

УДК 532.5.013.4:536.25

© 2007 г. Т. П. ЛЮБИМОВА, Я. Н. ПАРШАКОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА И ЗАДАНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ НА ВНЕШНИХ ГРАНИЦАХ

Исследована устойчивость механического равновесия системы двух горизонтальных слоев не смешивающихся жидкостей с близкими плотностями. Задача решена для случая заданного теплового потока на внешних границах. В рамках обобщенного приближения Буссинеска, корректно учитывающего деформации границы раздела, рассмотрено возникновение конвекции при нагреве сверху или снизу. Обнаружены две моды длинноволновой неустойчивости, обусловленные наличием деформируемой границы раздела и заданного теплового потока на внешних границах. Изучено поведение системы по отношению к монотонным и колебательным возмущениям с конечной длиной волны. Построена полная карта устойчивости.

Ключевые слова: двухслойная система, конвекция, обобщенное приближение Буссинеска, деформация границы раздела, карта устойчивости.

Стандартное приближение Буссинеска основано на предположении о том, что можно ограничиться учетом неоднородности плотности в слагаемом с подъемной силой в уравнении движения. Это означает, что рассматривается предел, в котором параметр Буссинеска $\beta\theta$ стремится к нулю, число Галилея $Ga = gh^3/(v\chi)$ стремится к бесконечности, а все прочие параметры подобия, включая число Релея Ra , являющееся произведением параметра Буссинеска на число Галилея, остаются конечными [1] (здесь v , χ , β – кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент объемного расширения жидкости, g – ускорение силы тяжести, h – характерный размер, θ – характерная разность температур). В случае двухслойной системы не смешивающихся жидкостей, как показывает анализ граничных условий на поверхности раздела, в этом пределе получают граничные условия, соответствующие непроницаемой недеформируемой границе. Таким образом, в рамках приближения Буссинеска свободная конвекция должна изучаться для заданной формы поверхности раздела, определяемой неконвективными факторами. Однако для некоторых ситуаций приближение недеформируемой поверхности раздела недостаточно. Например, если разность плотностей того же порядка величины, что и неоднородности плотности, вызванные неизотермичностью, то при конечных числах Релея сила тяжести неспособна сохранить поверхность раздела плоской. В этом случае деформации поверхности раздела могут быть немалыми и должны быть корректно учтены. Корректное обобщенное приближение Буссинеска для случая, когда и неоднородности плотности, и параметр Буссинеска малы, сформулировано в [2, 3].

Исследование линейной устойчивости механического равновесия подогреваемой снизу двухслойной системы с недеформируемой поверхностью раздела и идеально теплопроводными внешними границами проведено в [4]. Показано, что при определенных условиях механическое равновесие системы при подогреве снизу оказывается неустойчивым относительно колебательных возмущений с конечной длиной волны. В работе [2] эта задача впервые исследована с учетом деформируемости поверхности раздела на основе обобщенного приближения Буссинеска для жидкостей с близкими плотностями. При этом считалось, что толщины слоев и все параметры жидкостей, за исключением плотностей, одинаковы. Найдены монотонная и колебательная моды неустойчиво-

сти с конечной длиной волны. Позднее та же задача решена в [3] для жидкостей с разными свойствами. Обнаружена монотонная длинноволновая мода неустойчивости, связанная с деформируемостью поверхности раздела (в частном случае, рассмотренном в [2], эта мода отсутствует). Показано, что в широком диапазоне параметров длинноволновые возмущения наиболее опасны.

Таким образом, в двухслойных системах горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с идеально теплопроводными внешними границами возможна длинноволновая монотонная неустойчивость, связанная с деформируемостью поверхности раздела.

В случае одиночного горизонтального слоя жидкости с заданным тепловым потоком на внешних границах, при подогреве снизу возможна монотонная длинноволновая неустойчивость равновесия. В работе [5] исследована устойчивость механического равновесия двухслойной системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с заданным тепловым потоком на внешних границах и недеформируемой границей раздела. Показано, что если отношение толщин слоев жидкостей близко к нулю или единице, т.е. система близка к одиночному слою с заданным тепловым потоком на внешних границах, то возможна длинноволновая монотонная неустойчивость. Обнаружено также наличие области длинноволновой монотонной неустойчивости при промежуточных значениях отношения толщин слоев, близких к 0.5. Можно ожидать, что в случае двухслойной системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с заданным тепловым потоком на внешних границах и деформируемой поверхностью раздела будут существовать две моды длинноволновой неустойчивости. Исследованию этой задачи посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой поверхностью раздела. Слои ограничены твердыми поверхностями $z = \pm h$, на которых задан постоянный вертикальный тепловой поток. Выберем систему координат так, что ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y – в плоскости невозмущенной поверхности раздела жидкостей.

Будем рассматривать случай жидкостей с близкими плотностями. В этом случае можно корректно учесть деформации поверхности раздела, решая задачу в рамках обобщенного приближения Буссинеска [3], в котором одновременно с предельным переходом $Ga \rightarrow \infty$ устремляется к нулю не только относительная температурная неоднородность плотности $\beta_*\theta$, но и относительная разность плотностей жидкостей $\delta = (\rho_{02} - \rho_{01})/(\rho_{02} + \rho_{01})$. Здесь β_* – характерное значение коэффициента объемного расширения $\beta = -(1/\rho)\partial\rho/\partial T$, θ – характерная разность температур, ρ_{01} , ρ_{02} – плотности жидкостей при температуре поверхности раздела в равновесии.

Система уравнений и граничных условий, описывающих свободную тепловую конвекцию в двухслойной системе жидкостей, записывается в рамках обобщенного приближения Буссинеска в виде

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j \right) = -\nabla p_j + \mathbf{v}_j \Delta \mathbf{v}_j + Ra \beta_j T_j \gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla) T_j = \chi_j \Delta T_j, \quad \text{div} \mathbf{v}_j = 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} z = \pm 1: \mathbf{v}_j &= 0, \quad \frac{\partial T_j}{\partial z} = -A_j \\ z = \zeta: [\mathbf{v}] &= 0, \quad [T] = 0, \quad [\kappa \nabla T] \mathbf{n} = 0 \\ (Ga \zeta - [p]) \mathbf{n} + [\sigma \mathbf{n}] &= -\mathbf{n} Ca \text{div} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \zeta = v_z$$

Здесь $j = 1, 2$, индексом 1 отмечаются величины, относящиеся к нижней жидкости, индексом 2 – к верхней; $[f] = f_1 - f_2$ – скачок величины f на поверхности раздела; γ – единичный вектор, направленный вдоль оси z ; \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности раздела сред, направленный в сторону второй среды; σ – тензор вязких напряжений.

Система уравнений и граничных условий (1.1)–(1.3) записана в безразмерном виде; в качестве единиц времени, расстояния, скорости, температуры и давления использованы h^2/χ_* , h , χ_*/h , A_*h , $\rho v_*\chi_*/h^2$ соответственно. Здесь v_* , κ_* , β_* , χ_* , A_* – средние арифметические значения коэффициентов вязкости, теплопроводности, теплового расширения, температуропроводности и равновесных градиентов температуры, принятые в качестве единиц измерения

$$v_* = \frac{v_{1*} + v_{2*}}{2}, \quad \kappa_* = \frac{\kappa_{1*} + \kappa_{2*}}{2}, \quad \beta_* = \frac{\beta_{1*} + \beta_{2*}}{2}, \quad \chi_* = \frac{\chi_{1*} + \chi_{2*}}{2}, \quad A_* = \frac{A_{1*} + A_{2*}}{2}$$

При таком выборе единиц измерения для безразмерных коэффициентов вязкости, теплопроводности, теплового расширения и температуропроводности выполняются соотношения

$$v_1 + v_2 = 2, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = 2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 2, \quad \chi_1 + \chi_2 = 2$$

Кроме параметров, характеризующих свойства жидкостей, краевая задача (1.1)–(1.3) содержит следующие безразмерные параметры: число Прандтля Pr , число Релея Ra , параметр капиллярности Ca , число Галилея Ga

$$Pr = \frac{v_*}{\chi_*}, \quad Ra = \frac{g\beta_*A_*h^4}{v_*\chi_*}, \quad Ca = \frac{\alpha h}{v_*\chi_*\rho_{0*}}, \quad Ga = \frac{(\rho_{02} - \rho_{01})gh^3}{\eta_*\chi_*}$$

Здесь η_* – среднее значение динамической вязкости, ρ_{0*} – среднее значение плотности при температуре поверхности раздела в равновесии, α – коэффициент поверхностного натяжения. Положительные числа Галилея соответствуют потенциально неустойчивой стратификации (внизу более легкая жидкость), а отрицательные – устойчивой; положительные числа Релея соответствуют подогреву снизу, а отрицательные – нагреву сверху.

Из полного набора восьми независимых безразмерных параметров пять характеризуют свойства жидкостей. Если параметры жидкостей фиксированы, остаются три независимых параметра: Ra , Ga , Ca .

Сформулированные выше уравнения и граничные условия допускают стационарное решение, соответствующее механическому равновесию жидкостей с плоской горизонтальной границей раздела $\zeta = 0$, при этом распределения температуры в слоях имеют вид

$$T_1 = -zA_1, \quad T_2 = -zA_2, \quad A_1 = \kappa_2, \quad A_2 = \kappa_1$$

а скорость $\mathbf{v}_j = 0$.

Запишем задачу об устойчивости механического равновесия относительно малых возмущений. Линеаризуя полную задачу, получим для малых возмущений скорости, температуры и давления в каждой из жидкостей следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = -\nabla p_j + \mathbf{v}_j \Delta \mathbf{v}_j + Ra \beta_j T_j \gamma$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \chi_j \Delta T_j + A_j \mathbf{v}_j \gamma, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$
(1.4)

$$\begin{aligned}
z = \pm 1: v_j &= 0, \quad \frac{\partial T_j}{\partial z} = 0 \\
z = 0: v_1 &= v_2, \quad -A_1 \zeta + T_1 = -A_2 \zeta + T_2 \\
\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}, \quad v_1 \tau \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \nabla v_{1z} \right) = v_2 \tau \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \nabla v_{2z} \right) \\
-(p_1 - p_2) - Ga \zeta + 2 \left(v_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - v_2 \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} \right) &= -Ca \Delta \zeta \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= v \gamma
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь τ – единичный вектор, касательный к поверхности раздела.

Рассмотрим нормальные возмущения, пропорциональные $\exp(\lambda t + i \mathbf{k} \mathbf{r})$, где λ – инкремент, \mathbf{k} – волновой вектор. Для амплитуд нормальных возмущений получим спектральную краевую задачу

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{Pr} u_j &= -ik q_j + v_j D u_j, \quad D = \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \\
\frac{\lambda}{Pr} w_j &= -q'_j + v_j D w_j + Ra \beta_j \theta_j \\
\lambda \theta_j &= \chi_j D \theta_j + A_j w_j, \quad w'_j + i k u_j = 0 \\
z = \pm 1: u_j &= w_j = 0, \quad \theta'_j = 0 \\
z = 0: u_1 &= u_2, \quad w_1 = w_2 = \lambda \zeta \\
\theta_1 - A_1 \zeta &= \theta_2 - A_2 \zeta, \quad \kappa_1 \theta'_1 = \kappa_2 \theta'_2 \\
v_1 (u'_1 + i k w_1) &= v_2 (u'_2 + i k w_2) \\
-(q_1 - q_2) - Ga \zeta + 2(v_1 w'_1 - v_2 w'_2) &= -Ca k^2 \zeta
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь введены следующие обозначения для амплитуд нормальных возмущений: u – проекции скорости на направление волнового вектора, w – вертикальной компоненты скорости, θ – температуры, q – давления. Штрихом обозначено дифференцирование по координате z . Собственным числом спектральной задачи (1.6)–(1.7) является инкремент λ как функция параметров задачи и волнового числа k .

2. Длинноволновая неустойчивость равновесия. Задача (1.6)–(1.7) не позволяет получить аналитическое решение при произвольном наборе параметров. Однако в случае длинноволновых возмущений возможно достаточно полное аналитическое исследование. При $k = 0$ задача (1.6), (1.7) допускает двухпараметрическое семейство решений, соответствующих нейтральным возмущениям

$$\begin{aligned}
u_{0j} &= w_{0j} = 0, \quad \zeta_0 = C_1 \\
\theta_{01} &= C_2 + 1/2(A_1 - A_2)C_1, \quad \theta_{02} = C_2 - 1/2(A_1 - A_2)C_1
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Возмущения с $C_1 = 0$ соответствуют инвариантности задачи относительно сдвига температуры. Такая мода нейтральных возмущений типична для задач с фиксированным тепловым потоком на границах. Возмущения с $C_2 = 0$ соответствуют сдвигу границы раздела как целого. Таким образом, при $k = 0$ имеется двукратно вырожденный уровень

с $\lambda = 0$. При $k \neq 0$ этот уровень должен либо расщепиться на два вещественных уровня, либо породить пару комплексно-сопряженных уровней. При этом вещественная часть инкремента может стать как положительной, так и отрицательной, т.е. в зависимости от параметров задачи будет наблюдаться длинноволновая неустойчивость или же длинноволновые возмущения будут затухать. Для выяснения вопроса о том, какой случай реализуется в действительности, можно искать решение спектральной задачи и инкремент в виде рядов по степеням волнового числа. Вычисления показывают, что в разложении инкремента $\lambda = \lambda_1 k + \lambda_2 k^2 + \dots$, λ_1 тождественно обращается в нуль, а для λ_2 получается квадратное уравнение

$$\lambda_2^2 + B\lambda_2 + C = 0 \quad (2.2)$$

коэффициенты которого являются громоздкими функциями параметров задачи и их явный вид здесь не приводится.

Коэффициенты B и C не зависят от числа Прандтля и параметра капиллярности, но содержат Ra , Ga , отношения вязкостей, теплопроводностей и коэффициентов объемного расширения. В отличие от случая идеально теплопроводных границ слоя [3], длинноволновая неустойчивость зависит также от отношения температуропроводностей. Главное же отличие от [3] состоит в том, что уравнение для λ_2 получается квадратным, а не линейным, что отражает факт наличия двух взаимодействующих длинноволновых мод неустойчивости.

Рассмотрим сначала простейший частный случай, когда все свойства жидкостей, за исключением плотностей, совпадают. Уравнение (2.2) в этом случае принимает простой вид:

$$\lambda_2^2 - \left(\frac{1}{45} Ra + \frac{1}{24} Ga - 1 \right) \lambda_2 + \frac{1}{17280} Ga(Ra - 720) = 0 \quad (2.3)$$

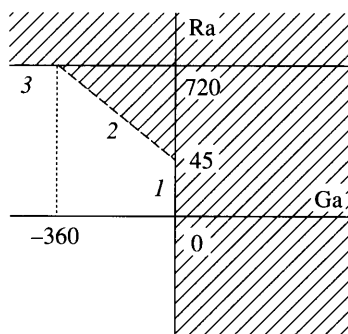
Диаграмма устойчивости на плоскости Ra – Ga для этого случая изображена на фиг. 1. Область параметров, в которой все возмущения затухают, ограничена тремя прямыми: прямые 1 ($Ra = 720$) и 3 ($Ga = 0$) являются границами устойчивости по отношению к монотонным длинноволновым возмущениям, прямая 2 ($Ra = -15Ga/8 + 45$) – к колебательным длинноволновым возмущениям с частотой $\omega = (1/96) \sqrt{-Ga(Ga + 360)}$.

При $Ga = 0$ критическое число Релея равно 45, что совпадает с порогом устойчивости равновесия горизонтального слоя однородной жидкости. Это естественно, поскольку в этом случае фактически имеем дело с одной жидкостью, заполняющей весь слой. Напомним, что поверхностное натяжение не оказывает влияния на длинноволновые возмущения. Критические движения представляют собой конвективные валы, охватывающие всю систему, так что поверхность раздела вовлекается в это движение.

При числах Галилея, больших нуля, верхняя жидкость тяжелее, чем нижняя, в результате при всех числах Релея развивается неустойчивость Релея–Тейлора.

При $Ga < 0$ верхняя жидкость легче, чем нижняя, что оказывает стабилизирующее действие на устойчивость равновесия, при этом взаимодействие двух мод возмущений (тепловых и деформационных) приводит к появлению волн на поверхности раздела и, следовательно, к колебательному характеру неустойчивости.

При больших по модулю отрицательных значениях числа Галилея ($Ga < -360$) за неустойчивость становится ответственной еще одна монотонная мода. Эта мода неустойчивости характеризуется двухъярусной структурой критических движений, причем поверхность раздела не деформируется и на ней обращаются в нуль обе компоненты скорости и производные по вертикали от возмущений температуры, так что в каждой половине слоя независимо развивается длинноволновая конвекция с критическим числом Релея, таким же, как в слое однородной жидкости с твердыми границами в условиях фиксированного теплового потока. С учетом изменения масштабов это означает, что



Фиг. 1. Границы длинноволновой неустойчивости равновесия для двухслойной системы жидкостей, у которых все свойства, за исключением плотности, одинаковы при $Ca = 0$

критическое число Релея должно быть в 16 раз больше, чем при $Ga = 0$, что действительно и наблюдается. В этой ситуации давление непрерывно, а завихренности течения в верхнем и нижнем слоях имеют одинаковые знаки, т.е. горизонтальные компоненты скорости в разных слоях вблизи поверхности раздела направлены в разные стороны.

Для суждения о том, являются ли длинноволновые возмущения наиболее опасными, нужно найти следующий член разложения инкремента, а именно λ_4 . Вычисления показывают, что для монотонной неустойчивости (кривые 1 и 3) длинноволновые возмущения с $k \neq 0$ менее опасны, чем возмущения с $k = 0$. Для колебательной неустойчивости ситуация более сложная. Здесь характер неустойчивости зависит от Pr , Ca , Ga , а именно возмущения с $k = 0$ более опасны, чем длинноволновые возмущения с $k \neq 0$, если $Ra_2 > 0$, где Ra_2 дается выражением

$$Ra_2 = \left(\frac{5}{22528} + \frac{13}{21504Pr} \right) Ga^2 + \left(\frac{1847}{19712} + \frac{155}{896Pr} \right) Ga + \frac{15}{8} Ca + \frac{510}{77} \quad (2.4)$$

Величина Ra_2 имеет смысл коэффициента при k^2 в разложении критического числа Релея по k . Анализ формулы показывает, что при достаточно больших капиллярностях

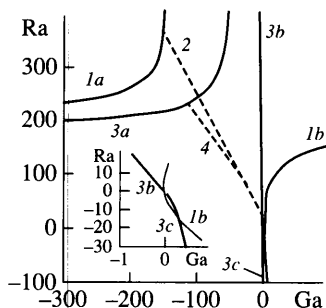
$$Ca > Ca_* = \frac{102419Pr^2 + 579380Pr + 1057100}{560Pr(105Pr + 286)}$$

значение Ra_2 положительно во всем диапазоне существования длинноволновой колебательной неустойчивости. При $Ca < Ca_*$ значение Ra_2 положительно вблизи концов интервала существования длинноволновой колебательной неустойчивости и отрицательно в центральной части этого интервала.

Проанализируем теперь другой частный случай: систему жидкостей муравьиная кислота – трансформаторное масло. Линейная устойчивость такой двухслойной системы в случае идеально теплопроводных внешних границ изучалась в [4] в предположении недеформируемости границы раздела и в [3] с учетом деформаций границы раздела. Параметры этой системы таковы [4]:

$$[\kappa] = -0.838, \quad [\chi] = -0.334, \quad [v] = 1.756, \quad [\beta] = -0.393, \quad Pr = 176$$

Результаты расчетов для этой системы приведены на фиг. 2–7; сплошными кривыми на всех рисунках изображены границы монотонной неустойчивости, штриховыми – границы колебательной неустойчивости.



Фиг. 2. Границы устойчивости равновесия и фрагмент карты устойчивости в области малых Ra и Ga для двухслойной системы муравьиная кислота – трансформаторное масло при $Ca = 0$

Граница монотонной длинноволновой неустойчивости ($\lambda_2 = 0$) определяется равенством нулю коэффициента C и для значений параметров, соответствующих системе муравьиная кислота – трансформаторное масло имеет вид:

$$Ga = \frac{Ra(Ra - 8.8255)}{1013.42 - 5.1323Ra}$$

Эта граница на плоскости число Галилея – число Релея состоит из двух ветвей, которым на фиг. 2 соответствуют кривые $1a$ и $1b$; области неустойчивости располагаются слева от кривой $1a$ и справа от кривой $1b$.

Граница колебательной неустойчивости ($\lambda_2 = i\omega \neq 0$) определяется равенством нулю коэффициента B при дополнительном условии $C > 0$. Для указанных значений параметров коэффициент B обращается в нуль при

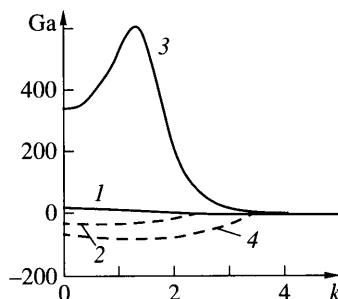
$$Ga = -0.443Ra + 10.582 \quad (2.5)$$

Таким образом, граница колебательной неустойчивости равновесия представляет собой прямую линию на плоскости параметров Ga – Ra (кривая 2 на фиг. 2). Она соединяет две ветви границы монотонной неустойчивости.

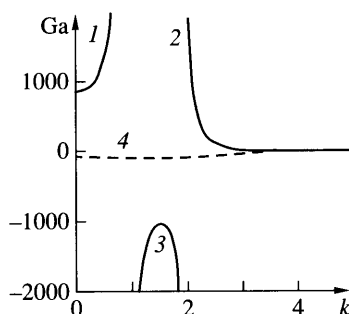
Вычисление поправки к инкременту четвертого порядка малости λ_4 показывает, что в случае параметра капиллярности, равного нулю, длинноволновые монотонные возмущения могут быть более опасны, чем возмущения с $k \neq 0$, при $Ra \in (-68, 0) \cup (23, 155) \cup (366, 430)$, а длинноволновые колебательные возмущения с $k \neq 0$ могут быть опаснее возмущений с конечными волновыми числами при значениях $Ra \in (1, 65)$.

Таким образом, как и в случае рассмотренной выше двухслойной системы жидкостей, у которых все свойства, за исключением плотности, одинаковы (система I), имеются две ветви монотонной неустойчивости (кривые $1a$ и $1b$ на фиг. 2). Левее кривой $1a$ нарастают возмущения двухъярусной структуры с одинаковым преимущественным знаком завихренности в обоих слоях, однако в отличие от системы I поверхность раздела теперь деформируется, граничные условия на ней не совпадают с граничными условиями на твердой границе, в результате в одном из слоев (в каком именно зависит от числа Галилея) вблизи поверхности раздела образуется узкая область с завихренностью другого знака.

Правее кривой $1b$ развивается неустойчивость, при которой критические движения имеют двухъярусную структуру, причем знаки завихренности в разных слоях имеют разные знаки.



Фиг. 3. Нейтральные кривые $Ga(k)$ при $Ca = 0$: 1, 2 – $Ra = 100$; 3, 4 – $Ra = 180$. Области неустойчивости расположены выше кривых 1–4



Фиг. 4. Нейтральные кривые $Ga(k)$ при $Ca = 0$, $Ra = 190$. Области неустойчивости расположены выше 1, 2, 4 и ниже кривой 3

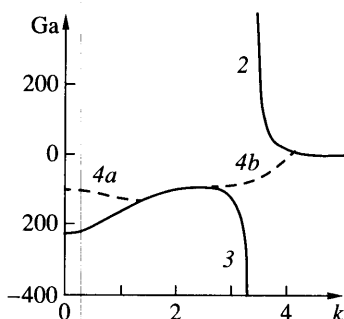
Структура критических движений, соответствующих нейтральной кривой 2, определяющей порог колебательной неустойчивости, непрерывно меняется с изменением числа Галилея от двухъярусной вблизи кривой 1а к сквозному течению при числах Галилея, близких к нулю.

3. Неустойчивость относительно возмущений с конечной длиной волны. Исследование неустойчивости по отношению к возмущениям с конечными волновыми числами требует численных расчетов. Для решения краевой задачи (1.6)–(1.7) при $Ra < 0$ (нагрев сверху) был использован метод дифференциальной прогонки, при $Ra > 0$ применялся метод построения фундаментальной системы решений.

Нейтральные кривые $Ga(k)$, полученные при нулевом значении параметра капиллярности и различных значениях числа Релея, представлены на фиг. 3–5. Как показывают вычисления, при $Ra < 168$ минимум нейтральной кривой монотонной неустойчивости находится в области конечных волновых чисел, при $k = 0$ нейтральная кривая имеет максимум (кривые 1, 2 на фиг. 3). При увеличении числа Релея локальный максимум при $k = 0$ сменяется минимумом, но длинноволновые монотонные возмущения остаются менее опасными, чем возмущения с конечной длиной волны (кривые 3, 4 на фиг. 3).

Неустойчивость относительно колебательных возмущений появляется при значении числа Релея, примерно равном 23, при этом при $Ra \leq 76$ наиболее опасной является длинноволновая мода колебательной неустойчивости. При $Ra \approx 76$ более опасными становятся колебательные возмущения с $k \neq 0$.

При $Ra \approx 186$ вид нейтральной кривой монотонной неустойчивости качественно меняется: она разделяется на 3 ветви (фиг. 4, кривые 1–3), так, что в области больших по



Фиг. 5. Нейтральные кривые $Ga(k)$ при $Ca = 0$, $Ra = 250$. Области неустойчивости расположены выше кривых 1, 4a, 4b и ниже кривой 3

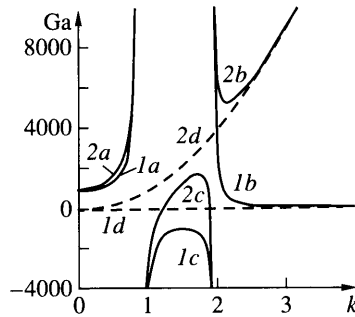
модулю отрицательных значений числа Галилея появляется область неустойчивости. Нейтральная кривая колебательных возмущений начинается в области длинных волн и заканчивается на ветви монотонных возмущений с конечной длиной волны (фиг. 4, кривая 4). Таким образом, равновесие оказывается устойчивым лишь в некотором интервале значений числа Галилея, ограниченном с одной стороны границей колебательной неустойчивости, а с другой – границей монотонной неустойчивости с $k \neq 0$.

При дальнейшем увеличении числа Релея длинноволновая монотонная мода неустойчивости вытесняется в область больших чисел Галилея и при достижении числа Релея, примерно равного 198, исчезает. Интервал устойчивости с увеличением числа Релея сужается: максимум нейтральной кривой монотонных возмущений сдвигается в область больших значений Ga , нейтральная кривая колебательных возмущений сдвигается вниз относительно оси Ga .

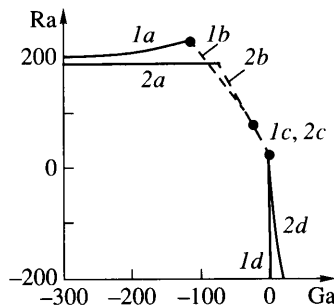
При $Ra \approx 235$ нейтральная кривая колебательных возмущений касается нейтральной кривой монотонных возмущений и интервал устойчивости исчезает, равновесие оказывается неустойчивым при всех значениях Ga . При больших числах Релея нейтральная кривая колебательной неустойчивости состоит из двух компонент (фиг. 5, кривые 4a и 4b).

Границы устойчивости равновесия относительно возмущений различного типа для параметра капиллярности Ca , равного нулю, изображены на фиг. 2. Как видно из рисунка, при больших по модулю отрицательных значениях числа Галилея наиболее опасны монотонные возмущения с $k \neq 0$ (кривая 3a). При $Ga \rightarrow -\infty$ кривая 3a выходит на горизонтальную асимптоту $Ra \approx 186$. При $Ga \approx -115$ наиболее опасной становится колебательная неустойчивость с конечной длиной волны (кривая 4), которая, в свою очередь, сменяется длинноволновой колебательной неустойчивостью (кривая 2) при $Ga \approx -24$. При $Ga \approx -0.9$ наиболее опасными снова становятся монотонные возмущения: в узком интервале значений числа Галилея от -0.9 до 0 наиболее опасными являются монотонные возмущения с $k \neq 0$ (кривая 3b), в интервале Ga от 0 до 0.3 – длинноволновые монотонные возмущения (кривая 1b), а при Ga , больших 0.3 – монотонные возмущения с конечными k (кривая 3c).

Рассмотрим влияние капиллярного эффекта на устойчивость равновесия. Капиллярное число содержится лишь в динамическом граничном условии, в комбинации $Ga - k^2 Ca$, поэтому с ростом капиллярного эффекта нейтральные кривые $Ga(k)$ сдвигаются вверх по оси Ga , причем этот сдвиг тем больше, чем больше волновое число (фиг. 6). В случае $Ca = 0$, при числах Релея, превышающих 186, на нейтральной кривой имеется разрыв. Наличие капиллярности приводит к исчезновению интервала устойчивости, при любом значении числа Галилея механическое равновесие неустойчиво.



Фиг. 6. Нейтральные кривые $Ga(k)$ для $Ra = 190$: $1a, 1b, 1c, 1d$ – $Ca = 0$; $2a, 2b, 2c, 2d$ – $Ca = 1000$



Фиг. 7. Карта устойчивости на плоскости $Ga - Ra$: $1a, 1b, 1c, 1d$ – участки границы неустойчивости для $Ca = 0$; $2a, 2b, 2c, 2d$ – для $Ca = 1000$

На фиг. 7 изображены границы устойчивости равновесия по отношению к наиболее опасным возмущениям для параметра капиллярности, равного нулю и $Ca = 1000$. При больших по модулю отрицательных значениях числа Галилея наиболее опасными являются монотонные возмущения с $k \neq 0$. Как видно из фиг. 7, при увеличении параметра капиллярности порог устойчивости по отношению к этим возмущениям понижается. Колебательные возмущения с $k \neq 0$ при наличии капиллярности ни при каких числах Релея и Галилея не являются опасны: при $Ga \approx -72$ монотонный механизм неустойчивости с $k \neq 0$ (участок $2a$ на фиг. 7) сменяется на длинноволновый колебательный (участки $2b$ и $2c$ на фиг. 7), а при $Ga \approx 0.04$ наиболее опасными становятся длинноволновые монотонные возмущения (участок $2d$ на фиг. 7). Таким образом, наличие капиллярности приводит к расширению интервала параметров, в котором наиболее опасными являются длинноволновые возмущения.

Заключение. Главная цель настоящей работы – исследование влияния деформируемости границы раздела на устойчивость равновесия двухслойной системы при вертикальном градиенте температуры. В том случае, когда плотность нижней жидкости значительно больше плотности верхней, поле тяжести эффективно подавляет деформации поверхности раздела, за исключением случая микрогравитации, но в последнем случае подавленной оказывается и тепловая конвекция. По этой причине наибольший интерес с точки зрения изучения влияния деформируемости представляет собой случай близких плотностей жидкостей, т.е. тот случай, когда можно пользоваться обычными уравнениями в приближении Буссинеска, учитывая разность плотностей (точнее говоря, раз-

ность гидростатических градиентов давления) лишь в условии баланса нормальных напряжений на поверхности раздела.

В этом случае может реализовываться сквозное конвективное течение, охватывающее всю систему и увлекающее за собой границу раздела. В условиях фиксированного теплового потока на внешних границах неустойчивость такого типа, как и в случае единичного слоя жидкости, может иметь длинноволновый характер. Можно ожидать, однако, что при других типах граничных условий неустойчивость сквозного типа может также иметь место, но уже при конечных длинах волн возмущений. Типичная для двухслойных систем неустойчивость относительно возмущений двухъярусной структуры является более опасной при достаточно большой разности плотностей жидкостей, т.е. при достаточно больших по модулю числах Галилея. В области промежуточных значений числа Галилея имеет место интенсивный обмен энергией между возмущениями двух указанных типов, что приводит к появлению колебательной неустойчивости. Рассмотрение возмущений с конечными длинами волн не вносит принципиальных изменений в описанную картину, приводя лишь к количественным изменениям. При этом, чем больше поверхностное натяжение, тем сильнее оно подавляет коротковолновые возмущения, что приводит к расширению областей, в которых наиболее опасны длинноволновые возмущения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Rasenat S., Busse F.H., Rehberg I. A theoretical and experimental study of double-layer convection // J. Fluid Mech. 1989. V. 199. P. 519–540.
3. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей с деформируемой границей раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 32–39.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 302–305.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости равновесия двухслойной системы с теплоизолированными границами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 22–28.

Пермь

Поступила в редакцию
16.XI.2006