

УДК 532.516.5+531.381

© 2007 г. П. Р. АНДРОНОВ, Д. А. ГРИГОРЕНКО, С. В. ГУВЕРНЮК, Г. Я. ДЫННИКОВА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ САМОВРАЩЕНИЯ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Приводится общая постановка плоской сопряженной задачи динамики и аэрогидродинамики о движении твердого тела, имеющего вращательную степень свободы в потоке вязкой несжимаемой среды. Используется вычислительная технология решения уравнений Навье-Стокса на основе бессеточного метода вязких вихревых доменов. Исследованы закономерности авторотации одиночной пластины и пары пластин. Определено влияние приведенного момента инерции и числа Рейнольдса на угловую скорость вращения. Зависимости гидродинамических нагрузок от времени сопоставлены с соответствующими мгновенными картинками обтекания. Обнаружен эффект увеличения скорости авторотации двух расположенных рядом пластин.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, сопряженная задача динамики и аэрогидродинамики, лагранжевы вихревые методы, авторотация тел в потоке среды, нестационарные гидродинамические нагрузки.

Характерная особенность гидродинамических течений около плохообтекаемых тел – формирование крупномасштабных вихревых структур, вызванных отрывом и неустойчивостью сдвиговых слоев. Образовавшиеся области концентрированной завихренности сносятся вниз по потоку, но влияют на распределение гидродинамических параметров вокруг тела таким образом, что вызывают воспроизводство новых вихревых сгустков. В результате течение становится существенно нестационарным, а тело испытывает интенсивные переменные нагрузки. Неоднозначность поведения в потоке среды симметричных тел, имеющих вращательную степень свободы – одно из проявлений фундаментальных вихревых механизмов нестационарного взаимодействия. Трудности моделирования обусловлены сильной взаимозависимостью между гидродинамикой среды и динамикой погруженного в нее тела, что требует совместного решения задач динамики и аэрогидродинамики в сопряженной постановке.

Наблюдения за поведением флюгеров, маятников, вертушек (в том числе при обработке элементов ветроэнергетических устройств, парашютных систем, органов управления летательных аппаратов и т.п.) показывают, что в зависимости от начальных условий могут возникать режимы автоколебаний, авторотации, а также различные переходные режимы движения тел в потоке жидкости или газа. Экспериментальными исследованиями и анализом причин авторотации прямоугольных пластин в воздушном потоке занимался еще Н.Е. Жуковский. В [1] предложены гипотетические схемы обтекания, объясняющие механизм поддержания авторотации, в частности течение, полученное суперпозицией равномерного потока и неподвижного вихря, когда пластина и ядро вихря вращаются как одно целое; либо циркуляционное обтекание некоторого “крылового” профиля, моделирующего порожденную вращающейся пластиной вихревую область. Однако выполненная в экспериментах [2, 3] визуализация течений около вертушек показала, что их авторотация сопровождается существенно более сложными нестационарными вихревыми структурами.

При решении задач динамики твердого тела в потоке среды широкое распространение получили различные феноменологические и инженерные модели нестационарных

аэрогидродинамических нагрузок. Однако, как правило, границы применимости этих моделей не определены, поскольку во многом остаются не исследованными механизмы влияния вихревых процессов на нестационарные аэродинамические силы и моменты при отрывном обтекании тел.

Значительный прогресс достигнут относительно недавно благодаря широкому внедрению вычислительных вихревых методов, основанных на лагранжевом описании движения жидкости. Современное состояние вопросов развития и использования вихревых методов отражено в обзоре [4] (до уровня 1988 г.), в монографии [5] (до 1995), в обзоре [6] (до 2005). Дополнительно отметим метод кратных цепочек дискретных вихрей [7–9], позволяющий в рамках модели идеальной среды учесть влияние толщины свободных вихревых слоев на процесс потери их гидродинамической устойчивости.

С помощью вихревых методов решались многие задачи нестационарной аэрогидродинамики, однако использовалась, как правило, модель идеальной среды с априорным заданием точек отрыва или с дополнительными предположениями о структуре пограничного слоя на теле. Например, в [10] численным методом дискретных вихрей [5] исследована задача о самовращении двумерной пластины при ее падении в идеальной несжимаемой жидкости под действием силы тяжести. Методом кратных вихревых цепочек моделировались нестационарные вихревые системы около различных маятников, флюгеров, вертушек [2, 9].

Одной из трудностей применения вихревых методов в случае вязкой жидкости является то, что циркуляция скорости по выделенному жидкому контуру не сохраняется из-за диффузии завихренности. В исторически первом методе случайных блужданий [11] учет диффузионного смещения вихрей осуществляется путем добавления к детерминированному конвективному смещению дискретного вихря дополнительного случайного смещения с гауссовым распределением вероятности. В [12] предложены способы имитации диффузии за счет перераспределения циркуляции между конвективно движущимися дискретными вихревыми элементами. В [13] для плоских движений введено понятие диффузионной скорости V_d такой, что на контурах, движущихся в вязкой жидкости со скоростью $V + V_d$, циркуляция скорости V остается постоянной. В [14, 15] дано обобщенное представление диффузионной скорости, которое пригодно и в случае осесимметричных течений.

В настоящей работе дается общая постановка сопряженной задачи о самовращении двумерных тел в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Интегральные представления нестационарных гидродинамических сил и моментов через распределение завихренности позволяют определять движение тела в жидкости без расщепления задачи на динамическую и гидродинамическую составляющие. Решения нестационарных уравнений Навье–Стокса строятся с помощью бессеточного численного метода вязких вихревых доменов [15–17]. Представлены результаты конкретных расчетов для одиночной пластины и пары пластин, имеющих степень свободы относительно собственных осей симметрии.

1. Общая постановка плоской сопряженной задачи о вращении твердого тела в вязкой жидкости. Рассматривается плоское движение цилиндрического односвязного тела, погруженного в вязкую несжимаемую жидкость. В начальный момент времени $t = -0$ среда и тело покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат x, y, z . Тело имеет одну вращательную степень свободы около некоторой оси, параллельной образующей тела и перпендикулярной плоскости x, y . При $t = +0$ начинается плоскопараллельное движение оси по заданному закону $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(t)$ со скоростью $\mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0$, где $\mathbf{R} = \{x, y, 0\}$ – радиус-вектор в плоскости движения. Предполагается, что возмущенное движение жидкости (с плотностью ρ и кинематическим коэффициентом вязкости ν) также остается плоскопараллельным, т.е. давление p и вектор скорости жидкости \mathbf{V} не зависят от координаты z , причем $\mathbf{V}e_z = 0$ в любой момент времени t . Под действием гид-

родинамических нагрузок и сил инерции тело может свободно вращаться вокруг оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\mathbf{e}_z$.

В данной постановке задачи достаточно изучать движение плоской фигуры S , ограниченной контуром тела C в плоскости x, y , приписывая этой фигуре погонную массу m и погонный момент инерции I относительно оси вращения $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$. Будем обозначать площадь фигуры S тем же символом S , тогда $m_* = \rho S$ – погонная масса, \mathbf{R}_* – центр масс, вытесненной телом жидкости, I_* – погонный момент инерции жидкости, вытесненной телом.

$$\mathbf{R}_* = \mathbf{R}_0 + \frac{1}{S} \iint_S \mathbf{r} ds, \quad I_* = \rho \iint_S r^2 ds$$

Здесь и ниже принято $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$, $\mathbf{r}_* = \mathbf{R}_* - \mathbf{R}_0$, $\mathbf{r}_m = \mathbf{R}_m - \mathbf{R}_0$.

В общем случае центр вращения \mathbf{R}_0 , центр масс тела \mathbf{R}_m и центр масс вытесненной телом жидкости \mathbf{R}_* не совпадают между собой. Скорость $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{R}}$ и ускорение $\dot{\mathbf{u}}$ произвольной точки контура C определяются формулами

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}; \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r} \quad (1.1)$$

Динамика тела в жидкости описывается уравнениями

$$I \dot{\boldsymbol{\omega}} + m \mathbf{r}_m \times \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M} \quad (1.2)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_m = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_m, \quad \dot{\mathbf{r}}_* = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_*$$

$$\mathbf{M} = \oint_C \mathbf{r} \times (-\mathbf{Pn}) dl = M_z \mathbf{e}_z \quad (1.3)$$

$$\mathbf{P} = 2\rho\nu\mathbf{W} - p\mathbf{E}$$

$$\nabla\mathbf{V} = 0, \quad \nabla p = \rho\nu\nabla^2\mathbf{V} - \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (1.4)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

где \mathbf{M} – результирующий момент гидродинамических нагрузок на единицу высоты тела, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к контуру C в плоскости x, y , направленный от жидкости к телу; \mathbf{P} , \mathbf{W} – тензоры напряжений и скоростей деформаций в жидкости [18], \mathbf{E} – тензорная единица.

На поверхности тела выполняется граничное условие прилипания: скорость среды \mathbf{V} в окрестности контура C равна скорости \mathbf{u} , соответствующей точки контура. Значит, скорость и ускорение среды на контуре можно выразить через кинематические параметры движения тела по формулам (1.1)

$$\mathbf{V}|_C = \mathbf{u}, \quad \frac{D\mathbf{V}}{Dt}\Big|_C = \dot{\mathbf{u}} \quad (1.5)$$

В случае плоских движений жидкости справедливы формулы [15]

$$\nu\nabla^2\mathbf{V} = \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{V}_d = -\nu\frac{\nabla\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \Omega\mathbf{e}_z \quad (1.6)$$

позволяющие совместно с (1.6) получить дивергентную форму записи уравнения эволюции скалярного поля ненулевой компоненты завихренности

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + \text{div}(\Omega(\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)) = 0 \quad (1.7)$$

Очевидным следствием из (1.7) является свойство сохранения циркуляции на любых замкнутых контурах, движущихся относительно среды с “диффузионной” скоростью \mathbf{V}_d , которое позволяет решать уравнение (1.7) в лагранжевых координатах и которое положено в основу используемого далее в работе бессеточного численного метода вязких вихревых доменов [16, 17].

Смысл последующих преобразований состоит в том, что интеграл в уравнении (1.2) сводится к форме, содержащей только ω , Ω .

Умножая тензорное уравнение (1.3) на \mathbf{n} , можно получить векторное представление [16, 17]

$$\mathbf{Pn} = -p\mathbf{n} + \rho\nu(2\mathbf{n}(\nabla\mathbf{V}) + 2(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V} - \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V}))$$

в котором первый член в скобках равен нулю в силу уравнения (1.4), а второй при $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_C$ можно с помощью (1.1), (1.5) выразить через угловую скорость вращения тела

$$((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V})|_C = (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \nabla) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}$$

Здесь учтено, что оператор $(\mathbf{n} \times \nabla)$ не содержит дифференцирования в направлении нормали, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от пространственных координат.

В результате получаем

$$(\mathbf{Pn})|_C = -p\mathbf{n} + \rho\nu(2\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}) = -p\mathbf{n} - \rho\nu(\boldsymbol{\Omega} - 2\boldsymbol{\omega})\mathbf{e}_l$$

где $\mathbf{e}_l = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z$ – единичный вектор касательной к контуру C в плоскости x, y . Теперь можем записать выражение (1.2) в виде

$$\mathbf{M} = \oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{n} p dl + \rho\nu \oint_C \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} - 4\boldsymbol{\omega} \rho\nu S$$

Для приведения интеграла от $\mathbf{r} \times \mathbf{n} p$ по контуру C к виду, не содержащему давления, заметим, что

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n})|_C = \mathbf{r} \times \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) = \left(\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) \mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_z \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} = \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial l} \mathbf{e}_z$$

следовательно

$$2(\mathbf{r} \times \mathbf{n} p)|_C = \frac{\partial r^2}{\partial l} p \mathbf{e}_z = \frac{\partial (r^2 p)}{\partial l} \mathbf{e}_z - r^2 \frac{\partial p}{\partial l} \mathbf{e}_z \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \nabla p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} = \mathbf{e}_l \nabla p$$

Смысл этого преобразования в том, что интеграл по замкнутому контуру C от первого слагаемого в правой части (1.8) равен нулю, а содержащийся во втором слагаемом градиент давления легко выражается через ω , Ω с помощью подстановок (1.4)–(1.6)

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{n} p dl &= \frac{\rho}{2} \mathbf{e}_z \oint_C r^2 \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{r} - \frac{\rho}{2} \mathbf{e}_z \oint_C r^2 (\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{e}_l dl = \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_S \nabla \times (r^2 \dot{\mathbf{u}}) ds - \frac{\rho}{2} \mathbf{e}_z \oint_C r^2 (\mathbf{V}_d (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_l)) dl = \\ &= 2I_* \dot{\boldsymbol{\omega}} - \rho S \dot{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{r}_* + \frac{\rho\nu}{2} \mathbf{e}_z \oint_C r^2 \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n} dl \end{aligned}$$

Здесь учтено, что циркуляция вектора $r^2 \dot{\mathbf{u}}$ по контуру C равна интегралу по площади от ротора данного вектора, а также использованы свойства векторного и смешанного произведений векторов и оператора Гамильтона ∇ [19], в частности

$$\begin{aligned} \nabla \times (r^2 \dot{\mathbf{u}}) &= r^2 \nabla \times \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}} \times \nabla r^2 = r^2 \nabla \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) - 2\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r} = \\ &= 2r^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - 2(\dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r} = 4\dot{\boldsymbol{\omega}} r^2 - 2\dot{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\nabla_d(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_l) = -v \nabla \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_l) = -v n \nabla \boldsymbol{\Omega} = -v \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n}$$

Окончательно запишем выражение для момента гидродинамических сил

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{e}_z \rho}{2} \oint_C r^2 J dl - v \rho \mathbf{e}_z \oint_C \boldsymbol{\Omega} r n dl + 2I_* \dot{\boldsymbol{\omega}} - m_* \dot{\mathbf{u}}_0 \times \mathbf{r}_* - 4v m_* \boldsymbol{\omega} \quad (1.9)$$

$$J = v \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n}$$

Здесь J представляет собой поток завихренности с поверхности тела, причем справедливо тождество

$$\oint_C J dl = -2S \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

поэтому величина $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ неявно присутствует также и в интегральном члене формулы (1.9).

В предельном случае исчезающе малой вязкости при условии безотрывного обтекания тела поток завихренности J с поверхности в бесконечно тонкий пограничный слой обеспечивает необходимое распределение “присоединенной” циркуляции. Соответствующее этому случаю выражение момента приведено в [16], вклад углового ускорения сводится к зависящему от формы тела отрицательному коэффициенту при $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Действующая на тело гидродинамическая сила

$$\mathbf{F} = -\oint_C \mathbf{P} n dl = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y$$

с помощью аналогичных выкладок также выражается через $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ [16, 17]

$$\mathbf{F} = m_* \dot{\mathbf{u}}_0 - \omega^2 m_* \mathbf{r}_* + 3\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_* + \rho v \oint_C \left(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_l - \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial n} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_z \right) dl$$

В дальнейшем рассматриваются симметричные протяженные тела в виде однородных пластин длиной $2L$, толщиной $h = 0.1 L$ с осью вращения, проходящей через центр симметрии тела и движущейся прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0 = -U \mathbf{e}_x$. Кромки пластин скруглены по окружности радиуса $0.5 h$.

Характерные числа Рейнольдса и Струхала определяются как

$$\text{Re} = \frac{LU}{\nu}, \quad \text{Sh} = \frac{2L}{TU}$$

где T – период колебания или полного оборота пластины. На режиме авторотации средняя угловая скорость $\omega_0 = 2\pi/T$.

Всюду ниже используются безразмерные величины, в качестве основных размерных масштабов приняты L , U , ρ , в частности, время t нормировано на L/U , погонный момент

инерции пластины I – на ρL^4 , момент сил M_z – на $\rho U^2 L^2$, поток завихренности J – на U^2/L . Так что

$$h = 0.1, \quad S = 0.20, \quad m_* = 0.20, \quad I_* = 0.070, \quad \mathbf{r}_* = \mathbf{r}_m = 0$$

Численно решается сопряженная задача совместного отыскания двух скалярных функций $\omega(t)$, $\Omega(t, x, y)$, удовлетворяющих в данном случае системе

$$I\dot{\omega} = M_z(\omega, \dot{\omega}, \Omega)$$

$$M_z = \oint_c \frac{r^2}{2} J dl - \frac{1}{\text{Re}} \oint_c \Omega \mathbf{r} n dl + 2I_* \dot{\omega} - \frac{3m_* \omega}{\text{Re}} \quad (1.10)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega$$

где граничные условия (1.5) на поверхности тела также имеют вид связи между ω , Ω , поскольку поле скоростей в жидкости восстанавливается по полю завихренности с помощью формулы Био-Савара [18].

Сопряженная система (1.10) допускает вырожденный случай нулевого момента инерции тела $I = 0$ без понижения порядка динамического уравнения.

2. Метод численного решения. Используется метод вязких вихревых доменов, частично изложенный в [16, 17]. Пространство с ненулевой завихренностью моделируется набором мелких областей (вихревых доменов), движущихся относительно жидкости с диффузионной скоростью (1.6). На каждом временном шаге с поверхности тела сходят новые домены. В процессе движения циркуляция домена Γ остается постоянной. В каждом домене имеется контрольная точка \mathbf{R} , в которой вычисляется скорость жидкости \mathbf{V} и диффузионная скорость \mathbf{V}_d , после чего точка перемещается в соответствии с суммарной скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$. Для сталкивающихся доменов разноименной циркуляции имеется механизм аннигиляции [16].

При вычислении диффузионной скорости используется интегральное представление [15] градиента поля завихренности в окрестности контрольной точки, содержащее минимаксный параметр ϵ . Вещественная положительная величина ϵ зависит от расстояний до других доменов и поверхности обтекаемых тел и в этом смысле представляет собой “геометрический функционал” [17]. Таким образом, понятие “домен” включает в себя три математических объекта: вектор \mathbf{R} , скаляр Γ и функционал ϵ . При этом Γ остается постоянной, а величины \mathbf{R} и ϵ вычисляются на каждом временном шаге. По положению контрольных точек и значениям циркуляций соответствующих им доменов можно восстановить поля скоростей и завихренности. Поскольку сумма циркуляций соседних доменов остается постоянной, искривление и вытягивание границ не играет существенной роли, так как после перемещения контрольных точек вокруг каждой из них можно мысленно построить домен с другими границами и той же циркуляцией.

В отсутствие неконсервативных сил новые вихревые домены рождаются только на контуре обтекаемых тел. При достаточно малом значении шага по времени можно считать, что образовавшиеся за время этого шага домены находятся в непосредственной близости от тела, и задавать положение новых контрольных точек непосредственно на контуре тела.

Из условия прилипания следует, что с внешней стороны контура скачок скорости отсутствует. Однако при вращательном движении тела скорость гипотетического течения внутри него, равная скорости, индуцированной всеми вихрями, не может быть постоянной. Если завихренность в области, занятой телом, равна нулю, то должен существовать скачок скорости с внутренней стороны контура, т.е. – присоединенная завихренность $\gamma^{(in)}$.

Очевидно, присоединенная завихренность пропорциональна угловой скорости вращения тела $\gamma^{(in)} = \omega\gamma^{(0)}$, где $\gamma^{(0)}$ зависит только от l . Вместе с образовавшейся за время Δt свободной завихренностью она образует некоторое неизвестное распределение циркуляции $\gamma^{(\Sigma)}$, которое удовлетворяет условию “непротекания” – равенству нормальных составляющих скоростей жидкости и контура. Соответствующие уравнения линейны относительно неизвестных циркуляций $g_i = \gamma^{(\Sigma)}(l_i)\Delta l_i$, (Δl_i – длина i -го участка контура) а также относительно скоростей движения точек поверхности, которые, в свою очередь, пропорциональны угловой скорости вращения тела. Как известно, в случае замкнутого контура данная система имеет ранг на единицу ниже числа элементов разбиения контура. Поэтому она дополняется условием сохранения суммарной циркуляции в пространстве, а при неизвестной угловой скорости еще и динамическим уравнением (1.10).

Значение $\Delta\Gamma$ циркуляции домена, образовавшегося на участке Δl контура за время Δt , связано с потоком завихренности J соотношением $\Delta\Gamma = J\Delta l/\Delta t = (\gamma^{(\Sigma)} - \dot{\omega}\gamma^{(0)}\Delta t)\Delta l$. Отсюда видно, что выражение M_z (1.10), линейное относительно J , является линейным и по отношению к неизвестным величинам g_i ω и $\dot{\omega}$. Подынтегральное выражение $\Omega\mathbf{r}\mathbf{n}$ в (1.10) выражается через составляющую диффузионной скорости вихрей, связанную с геометрией области течения и названную в [16, 17] скоростью отталкивания от поверхности.

В результате получаем систему линейных уравнений, позволяющую на каждом шаге по времени находить неизвестную угловую скорость и значения циркуляций g_i . Для нахождения неизвестного распределения $\gamma^{(0)}$ достаточно один раз решить систему уравнений, выражающих условие непротекания, при заданной угловой скорости $\omega = 1$, а затем отделить циркуляцию внешнего скачка $\gamma^{(e)}$ от внутреннего, используя соотношения

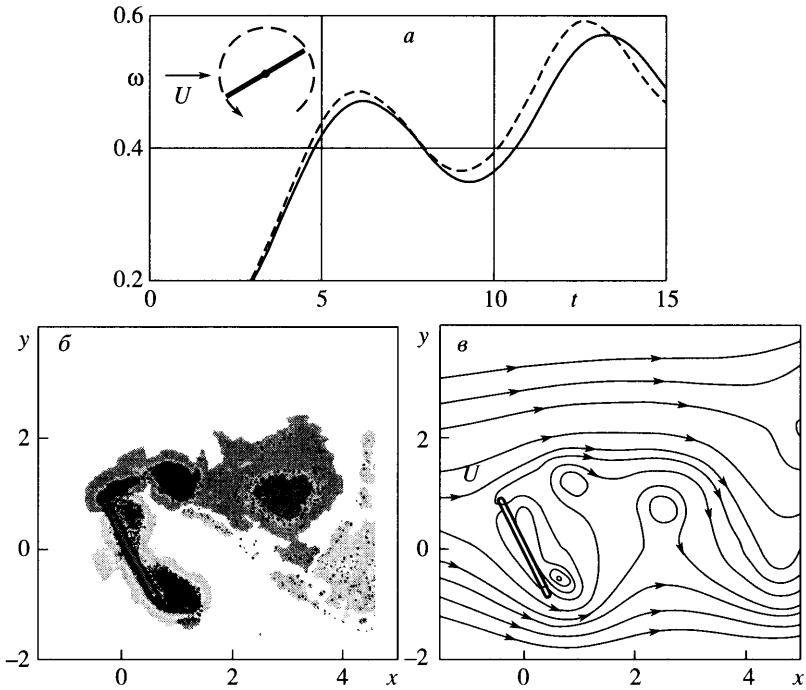
$$\gamma^{(0)} + \gamma^{(e)} = \gamma^{(\Sigma)}, \quad \gamma^{(e)} - \gamma^{(0)} = (\mathbf{V} - \mathbf{u}) \times \mathbf{n}$$

где \mathbf{V} – индуцированная всеми вихревыми доменами скорость на контуре. По известным величинам g_i , ω и $\gamma^{(0)}$ вычисляются циркуляции доменов, образовавшихся на поверхности тела за время Δt . Далее в контрольных точках вычисляются скорость движения жидкости и диффузионная скорость, после чего точки смещаются, т.е. цикл повторяется.

Важным свойством используемой модели является замкнутость уравнений и отсутствие неопределенных параметров, причем доказано [15, 16], что в пределе при увеличении количества доменов эволюция соответствующего поля завихренности подчиняется двумерным нестационарным уравнениям Навье–Стокса. На базе метода вязких вихревых доменов разработан программный комплекс [20]. Комплекс позволяет решать широкий класс сопряженных задач динамики и аэрогидродинамики для произвольного количества тел с различными степенями свободы. В частности, он может применяться для моделирования режимов запуска и расчета рабочих параметров ветроэнергетических установок вертикально-роторного типа – роторов Дарье, Савониуса и т.п.

Исследовалось влияние уровня дискретизации на результат вычислений. На фиг. 1, а построены зависимости от времени угловой скорости пластины при ее старте из начального положения под углом атаки 10° . Сплошная кривая получена при разбиении контура пластины на 164 отрезка и шаге по времени 0.025, штрихи – при удвоенном уровне дискретизации (разбиение контура на 328 отрезков и шаг по времени 0.0125). Отличие не превышает 5%. Все дальнейшие расчеты выполнены при первом из указанных уровней дискретизации. Также на фиг. 1 дан пример мгновенной картины обтекания. Точки на фиг. 1, б – центры вихревых доменов, оттенки серого – уровни завихренности. Соответствующая картина мгновенных линий тока представлена на фиг. 1, в.

3. Авторотация одиночной пластины в потоке вязкой жидкости. Движение пластины и жидкости рассматривается относительно сопутствующей системы координат x, y с началом отсчета в центре вращения пластины (ось x направлена по потоку). Угол атаки α



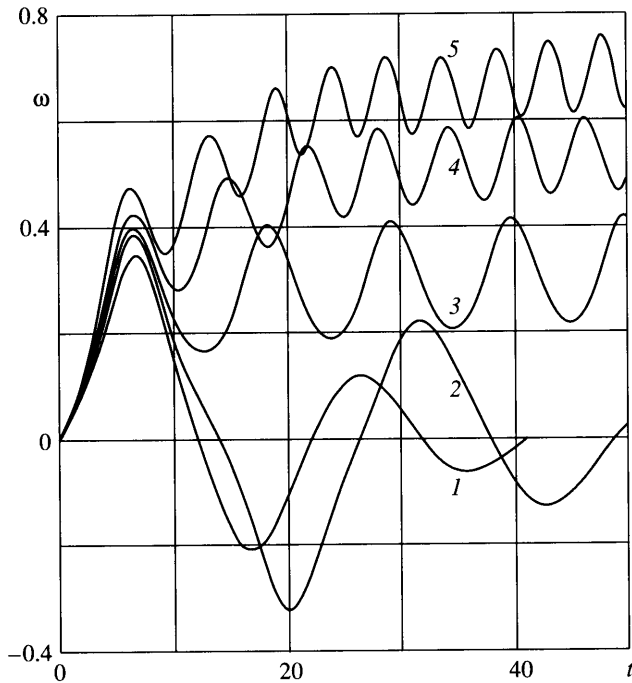
Фиг. 1. Авторотация пластины в потоке вязкой жидкости, $I = 20$, $Re = 1000$

определяется как острый угол между хордой пластины и осью x ($-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$). В начальный момент пластина покоится и занимает положение $\alpha = \alpha_0$.

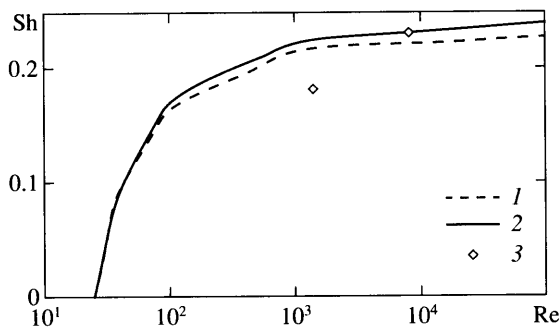
В зависимости от значения α_0 реализуется один из двух основных сценариев взаимодействия с потоком среды. При достаточно больших $|\alpha_0|$ пластина разворачивается поперек потока и не вращается, а лишь “покачивается” около симметричного равновесного положения $\alpha = 90^\circ$. Однако если $|\alpha_0|$ меньше некоторого критического значения α_* , то пластина начинает вращаться, постепенно выходя на квазипериодический режим авторотации. При этом направление вращения определяется знаком начального отклонения α_0 . Критический угол α_* зависит от числа Рейнольдса Re и приведенного момента инерции I .

Угловая скорость вращения пластины $\omega(t)$ существенно зависит от числа Рейнольдса. В случае малых Re пластина не может совершить полного оборота и при любых α_0 выходит на режим затухающих колебаний около равновесного положения (кривые 1, 2 на фиг. 2). С увеличением Re происходит выход на режим авторотации со средней угловой скоростью $\omega_0 = \pi Sh > 0$ (кривые 3–6 на фиг. 2). Наибольшая чувствительность числа Струхала Sh к изменению числа Рейнольдса наблюдается в диапазоне умеренных Re , в то время как при больших Re изменение Sh (Re) слабое, фиг. 3. Скорость самовращения при $Re = 10^2$ примерно на 20% меньше, чем при $Re = 10^3$. Отличия экспериментальных точек [1] от расчетных зависимостей на фиг. 3 могут быть обусловлены влиянием трения в оси закрепления пластины в эксперименте.

Анализ эволюции расчетного поля завихренности и соответствующих аэродинамических нагрузок (фиг. 4) при квазиустановившемся режиме самовращения пластины ($I = 20$, $Re = 10^3$) позволяет прийти к выводу, что самовращение поддерживается за счет интенсивного положительного вихря, который локализуется на подветренной стороне около кромки части пластины, движущейся по потоку (фиг. 1, б). Вихрь такого типа, на-

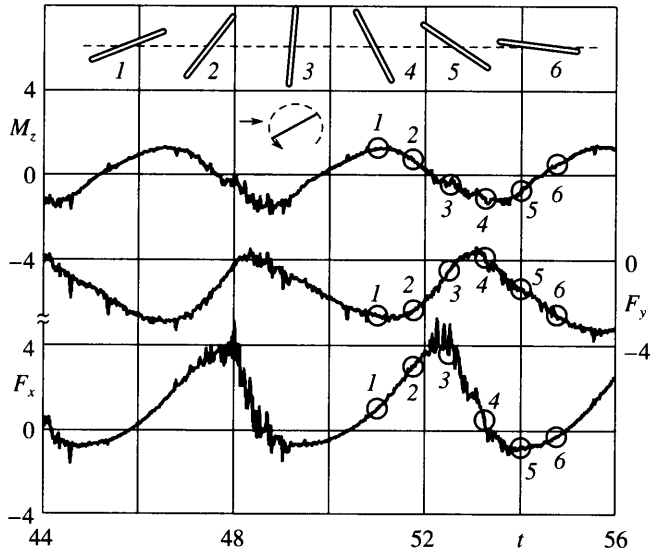


Фиг. 2. Влияние числа Рейнольдса на угловую скорость пластины при $l = 20$, $\alpha_0 = 10^\circ$, $Re = 10, 25, 40, 100, 10^3$ (кривые 1–5)

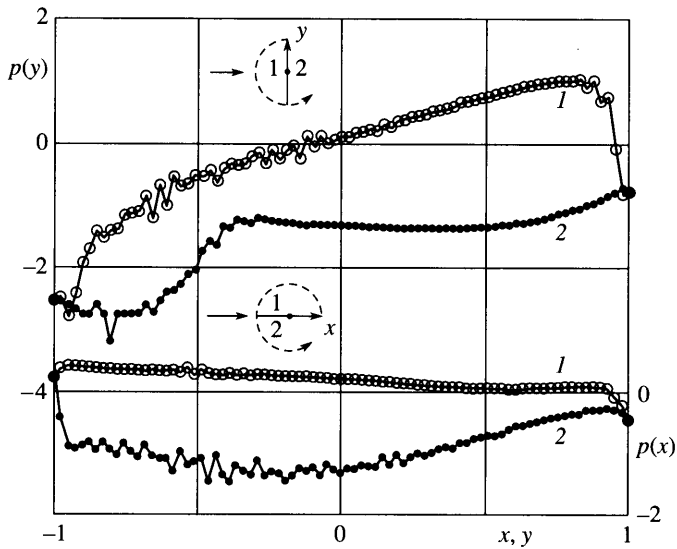


Фиг. 3. Квазиустановившийся режим авторотации, $l = 10, 20$ (1, 2), эксперимент [1] (3)

званный в [2] “вихревым спутником”, был визуализирован в физических экспериментах [3], а также воспроизведен численно в [9] для случая самовращения в потоке оперенных цилиндров (вертушек). Аналогичный отрицательный вихрь около кромки, которая движется навстречу потоку, быстро отрывается от нее и сносится вниз по течению (фиг. 1, б), поэтому остановить вращение ему не удастся. На фиг. 4 различные фазы поворота пластины (1–6) сопоставлены с соответствующими значениями азимутального момента M_z и аэродинамической силы $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$. Обращает на себя внимание наличие значительного положительного (раскручивающего) момента при малых углах атаки (положения 1, б на фиг. 4). Наибольший момент возникает в фазе 1, что вызвано образованием мощного концевых вихря. Сила сопротивления F_x колеблется около не-



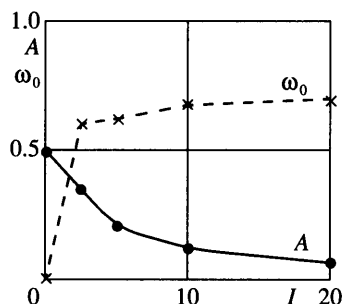
Фиг. 4. Мгновенные значения аэродинамических нагрузок в различных фазах поворота пластины на режиме квазиустановившегося самовращения при $I = 20$, $Re = 1000$



Фиг. 5. Распределения давления по поверхности самовращающейся пластины при $I = 20$, $Re = 1000$

которой положительной величины, но может принимать отрицательные значения – тянущая сила в фазах 5–6 (фиг. 4). Подъемная сила F_y колеблется около некоторой отрицательной величины, небольшие участки положительных значений наблюдаются между фазами 3–4.

Распределения давления по поверхности вращающейся пластины поясняют, почему при нулевом угле атаки имеется положительный раскручивающий момент. На фиг. 5 представлены мгновенные распределения в моменты, когда пластина параллельна или перпендикулярна набегающему потоку (в невозмущенном потоке принято $p = 0$).



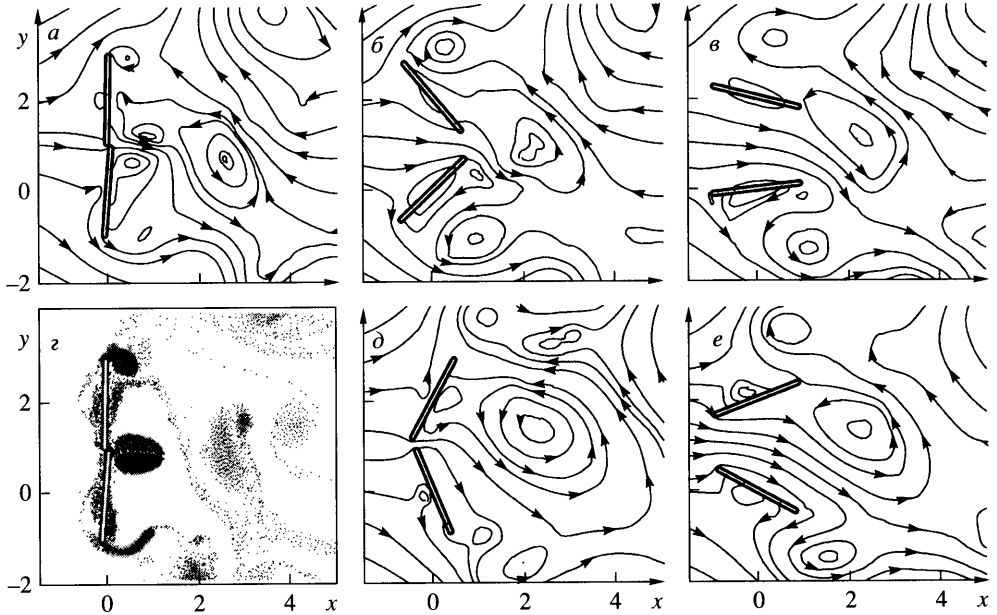
Фиг. 6. Влияние момента инерции на среднее значение ω_0 и амплитуду колебаний A угловой скорости авторотации при $Re = 1000$

Наряду с первичными кромочными вихрями (фиг. 1, б) существенную роль в развитии нестационарной вихревой картины играет вторичный вихрь, образующийся за счет вязкого отрыва с гладкой поверхности на подветренной стороне пластины между кромочными вихрями. Развитие этого вихря приводит к формированию зоны повышения давления над передней частью пластины в фазе ее горизонтального расположения (фиг. 5), в то время как снизу давление понижается за счет безотрывного обтекания. В результате при $\alpha = 0$ формируется положительный момент, заставляющий пластину продолжить вращение.

В фазе поперечного положения пластины наблюдается отрицательный (тормозящий) момент (фиг. 4, фаза 3). С наветренной стороны давление меняет знак таким образом, чтобы производить максимальное торможение (фиг. 5), а с подветренной стороны давление всюду отрицательное, так что даже значительное понижение давления в кромочном вихре в окрестности нижней кромки не может создать компенсирующий раскручивающий момент. Тем не менее именно этот кромочный вихрь уменьшает торможение вращения при поперечном положении пластины и тем самым позволяет пройти эту неблагоприятную фазу при самовращении.

Существование фазы тормозящего аэродинамического момента приводит к тому, что зависимость угловой скорости вращения пластины от времени носит колебательный характер (фиг. 2) и указывает на важную роль инерционности пластины. Кинетическая энергия, приобретенная пластиной за счет работы аэродинамических сил в фазе разгона пластины, расходуется затем для преодоления фазы тормозящего момента M_z (фиг. 4). С ростом момента инерции пластины I амплитуда A колебаний угловой скорости $\omega(t)$ около среднего значения ω_0 существенно уменьшается (фиг. 6), происходит регуляризация режима самовращения. Уменьшение I приводит к слабому убыванию скорости самовращения ω_0 (фиг. 6). Однако в предельном случае $I = 0$ (и по непрерывности в некотором диапазоне малых I) пластина не может выйти на режим авторотации, вместо этого наблюдается хаотический режим незатухающих колебаний, поддержание которых обусловлено сходом крупных вихрей. Таким образом, роль инерционности пластины состоит в обеспечении возможности преодолевать фазу тормозящего момента аэродинамических сил за счет кинетической энергии, накопленной в течение фазы действия подгоняющего момента.

4. О самовращении пластин в тандеме. Аналогичными методами была исследована задача о поведении пары пластин в потоке вязкой жидкости при их различном расположении относительно направления потока. Рассмотрим результаты для случая параллельного тандема (фиг. 7), когда рядом с рассмотренной выше пластиной находится такая же вторая пластина с центром вращения в точке $(0, 2)$ на оси y , перпендикулярной



Фиг. 7. Авторотация пластин в тандеме $Re_1 = Re_2 = 1000$, $I_1 = I_2 = 20$; $t = 16.5$ (a, z), 17.5 (б), 18.5 (в), 19.5 (д), 20.5 (e)

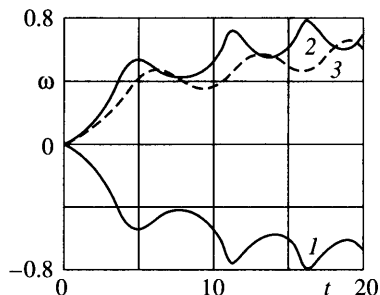
набегающему потоку. При углах атаки $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ эти пластины образуют разрезную полосу шириной 4 единицы (фиг. 7).

В зависимости от знака начальных углов $|\alpha_{01}| = |\alpha_{02}|$ возможны различные типы движения. Если $\alpha_{01}\alpha_{02} > 0$ пластины вращаются в одну и ту же сторону, в противном случае – в разные, причем, если $\alpha_{01} > 0$, $\alpha_{02} < 0$, то центр составной полосы движется навстречу потоку, а при $\alpha_{01} < 0$, $\alpha_{02} > 0$ – по потоку (как на фиг. 7). В последнем случае оказывается, что угловая скорость квазиустановившегося самовращения пластин в тандеме больше по абсолютной величине, чем в случае одиночной пластины. Остановимся на этом режиме подробнее.

На фиг. 7 показаны картины мгновенных линий тока в последовательные моменты времени на полупериоде квазиустановившегося режима самовращения пластин в параллельном тандеме. Анализ соответствующих вихревых картин (одна из них дана на фиг. 7, z) показывает, что при сближении нижней кромки верхней пластины и верхней кромки нижней пластины происходит сближение интенсивных кромочных вихрей, раскручивающих пластины. Это приводит к взаимному усилению их “раскручивающих” свойств, так как площадь области разрежения на подветренной стороне сближившихся частей пластин возрастает. В результате происходит увеличение средней угловой скорости квазиустановившегося вращения каждой из пластин в тандеме примерно на 16% по сравнению со случаем одиночной пластины (фиг. 8).

Этот эффект нашел подтверждение в эксперименте, проведенном в НИИ механики МГУ и, вероятно, может быть использован на практике, например, в некоторых типах ветроэнергетических установок.

Заключение. Развита методика решения плоских сопряженных задач динамики и аэрогидродинамики на основе бессеточного численного метода вязких вихревых доменов. Исследовано явление авторотации пластин в потоке вязкой жидкости. Выявлены вихревые механизмы, влияющие на режим самовращения. Существенную роль в разви-



Фиг. 8. Режимы раскрутки одиночной и пары пластин: 1 – нижняя, 2 – верхняя пластины в тандеме $\alpha_{01} = -\alpha_{02} = -10^\circ$ (фиг. 7), 3 – одиночная пластина, $\alpha = 10^\circ$, $I = 20$, $Re = 1000$

тии нестационарной картины обтекания и нестационарных аэродинамических нагрузок играют кромочные и вторичные вихри, образующиеся в результате вязкого отрыва с гладкой поверхности на подветренной стороне пластины. Вращение поддерживается за счет мощного кромочного вихря, который локализуется около кромки пластины, движущейся по потоку. Имеются фазы разгоняющего и тормозящего аэродинамических моментов.

С уменьшением числа Рейнольдса вторичные вихри оказывают возрастающее диссипативное воздействие, приводящее к уменьшению угловой скорости самовращения. При малых числах Рейнольдса режим авторотации невозможен: из любого начального положения пластина выходит на режим затухающих колебаний около равновесного положения, при котором ее плоскость перпендикулярна набегающему потоку.

Инерционность пластины позволяет преодолевать ей фазу тормозящего момента аэродинамической силы. В предельном случае нулевого момента инерции самовращение невозможно. Реализуются режимы затухающих или незатухающих колебаний около равновесного положения пластины поперек потока.

При совместном обтекании рядом расположенных пластин в параллельном тандеме взаимодействие кромочных вихрей, порожденных соседними пластинами, приводит к увеличению угловой скорости вращения каждой из них по сравнению со случаем одиночной пластины.

Разработанный программный комплекс может применяться в инженерных приложениях при расчете ветряков вертикально-роторного типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00554, № 06-08-01217), а также программы НШ-8597.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси (статья первая и статья вторая) // Полн. собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 4. С. 41–68.
2. Андронов П.Р., Баранников С.Н., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Исванд Х., Мосин А.Ф. Вопросы аэродинамики флюгеров, маятников, вертушек // Тез. докл. 11-й школы-семинара “Современные проблемы аэрогидродинамики”. М.: Изд-во МГУ. 2003. С. 12.
3. Баранников С.Н. Экспериментальная идентификация нестационарных вихревых структур при обтекании авторотирующего оперенного цилиндра // Тр. Конф.-конкурса молодых ученых / Под ред. Г.Г. Черного и В.А. Самсонова. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 20–27.
4. Сарпкаяя Т. Вычислительные методы вихрей // Современное машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.

5. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995. 367 с.
6. Barba L.A., Leonard A., Allen C.B. Advances in viscous vortex methods – meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 47. № 5. P. 387–421.
7. Исванд Х. Моделирование вихревого слоя конечной толщины методом дискретных вихрей // Аэромеханика и газовая динамика. 2003. № 1. С. 51–56.
8. Андронов П.Р., Герценштейн С.Я., Дынникова Г.Я., Исванд Х. О влиянии толщины трехмерного вихревого слоя на его устойчивость // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. “Мат. моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”. 2003. № 590. Вып. 1. С. 3–8.
9. Андронов П.Р. Численная идентификация нестационарных вихревых структур при обтекании авторотирующего оперенного цилиндра // Тр. Конф.-конкурса молодых ученых / Под ред. Г.Г. Черного и В.А. Самсонова. М.: Изд-во МГУ. 2004. С. 12–19.
10. Апаринов В.А., Ништ М.И., Стрелков Г.Н. Математическое моделирование падения в жидкости пластины бесконечного размаха // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 179–184.
11. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt 4. P. 785–796.
12. Shankar S., van Dommelen L. A new diffusion procedure for vortex methods // J. Comput. Phys. 1996. V. 127. № 1. P. 88–109.
13. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model – the diffusion velocity method // Computers and Fluids. 1991. V. 19. № 3/4. P. 433–441.
14. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 11–19.
15. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 42–46.
16. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я., Андронов П.Р., Баранников С.Н., Гирча А.И., Григоренко Д.А., Зубков А.Ф. Моделирование нестационарных нагрузок при движении тел в вязкой жидкости // Отчет Ин-та механики МГУ. 2005. № 4775. 93 с.
17. Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 3–14.
18. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
19. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М.: Наука, 1965. 426 с.
20. Григоренко Д.А. Вопросы программной реализации лагранжевых вихревых методов // 17-я Междунар. интернет-конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2005). Избр. тр. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2006. С. 121–124.