + \Delta \Delta y^{(2)} \approx 0 \quad (2.6)$$

В точке A , когда характерная протяженность локальной возмущенной области течения становится соизмеримой с толщиной пограничного слоя $\Delta x \sim \delta$, будет необходимо дополнительно учитывать изменение возмущения давления поперек пограничного слоя (т.е. влияние вертикального градиента давления dp/du на течение в области 2).

При смещении от точки B вверх к точке E по линии BE член в левой части соотношения (2.5) становится больше всех других по порядку величины. Это означает, что для исследуемой модели течений на линии BE выше точки B нет нетривиальных режимов развития возмущений.

3. Краевая задача для общего режима развития возмущений. Далее рассматривается общий режим развития возмущений (линия $OABE$ на схеме фиг. 2 при $\Delta x \sim h_w^{2(2\omega+1)}$), когда изменения толщин областей 3 и 2 одинаковы по порядку величины, а нестационарное самоиндуцированное возмущение давления Δp вызывает нестационарные возмуще-

ния в области 3. Приравнивание порядков величин нестационарных и конвективных членов уравнений Навье–Стокса и использовании профилей (1.7) и оценок (2.1) позволяет тогда получить оценку для масштаба времени

$$\Delta t \sim \frac{\Delta x}{u^{(3)}} \sim \frac{\delta h_w^{\omega} \Delta x}{\Delta y^{(3)}} \sim h_w^{(\omega-1)/3} \Delta x^{2/3} \sim h_w^{3\omega+1} \quad (3.1)$$

Сопоставление теперь порядков величин основных членов уравнений Навье–Стокса и использование уравнений (1.2), профилей (1.7) и оценок (2.1) и (3.1) дает возможность получить оценки для вязкой нестационарной и нелинейной пристеночной области 3 и ввести для этой области независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$\begin{aligned} x &= 1 + h_w^{2(2\omega+1)} x_3, \quad y = \delta h_w^{2\omega+1} y_3, \quad t = h_w^{3\omega+1} t_3 \\ u &= h_w^{\omega+1} u_3 + \dots, \quad v = \frac{\delta}{h_w^{\omega}} v_3 + \dots \\ p &= \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_{\infty}^2} p_3 + \dots, \quad \rho = \frac{\rho_w}{M_{\infty}^2 h_w} + \dots \\ \mu &= M_{\infty}^{2\omega} h_w^{\omega} \mu_w + \dots, \quad h = h_w + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подстановка разложений (3.2) в уравнения Навье–Стокса и в (1.2) и совершение предельного перехода

$$\delta \rightarrow 0, \quad M_{\infty} \rightarrow \infty, \quad M_{\infty} \delta \rightarrow 0, \quad h_w \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

показывают, что течение в области 3 в первом приближении будет описываться нестационарными уравнениями для несжимаемого пограничного слоя

$$\begin{aligned} \rho_w \left(\frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) + \frac{dp_3}{dx_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} &= 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0, \quad \mu_w = A, \quad (\gamma - 1) \rho_w = 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

На плоской поверхности должны выполняться обычные условия непротекания и прилипания

$$u_3 = v_3 = 0 \quad (y_3 = 0) \quad (3.5)$$

Начальные условия получаются из сращивания с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя (1.7)

$$u_3 \rightarrow \frac{C}{A} y_3, \quad v_3 \rightarrow 0, \quad p_3 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty) \quad (3.6)$$

а внешние краевые условия должны находиться из сращивания с решением в области 2.

Так как в основной части пограничного слоя, в области 2, продольная компонента скорости u по порядку величины больше, чем в нестационарной пристеночной области 3, то эта область будет квазистационарной. Ввиду этого для анализа возмущенного течения в области 2 можно и удобно использовать в качестве независимых переменные

Мизеса: продольную координату x и функцию тока ψ . Тогда вертикальная координата y становится зависимой переменной, а оценки (1.3) и (2.3) при $\Delta x \sim h_w^{2(2\omega+1)}$ позволяют ввести здесь новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$\begin{aligned} x &= 1 + h_w^{2(2\omega+1)} x_2, \quad \psi = \frac{\delta}{M_\infty^2} \Psi_2 \\ y &= \delta y_{20}(\Psi_2) + \delta h_w^{2\omega+1} y_{21} + \dots, \quad u = u_{20}(\Psi_2) + h_w^{2\omega+1} u_{21} + \dots \\ v &= \frac{\delta}{h_w^{2\omega+1}} v_2 + \dots, \quad p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty^2} p_2 + \dots \\ \rho &= \frac{\rho_{20}(\Psi_2)}{M_\infty^2} + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty^2} \rho_{21} + \dots, \quad h = h_{20}(\Psi_2) + h_w^{2\omega+1} h_{21} + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

где функция $y_{21} = y_{21}(x_2, \Psi_2; t_3)$ характеризует изменение толщины всего пограничного слоя, а индексом “20” отмечены профили функций течения в невозмущенном пограничном слое, зависящие только от переменной Ψ_2 .

Подстановка разложений (3.7) в уравнения Навье–Стокса и в уравнение состояния (1.2) и совершение предельного перехода (3.3) приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_{20} u_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\delta^2}{h_w^{4(2\omega+1)}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial \Psi_2} = 0, \quad \frac{\partial y_{21}}{\partial x_2} = \frac{v_2}{u_{20}} \\ \frac{dy_{20}}{d\Psi_2} &= \frac{1}{\rho_{20} u_{20}}, \quad \frac{\partial y_{21}}{\partial \Psi_2} = -\frac{\rho_{20} u_{21} + \rho_{21} u_{20}}{\rho_{20}^2 u_{20}^2}, \quad \rho_{20} \frac{\partial h_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0 \\ 1 &= (\gamma - 1) \rho_{20} h_{20}, \quad \gamma p_2 = (\gamma - 1) (\rho_{20} h_{21} + \rho_{21} h_{20}) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что все возмущения затухают вверх по потоку при $x_2 \rightarrow -\infty$ и $\rho_{20} u_{20}^2 = M_{20}^2$, где $M_{20} = M_{20}(\Psi_2)$ – профиль числа Маха в невозмущенном пограничном слое, эту систему можно переписать в ином виде

$$\begin{aligned} \rho_{20} u_{20} u_{21} + p_2 &= 0, \quad \frac{\delta^2}{h_w^{4(2\omega+1)}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial \Psi_2} = 0, \quad \frac{\partial y_{21}}{\partial x_2} = \frac{v_2}{u_{20}} \\ \frac{dy_{20}}{d\Psi_2} &= \frac{1}{\rho_{20} u_{20}}, \quad \frac{\partial y_{21}}{\partial \Psi_2} = \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{p_2}{\rho_{20} u_{20}}, \quad \rho_{20} h_{21} = p_2 \\ 1 &= (\gamma - 1) \rho_{20} h_{20}, \quad \rho_{21} = \rho_{20} p_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из второго уравнения системы (3.8) следует, что в точке A на схеме фиг. 2 при $h_w \sim \delta^{1/(2(2\omega+1))}$ и $\Delta x \sim \Delta y^{(2)} \sim \delta$ коэффициент при первом его члене $\delta^2/h_w^{4(2\omega+1)} \sim 1$, и поэтому здесь необходимо учитывать изменение давления $p_2 = p_2(x_2, \Psi_2; t_3)$ поперек обла-
сти 2. При смещении от точки A к точке B $\Delta x \gg \Delta y^{(2)} \sim \delta$, $h_w \gg \delta^{1/(2(2\omega+1))}$, $\delta^2/h_w^{4(2\omega+1)} \ll 1$,

$\partial p_2 / \partial \psi_2 = 0$, и давление $p_2 = p_2(x_2, \psi_2 = 0; t_3)$ уже не будет изменяться поперек этой тонкой области.

Процедура сращивания асимптотических разложений (3.2) и (3.7) для соседних областей 3 и 2 сразу показывает, что

$$x_3 = x_2, \quad p_3(x_3, t_3) = p_2(x_2, \psi_2 = 0; t_3) \quad (3.9)$$

Из разложений (3.7) и первого уравнения (3.8) получается, что в области 2

$$u = u_{20} - h_w^{2\omega+1} \frac{p_2}{\rho_{20} u_{20}} + \dots$$

Это выражение при $\psi_2 \rightarrow 0$ или $y_{20} \rightarrow 0$ и при использовании профиля (1.7) для продольной компоненты скорости u , соотношений (3.9) и $\rho_{20}(\psi_2 \rightarrow 0) = \rho_w / h_w$ может быть преобразовано к виду

$$u = \frac{C y_{20}}{A h_w^\omega} - h_w^{3\omega+2} \frac{A}{C \rho_w y_{20}} \frac{p_3}{\rho_w y_{20}} + \dots$$

Если здесь перейти теперь к переменным области 3 $y_{20} = h_w^{2\omega+1} y_3$ при совершении предельного перехода (3.3) при фиксированном значении переменной y_{20} , то получается выражение, определяющее поведение продольной компоненты скорости u в этой области при $y_3 \rightarrow \infty$

$$u = h_w^{\omega+1} \left(\frac{C}{A} y_3 - \frac{A}{C \rho_w y_3} \frac{p_3}{\rho_w y_3} \right) + \dots$$

и приводит к внешнему краевому условию для функции $u_3 = u_3(x_3, y_3, t_3)$

$$u_3 \rightarrow \frac{C}{A} y_3 \quad (y_3 \rightarrow \infty) \quad (3.10)$$

Из системы уравнений (3.8) для величины изменения толщины всего пограничного слоя можно получить

$$y_{21}(x_2, \psi_2; t_3) = D(x_2, t_3) + \int_0^{\psi_2} \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{p_2 d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} \quad (3.11)$$

где $D(x_2, t_3) = y_{21}(x_2, \psi_2 = 0; t_3)$ – изменение толщины области 3.

Тогда разложение (3.7) для вертикальной координаты $y = y(x_2, \psi_2; t_3)$ принимает вид

$$y = \delta y_{20} + \delta h_w^{2\omega+1} \left(D(x_2, t_3) + \int_0^{\psi_2} \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{p_2 d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} \right) + \dots$$

Выполняя процедуру сращивания вертикальных координат в областях 3 и 2 и учитывая соотношение (3.10), можно получить условие взаимодействия этих областей

$$\begin{aligned} [y]_{\psi_2 \rightarrow 0} &= \delta y_{20} + \delta h_w^{2\omega+1} (D + \dots) + \dots = \\ &= [\delta h_w^{2\omega+1} (y_3 + D) + \dots]_{y_3 \rightarrow \infty} = \delta h_w^{2\omega+1} \left(\frac{A}{C} u_3 + D \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$u_3 \rightarrow \frac{C}{A} (y_3 - D) \quad (y_3 \rightarrow \infty)$$

Для квазистационарной (как и область 2) возмущенной области I внешнего набегающего потока следует ввести новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$\begin{aligned} x &= 1 + h_w^{2(2\omega+1)} x_1, \quad y = \frac{h_w^{2(2\omega+1)}}{M_\infty} y_1 \\ u &= 1 + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty^2} u_1 + \dots, \quad v = \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty} + \dots \\ p &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty^2} p_1 + \dots, \quad \rho = 1 + h_w^{2\omega+1} \rho_1 + \dots \\ h &= \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2} + \frac{h_w^{2\omega+1}}{M_\infty^2} h_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подстановка разложений (3.13) в уравнения Навье–Стокса и в (1.2) и совершение предельного перехода (3.3) показывают, что течение в области I описывается системой

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \gamma p_1 = (\gamma-1)h_1 + \rho_1$$

Эти уравнения преобразуются в волновые для возмущения давления p_1 и вертикальной компоненты скорости v_1

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = 0$$

Учитывая, что во внешнем гиперзвуковом потоке возмущения не передаются вверх по потоку, можно получить вид решения этих уравнений и важное для дальнейшего соотношение

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(x_1 - y_1; t_3), \quad v_1 = v_1(x_1 - y_1; t_3) \\ v_1(x_1, y_1 = 0; t_3) &= p_1(x_1, y_1 = 0; t_3) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выполняя процедуру сращения асимптотических разложений (3.7) и (3.13) в областях 2 и I для вертикальной компоненты скорости v и давления p и учитывая уравнения (3.8) и соотношения (3.11) и (3.14), удастся записать условие для определения самоиндуцированного возмущения давления

$$\frac{M_\infty \delta}{h_w^{2(2\omega+1)}} \left(\frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{p_2 d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} \right) = p_2(x_2, \psi_2 \rightarrow \infty; t_3) \quad (3.15)$$

$$p_2(x_2, \psi_2 \rightarrow \infty; t_3) = p_1(x_1, y_1 = 0; t_3), \quad x_2 = x_1$$

В точке B на схеме фиг. 2 при $M_\infty \delta \sim h_w^{2(2\omega+1)}$, когда возмущение давления не изменяется поперек области 2

$$p_2(x_2, \psi_2; t_3) = p_2(x_2, \psi_2 = 0; t_3) = p_3(x_3, t_3)$$

(см. уравнения (3.8) и соотношения (3.9)), это условие преобразуется к новому виду

$$\frac{\partial D}{\partial x_3} + L \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = p_3, \quad L = \int_0^\infty \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} \quad (3.16)$$

которое замыкает краевую задачу (3.4)–(3.6), (3.12) для пристеночной области 3. Интеграл L сходится при $\psi_2 \rightarrow \infty$, так как на внешней границе гиперзвукового пограничного слоя плотность газа $\rho_{20} \rightarrow \infty$ при конечном значении координаты пограничного слоя y_{20} . Этот интеграл может принимать положительные или отрицательные значения, когда невозмущенный пограничный слой в целом ведет себя как дозвуковой или сверхзвуковой поток соответственно, что определяет характер распространения возмущений [20, 22].

При смещении от точки B вниз по линии $OABE$ вплоть до точки A возмущение давления по-прежнему остается постоянным поперек области 2, но тогда $M_\infty \delta \gg h_w^{2(2\omega+1)}$, и функция $p_3 = p_3(x_3, t_3)$ будет определяться из условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2 (см. соотношение (2.6))

$$D + L p_3 = 0 \quad (3.17)$$

Это условие показывает, что краевая задача (3.4)–(3.6), (3.12) и (3.17) для пристеночной области 3 может иметь нетривиальные решения только при $L < 0$, когда невозмущенный пограничный слой в целом ведет себя как сверхзвуковой поток, так как только в этом случае сверхзвуковая область 2 сможет компенсировать изменение толщины всегда дозвуковой области 3.

В точке A на схеме фиг. 2 при $\delta \sim h_w^{2(2\omega+1)}$ возмущение давления будет переменным поперек области 2: $p_2 = p_2(x_2, \psi_2; t_3)$. Эту функцию уже нельзя выносить из-под знака интеграла в (3.15), и возмущение давления будет определяться из условия, аналогичного соотношению (3.17)

$$D + \int_0^\infty \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{p_2 d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} = 0 \quad (3.18)$$

4. Решение для общего режима развития возмущений. Аффинное преобразование переменных краевой задачи (3.4)–(3.6), (3.12) и (3.16) для наиболее общего случая развития возмущений, когда в создании самоиндуцированного возмущения давления участвуют все три области (этот случай соответствует точке B на схеме фиг. 2), позволяет представить ее в новом виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u = v = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow y - D \quad (y \rightarrow \infty) \\ u \rightarrow y, \quad v \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0, \quad D \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$N_3 \frac{\partial D}{\partial x} \pm N_2 \frac{\partial p}{\partial x} = N_1 p$$

где у всех переменных для простоты опущен индекс “3”, для толщины пристеночной области 3 D сохранено ее прежнее обозначение, а здесь и далее верхний или нижний знаки соответствуют дозвуковой и сверхзвуковой в целом области 2 при $L > 0$ или $L < 0$. Пара-

метры N_1 , N_2 и N_3 характеризуют вклады областей 1, 2 и 3 в создание возмущений. В точке B $N_1 = N_2 = N_3 = 1$. Направо от нее уменьшается роль области 2: $N_1 = N_3 = 1$, $N_2 \rightarrow 0$. При движении к точке D снижается роль области 3: $N_1 = N_2 = 1$, $N_3 \rightarrow 0$. И, наконец, при смещении к точке A ослабляется локальное вязко-невязкое взаимодействие и падает роль области 1: $N_2 = N_3 = 1$, $N_1 \rightarrow 0$. (Если, для примера, переменные t_3 , x_3 , y_3 , u_3 , v_3 , p_3 и D отнести к величинам

$$\frac{A}{C^{3/2}}, A \frac{(\gamma - 1)^{1/2}}{C^{5/4}}, A \frac{c}{C^{3/4}}, C^{1/4} c, C^{3/4} c, C^{1/2}$$

и $A(\gamma - 1)^{1/2}/C^{3/4}$ соответственно, то это приведет к значениям параметров $N_1 = N_3 = 1$ и $N_2 = |L|C^{5/4}/A(\gamma - 1)^{1/2}$.)

Решение краевой задачи (4.1) представляется в виде малых возмущений (волн по времени t и по продольной координате x) относительно течения в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя: $u = y$, $v = p = D = 0$

$$p = \alpha \frac{N_3 \exp(\lambda t + kx)}{N_1 \mp N_2 k}, \quad v = \alpha k f \exp(\lambda t + kx) \quad (4.2)$$

$$u = y - \alpha \frac{df}{dy} \exp(\lambda t + kx), \quad D = \alpha \frac{\exp(\lambda t + kx)}{k}$$

Здесь $f = f(y)$ – комплексная функция действительного переменного, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ и $k = k_r + ik_i$ – комплексные постоянные (λ_r и k_r – инкременты амплитуд возмущений по времени t и по продольной координате x , λ_i – частота, k_i – волновое число), α – комплексная амплитуда волны, $|\alpha| \ll 1$. Условия затухания возмущений вверх по потоку при $x \rightarrow -\infty$ выполняются при выборе $k_r > 0$.

В переменных (4.2) краевая задача (4.1) сводится к задаче на собственные значения [13]

$$\frac{d^3 f}{dy^3} - (\lambda + ky) \frac{df}{dy} + kf + \frac{N_3 k}{N_1 \mp N_2 k} = 0 \quad (4.3)$$

$$f = \frac{df}{dy} = 0 \quad (y = 0), \quad \frac{df}{dy} \rightarrow \frac{1}{k} \quad (y \rightarrow \infty)$$

Последующее дифференцирование уравнения (4.3) по y и использование новой независимой переменной z позволяет преобразовать (4.3) к новому виду

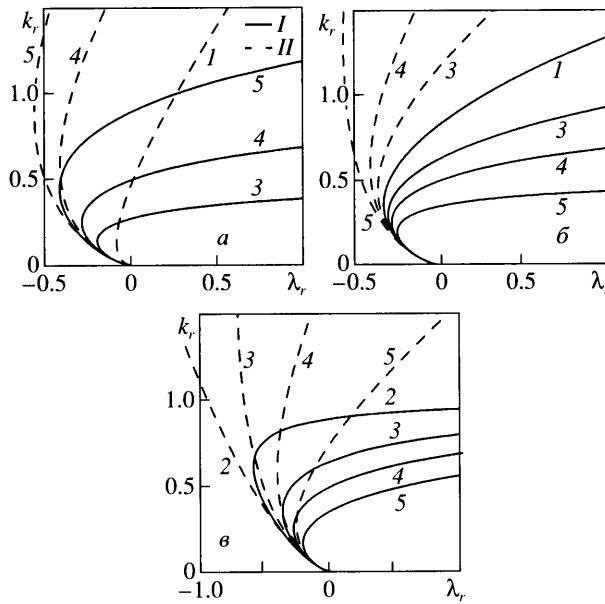
$$\frac{d^4 f}{dz^4} - z \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

$$f = \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{d^3 f}{dz^3} = -\frac{N_3}{N_1 \mp N_2 k} \left(z = \frac{\lambda}{k^{2/3}} \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{df}{dz} \rightarrow \frac{1}{k^{4/3}} \quad (|z| \rightarrow \infty), \quad z = \frac{\lambda}{k^{2/3}} + k^{1/3} y$$

Решение уравнения (4.4) выражается через функции Эйри $\text{Ai}(z)$ и получается дисперсионное выражение

$$(N_1 \mp N_2 k) \text{Ai}'\left(\frac{\lambda}{k^{2/3}}\right) + N_3 k^{4/3} \int_{\lambda/k^{2/3}}^{\infty} \text{Ai}(z) dz = 0 \quad (4.5)$$



Фиг. 3. Зависимости пространственного инкремента k_r от временного инкремента λ_r при $k_i = \lambda_i = 0$ ($I-II - L > 0, L < 0$) для: а - $N_2 = N_3 = 1, 1, 3-5 - N_1 = 0, 0.5, 1, 2$; б - $N_1 = N_3 = 1, 1, 3-5 - N_2 = 0, 0.5, 1, 2$; в - $N_1 = N_2 = 1, 2-5 - N_3 = 0.1, 0.5, 1, 2$

Исследование дисперсионных ветвей этого соотношения при $N_1 = N_3 = 1$ и $N_2 = 0$, когда возмущение давления создается только за счет изменения толщины пристеночной области 3, выполнено в [13, 16], влияние основной части пограничного слоя области 2 рассматривалось в [23] при изучении течений, когда самоиндуцированный и внешний градиенты давления одинаковы по порядку величины. Дисперсионное соотношение вида (4.5) получается также при учете влияния энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое, когда его основная часть (область 2) сверхзвуковая [24, 25].

Асимптотическое представление функции Эйри $\text{Ai}(z)$ при $|z| \gg 1$ на комплексной плоскости z с вырезанной отрицательной вещественной полуосью [26]

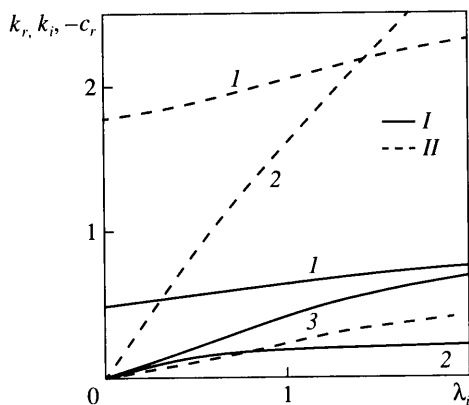
$$\text{Ai}(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right)$$

позволяет получить при $|\lambda/k^{2/3}| \gg 1$ асимптотический вид соотношения (4.5)

$$\lambda = \frac{N_3 k^2}{N_1 \mp N_2 k} \quad (4.6)$$

Решения при $\lambda_i = k_i = 0$, когда возмущения изменяются только экспоненциально по времени t и по продольной координате x , могут быть интерпретированы как бегущие волны со скоростью распространения $c = -\lambda_r/k_r$. Соответствующие дисперсионные кривые для соотношения (4.5) представлены на фиг. 3, где показаны зависимости пространственного инкремента k_r от временного инкремента λ_r .

Уменьшение величины параметра N_1 (фиг. 3, а) означает ослабление степени локального вязко-невязкого взаимодействия с возмущенной областью 1 внешнего гиперзвукового потока, что приводит к соответствующему ослаблению сверхзвуковых свойств



Фиг. 4. Зависимости пространственного инкремента k_r (кривые I), волнового числа k_i (2) и отрицательной величины скорости распространения волны $-c_r$ (3) для нейтральных по времени возмущений ($\lambda_r = 0$) от частоты λ_i при $N_1 = N_2 = N_3 = 1$; $I, II - L > 0, L < 0$

возмущенного течения: уменьшению величины пространственного инкремента k_r , усилению проникновения возмущений вверх по потоку и замедлению их роста вниз по потоку. Как уже отмечалось выше, предельное решение при $N_1 = 0$ (в этом случае возмущение давления определяется из условия взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2 (3.17)) существует только для сверхзвуковой в целом области 2 и $L < 0$. Для дозвуковой в целом области 2 и $L > 0$ существует только тривиальное нулевое решение.

Случай при $N_2 = 0$ (фиг. 3, б) – традиционный вариант теории свободного взаимодействия [4–9], когда возмущение давления создается только за счет изменения толщины пристеночной области 3. Соответствующее решение дисперсионного соотношения (4.5) было получено в [13]. Рост параметра N_2 означает усиление влияния дозвуковой или сверхзвуковой области 2 и приводит к очевидному преобладанию дозвуковых или сверхзвуковых свойств возмущенного течения.

Пристеночная область 3 всегда дозвуковая, поэтому рост параметра N_3 всегда приводит к увеличению дозвуковых свойств возмущенного течения (фиг. 3, в).

Соотношение (4.6) описывает поведение кривых на фиг. 3 при удалении от начала координат.

Для стационарных течений при $\lambda_r = 0$ из соотношения (4.5) получается трансцендентное уравнение для определения величины $k_r = k_r^*$

$$N_3 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) k_r^{*4/3} \pm 3^{2/3} N_2 k_r^* - 3^{2/3} N_1 = 0$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Значение $k_r^* \approx 0.82715$ при $N_1 = N_3 = 1$ и $N_2 = 0$ было найдено в [27].

Соотношение (4.5) допускает также существование дополнительных ветвей дисперсионных кривых при $\lambda_r < 0$ и $(N_1 \mp N_2 k_r) \text{Ai}'(\lambda_r/k_r^{2/3}) < 0$. Соответствующие решения при $N_1 = N_3 = 1$ и $N_2 = 0$ были найдены в [16].

Зависимости пространственного инкремента k_r , волнового числа k_i и отрицательной величины скорости распространения волны возмущений (фазовой скорости) $-c_r$ от частоты λ_i для практически важного режима развития возмущений – нейтральных по времени возмущений при нулевом значении временного инкремента $\lambda_r = 0$ и значении параметров $N_1 = N_2 = N_3 = 1$ (для примера) представлены на фиг. 4. Результаты расчетов по-

казывают, что в широком диапазоне изменения определяющих параметров подобия N_1 , N_2 и N_3 возмущения распространяются от участка турбулентного течения, находящегося ниже по потоку локальной возмущенной области, навстречу набегающему потоку.

5. Решение для случая изменения возмущений давления поперек области 2. В предыдущем разделе исследованы случаи развития возмущений, соответствующие кривой $OABE$ на схеме фиг. 2 от точки B вплоть до точки A . В самой же точке A останутся справедливыми уравнения (3.4), краевые условия (3.5), (3.6), (3.12) для пристеночной области 3 и “компенсационное” условие для определения давления (3.18). А вот в области 2, которая, как было показано выше, обязательно должна быть сверхзвуковой при $L < 0$ (для существования нетривиального решения), необходимо теперь учитывать вертикальное изменение возмущений давления $p_2 = p_2(x_2, \psi_2; t_3)$, так как здесь $\delta \sim h_w^{2(2\omega+1)}$. Из уравнений (3.8) тогда с учетом соотношения (3.11) можно получить уравнение, описывающее изменение функции $p_2(x_2, \psi_2; t_3)$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_2^2} + \int_0^{\psi_2} \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_2^2} \frac{d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} + \frac{1}{u_{20}} \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0$$

Если это уравнение продифференцировать по ψ_2 , то оно преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p_2 u_{20}}{\partial x_2^2 \rho_{20}} + u_{20} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \psi_2^2} - \frac{du_{20}}{d\psi_2} \frac{\partial p_2}{\partial \psi_2} = 0 \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения при выполнении условия сращивания разложений (3.9) и естественного в этом случае условия затухания возмущений на внешней границе пограничного слоя

$$p_2(x_2, \psi_2; t_3) \rightarrow 0 \quad (\psi_2 \rightarrow 0) \quad (5.2)$$

дает распределение возмущения давления $p_2(x_2, \psi_2; t_3)$ в области 2 в зависимости от величины $p_3(x_3, t_3)$ и характеристик течения в невозмущенном пограничном слое.

Для решения краевой задачи (3.9), (5.1) и (5.2) используется представление искомой функции

$$p_2(x_2, \psi_2; t_3) = p_3(x_3, t_3) P(\psi_2)$$

которое позволяет преобразовать ее к новому виду

$$u_{20} \frac{d^2 P}{d\psi_2^2} - \frac{du_{20}}{d\psi_2} \frac{dP}{d\psi_2} + \frac{1}{p_3} \frac{\partial^2 p_3 u_{20}}{\partial x_3^2 \rho_{20}} \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) P = 0 \quad (5.3)$$

$$P(0) = 1, \quad P(\infty) \rightarrow 0$$

Видно, что даже в этом случае решение краевой задачи (5.3) не будет зависеть от продольной координаты x_3 только при $(\partial^2 p_3 / \partial x_3^2) / p_3 = \text{const}$, что, впрочем, реализуется при использовании представления (4.2). Тогда условием взаимной компенсации изменения толщин областей 3 и 2 для определения давления $p_3(x_3, t_3)$ (3.18) будет

$$D + L_1 p_3 = 0, \quad L_1 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{M_{20}^2} - 1 \right) \frac{P d\psi_2}{\rho_{20} u_{20}} \quad (5.4)$$

Как отмечалось выше, пристеночная область 3 всегда дозвуковая, увеличение ее толщины $D > 0$ должно сопровождаться повышением давления $p_3 > 0$, и поэтому нетриви-

альное решение краевой задачи (3.4)–(3.6), (3.12) и (5.4) можно получить только при отрицательном значении интеграла L_1 . Нетрудно убедиться далее, что если в (3.4)–(3.6), (3.12) и (5.4) переменные $t_3, x_3, y_3, u_3, v_3, p_3$ и D отнести к величинам

$$\frac{A^3(\gamma-1)}{L_1^2 C^4}, \frac{A^4(\gamma-1)^2}{|L_1|^3 C^5}, \frac{A^2(\gamma-1)}{|L_1| C^2}, \frac{A(\gamma-1)}{|L_1| C}, \frac{|L_1| C^2}{A}, \frac{A^2(\gamma-1)}{L_1^2 C^2}$$

и $(A^2(\gamma-1))/(|L_1| C^2)$ соответственно, то краевая задача преобразуется к уже исследованному виду (4.1) при $N_1 = 0$ и $N_2 = N_3 = 1$.

Заключение. Выявлены основные механизмы развития пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое, построена схема возмущенного течения, сформулированы соответствующие краевые задачи, найдены определяющие параметры подобия, и выполнен анализ основных свойств решений в линейном приближении. Показано, что медленные пристеночные возмущения распространяются от участка турбулентного течения навстречу набегающему потоку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 05-01-00556) и гранта поддержки ведущих научных школ (НШ-8597.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orr W. McF. The stability or instability of the steady motions of a liquid // Proc. R. Irish. Acad. Ser. A. 1906–1907. V. 27. P. 9–27. P. 69–138.
2. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung // Proc. 4th. Int. Congr. Math. Rome. 1908. P. 116–124.
3. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. III Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Leipzig: Teubner, 1905. S. 484–491.
4. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
5. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
6. Messiter A.F. Boundary layer near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
7. Нейланд В.Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
8. Гогуш Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю. Теория двумерных отрывных течений // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика. М.: ВИНТИ, 1975. Т. 8. С. 5–73.
9. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Лунатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 456 с.
10. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 3. P. 465–485.
11. Brown S.N., Daniels P.G. On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt 4. P. 743–761.
12. Рыжов О.С. Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 4. С. 780–783.
13. Рыжов О.С., Терентьев Е.Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
14. Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
15. Smith F.T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
16. Жук В.И., Рыжов О.С. О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1085–1088.
17. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 311 с.
18. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Волны Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое около охлаждаемой поверхности в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 69–81.

19. Боголепов В.В., Нейланд В.Я. Схема режимов развития длинноволновых пристеночных возмущений в гиперзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 59–71.
20. Нейланд В.Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 99–109.
21. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд.-во иностр. лит., 1962. 607 с.
22. Crocco L. Considerations on the shock-boundary layer interaction // Proc. Conf. on High-Speed Aeronaut. Brooklin: Polytech. Inst. Brooklin, 1955. P. 75–112.
23. Кабин К.С., Лунатов И.И. К теории устойчивости сверхзвуковых и гиперзвуковых пограничных слоев // Аэромеханика и газовая динамика. 2001. № 1. С. 3–10.
24. Соколов Л.А. Влияние энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое // ПМТФ. 1983. № 2. С. 50–53.
25. Соколов Л.А. О влиянии энтропийного слоя на распространение нестационарных возмущений в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПМТФ. 1984. № 3. С. 51–53.
26. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
27. Lighthill M.J. On boundary layers and upstream influence. II. Supersonic flows without separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 217. № 1131. P. 478–507.

Москва

E-mail: vld.bogol@mtu-net.ru

Поступила в редакцию

28.XI.2006