МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2007

УДК 532.592+517.958

© 2007 г. В. М. ТЕШУКОВ

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ В ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Выведены новые приближенные математические модели теории длинных волн, описывающие течения стратифицированной по плотности жидкости со свободной границей. Показано, что в ряде случаев уравнения новых моделей совпадают либо с уравнениями неизэнтропической газовой динамики с политропным уравнением состояния при $\gamma = 2$, либо с уравнениями, описывающими динамику смеси двух совершенных газов.

Ключевые слова: длинноволновое приближение, стратифицированная жидкость, сдвиговое течение, свободная граница, мелкая вода, газодинамическая аналогия.

Теоретическое описание движений жидкости со свободными границами сводится к отысканию решений нелинейных систем дифференциальных уравнений в областях, границы которых заранее неизвестны, а являются искомыми элементами задачи. В связи со сложностью постановок начально-краевых задач получили большое распространение упрощенные математические модели, такие, как уравнение Кортевега-де-Вриза, модель "мелкой воды", уравнения Грина–Нагди и др. [1]. В рамках этих моделей удается дать аналитическое описание таким существенно нелинейным волновым процессам, как распространение и взаимодействие уединенных и периодических волн, распространение боров и прыжков и др. Модели, возникающие в приближенных теориях, часто оказываются близкими по своим свойствам к другим известным моделям механики сплошных сред либо к моделям сложных сред. Общие подходы к построению моделей сложных сред, разработанные Л.И. Седовым и основанные на вариационном подходе [2], играют важную роль при построении и анализе приближенных моделей теории волн [3–6]. В настоящей работе получены новые приближенные математические модели теории длинных волн, описывающие течения стратифицированной по плотности жидкости со свободной границей. Классические уравнения теории мелкой воды, описывающие распространение длинных волн на поверхности слоя жидкости постоянной плотности, совпадают с уравнениями изэнтропического движения политропного газа при показателе политропы $\gamma = 2$ [7]. В работе обнаружены новые аналогии между движениями стратифицированной жидкости со свободной границей и движениями газов или газовых смесей. В [8] построены модели длинноволнового приближения для описания вихревых течений жидкости постоянной плотности.

1. Модель длинных волн. Движение идеальной неоднородной несжимаемой жидкости в слое со свободной границей описывается уравнениями

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \quad \rho\frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho g, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \mathrm{div}_2\mathbf{u} + u_{3x_3} = 0$$
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla_2 + u_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1.1}$$

На свободной границе $x_3 = h(t, x_1, x_2)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия; на ровном дне $x_3 = 0$ условия непротекания

$$h_t + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla_2)h = u_3, \quad p = p_0 = \text{const} \tag{1.2}$$

$$u_3 = 0 \tag{1.3}$$

Здесь t – время, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – радиус-вектор в горизонтальной плоскости, x_3 – вертикальная координата, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – горизонтальная скорость; u_3 – вертикальная компонента скорости жидкости; ρ – плотность; $h(t, x_1, x_2)$ – глубина слоя жидкости; p – давление; g – ускорение свободного падения; ∇_2, div_2 – градиент и дивергенция, вычисленные по переменным x_1, x_2.

Введем безразмерные переменные формулами

$$\mathbf{x}' = L^{-1}\mathbf{x}, \quad x_3' = H^{-1}x_3, \quad t' = UL^{-1}t, \quad \mathbf{u}' = U^{-1}\mathbf{u}$$

$$u_3' = LU^{-1}H^{-1}u_3, \quad h' = H^{-1}h, \quad p' = R^{-1}U^{-2}p, \quad \rho' = R^{-1}\rho$$

Здесь L – характерный горизонтальный масштаб, H – характерная глубина жидкого слоя, U – характерная скорость, R – характерная плотность. В безразмерных переменных уравнения (1.1) имеют вид

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla_2 p = 0, \quad \varepsilon^2\rho\frac{du_3}{dt} + p_{x_3} = -\rho F^{-2}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \mathrm{div}_2\mathbf{u} + u_{3x_3} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь штрихи в обозначениях новых переменных опущены; $F^2 = U^2/gH$ – число Фруда. Исключая давление p из системы уравнений (1.4), получаем уравнение Гельмгольца, описывающее эволюцию безразмерного вихря

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3}, u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1}, u_{2x_1} - u_{1x_2})$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla_2)\boldsymbol{\omega} + u_3\boldsymbol{\omega}_{x_3} = (\varepsilon^2 u_{3x_2} - u_{2x_3})\mathbf{U}_{x_1} + (u_{1x_3} - \varepsilon^2 u_{3x_1})\mathbf{U}_{x_2} + (u_{2x_1} - u_{1x_2})\mathbf{U}_{x_3} + \\ + \frac{1}{\rho^2}((\nabla_2\rho \times \nabla_2 p) + \rho_{x_3}(\mathbf{e}_3 \times \nabla_2 p)) - \frac{1}{\rho}\left(F^{-2} + \varepsilon^2\frac{du_3}{dt}\right)(\nabla_2\rho \times \mathbf{e}_3)\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ – трехмерный вектор скорости, $\mathbf{e}_3$ – орт оси x_3. В силу системы (1.4) производная ρ_{x_3} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho_{x_3}}{dt} - \rho_{x_3}\mathrm{div}_2\mathbf{u} + \mathbf{u}_{x_3}\nabla_2\rho = 0 \tag{1.6}$$

В этой работе для определенного класса решений задачи (1.2), (1.3), (1.4) выведем аналог уравнений мелкой воды в случае стратифицированной жидкости.

В дальнейшем будем рассматривать движения слабо стратифицированной жидкости. В этом классе решений плотность допускает представление

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho' \tag{1.7}$$

где $\rho_0 = \text{const}$, $\delta = \text{const}$ – малый безразмерный параметр, а ρ' – функция переменных x_1, x_2, x_3, t. Используя (1.6) и проекции уравнения Гельмгольца (1.5) на оси x_1, x_2, замечаем, что производные искомых функций u_{1x_3}, u_{2x_3}, ρ'_{x_3}, характеризующие их изменение по вертикали, являются решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{1x_3}}{dt} - u_{2x_3}u_{1x_3} + u_{1x_2}u_{2x_3} - \frac{\delta}{\rho^2}p_{x_1}\rho'_{x_3} = \frac{\delta}{\rho F^2}\rho'_{x_1} + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{du_{2x_3}}{dt} + u_{2x_1}u_{1x_3} - u_{1x_1}u_{2x_3} - \frac{\delta}{\rho^2}p_{x_2}\rho'_{x_3} = \frac{\delta}{\rho F^2}\rho'_{x_2} + O(\varepsilon^2) \tag{1.8}$$

$$\frac{d\rho'_{x_3}}{dt} + \rho'_{x_1}u_{1x_3} + \rho'_{x_2}u_{2x_3} - (u_{1x_1} + u_{2x_2})\rho'_{x_3} = 0$$

с малой правой частью порядка $O(\varepsilon^2 + \delta)$.

Эту систему запишем в векторном виде

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = A\mathbf{\Omega} + \varepsilon^2\mathbf{F} + \delta\mathbf{G} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} u_{1x_3} \\ u_{2x_3} \\ \rho'_{x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_{2x_2} & -u_{1x_2} & \delta\rho^{-2}p_{x_1} \\ -u_{2x_1} & u_{1x_1} & \delta\rho^{-2}p_{x_2} \\ -\rho'_{x_1} & -\rho'_{x_2} & u_{1x_1} + u_{2x_2} \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ – коэффициенты при ε^2 и δ в правой части уравнений (1.8). Рассмотрим задачу Коши

$$\mathbf{\Omega}|_{t=0} = \sigma\mathbf{\Omega}_0 \tag{1.10}$$

для системы (1.9). Здесь $\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{\Omega}_0(x_1, x_2, x_3)$ – заданная функция, σ – малый параметр.

Согласно общей теории системы обыкновенных дифференциальных уравнений [9], интегрирование (1.9) сводится к отысканию фундаментальной матрицы $Y(t, t_0)$, являющейся решением задачи

$$\frac{dY(t,t_0)}{dt} = A(t)Y(t,t_0), \quad Y(t_0,t_0) = I$$

Здесь I – единичная матрица. Если фундаментальная матрица найдена, то решение задачи Коши (1.8), (1.10) выписывается в явном виде

$$\mathbf{\Omega} = \sigma Y(t,0)\mathbf{\Omega}_0 + \varepsilon^2\int_0^t Y(t,s)\mathbf{F}(s)ds + \delta\int_0^t Y(t,s)\mathbf{G}(s)ds \tag{1.11}$$

Из представления решения (1.11) вытекает, что если при $t = 0$ производные u_{1x_3}, u_{2x_3}, ρ'_{x_3} имеют порядок $O(\sigma)$, то при $t > 0$ эти производные тоже являются малыми и имеют порядок $O(\varepsilon^2 + \delta + \sigma)$. Если $\delta \ll \varepsilon^2$, то отличие плотности жидкости от постоянной ρ_0 по порядку величины меньше, чем ошибка, допускаемая в теории длинных волн, а тогда при выводе уравнений длинных волн можно считать $\rho = \rho_0 = \text{const}$. В этом случае стратификация не является существенным фактором, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\delta \gg \varepsilon^2$, $\sigma \gg \varepsilon^2$. При этом выборе будем иметь оценки

$$u_{1x_3} = O(\delta+\sigma), \quad u_{2x_3} = O(\delta+\sigma), \quad \rho'_{x_3} = O(\delta+\sigma), \quad t>0 \tag{1.12}$$

В теории длинных волн членами порядка $O(\varepsilon^2)$ в уравнениях (1.4) пренебрегают. В этом случае уравнение для вертикального импульса сводится к гидростатическому закону распределения давления по глубине

$$p_{x_3} = -\frac{\rho}{F^2}, \quad p - p_0 = \frac{1}{F^2}\int_{x_3}^{h} \rho(t, x_1, x_2, \zeta)d\zeta$$

Используя это представление давления, получаем приближенные уравнения, описывающие распространение длинных волн на сдвиговом стратифицированном потоке:

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\nabla_2}{F^2}\left(\int_{x_3}^{h}\rho d\zeta\right) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \\ &\mathrm{div}_2\mathbf{u} + u_{3x_3} = 0, \quad h_t + (\mathbf{u}^h\nabla_2)h = u_3^h \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь $\mathbf{u}^h$, u_3^h – значения компонент вектора скорости $x_3 = h(t, x_1, x_2)$. Решение системы (1.13) должно удовлетворять на дне $x_3 = 0$ условию (1.3). Система уравнений (1.13) описывает эволюцию непрерывных распределений скоростей и плотности жидкости по глубине. Цель работы – выделение класса движений, описание которого возможно в терминах, осредненных по глубине скорости и плотности жидкости.

2. Уравнения движения в терминах осредненных параметров. Проинтегрируем первые три уравнения системы (1.13) по x_3 от 0 до h и учтем граничные условия. В результате получаем

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^h \rho\mathbf{u}dx_3\right)_t + \mathrm{div}\left(\int_0^h \rho(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})dx_3\right) + \frac{\nabla_2}{F^2}\left(\int_0^h\int_{x_3}^h \rho(t, x_1, x_2, \zeta)d\zeta dx_3\right) = 0 \\ &\left(\int_0^h \rho dx_3\right)_t + \mathrm{div}\left(\int_0^h \rho\mathbf{u}dx_3\right) = 0, \quad h_t + \mathrm{div}\left(\int_0^h \mathbf{u}dx_3\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})$ – диада двух векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Введем осреднённые по глубине плотность жидкости и горизонтальную скорость

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h}\int_0^h \rho dx_3, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{u}dx_3$$

Тогда интеграл от вектора $\mathbf{u}$ по глубине, входящий в последнее уравнение системы (2.1), можно заменить выражением $h\bar{\mathbf{u}}$. Но результат интегрирования в (2.1) величин, нелинейно зависящих от скорости и плотности, не выражается через осредненные значения скорости и плотности в общем случае. Покажем, что если использовать асимптотические разложения по малым параметрам задачи, то требуемые приближенные представления можно получить, используя очевидные тождества

$$\rho = \bar{\rho} + (\rho - \bar{\rho}), \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \tag{2.2}$$

вычисляем величины $\rho\mathbf{u}$, $\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$ в виде

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{u} &= \overline{\rho\mathbf{u}} + \bar{\rho}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\rho - \bar{\rho})\bar{\mathbf{u}} + (\rho - \bar{\rho})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} &= \bar{\rho}(\bar{\mathbf{u}}\otimes\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}\otimes(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\otimes\bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\otimes(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})) + \\ &+ (\rho - \bar{\rho})(\bar{\mathbf{u}}\otimes\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}\otimes(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\otimes\bar{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\otimes(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})) \end{aligned}$$

Заметим, что при интегрировании этих выражений от 0 до h линейные по $\rho - \bar{\rho}$, $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ члены дают нулевой вклад. В итоге получается следующее представление интегралов

$$\int_0^h \rho \mathbf{u} dx_3 = \bar{\rho} h \bar{\mathbf{u}} + \int_0^h (\rho - \bar{\rho})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3$$

$$\int_0^h \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dx_3 = \bar{\rho} h(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\rho}\int_0^h (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \oplus (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3 + \bar{\mathbf{u}} \oplus \int_0^h (\rho - \bar{\rho})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3 + \tag{2.3}$$

$$+ \int_0^h (\rho - \bar{\rho})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3 \otimes \bar{\mathbf{u}} + \int_0^h (\rho - \bar{\rho})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \otimes (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3$$

Используя формулу (2.2), можно также получить представление следующего интеграла:

$$\int_0^h \int_{x_3}^h \rho d\zeta dx_3 = \frac{\bar{\rho} h^2}{2} + \int_0^h \int_{x_3}^h (\rho - \bar{\rho}) d\zeta dx_3$$

Используя представления $\mathbf{u}$, ρ в виде интегралов от производных $\mathbf{u}_{x_3}$, ρ_{x_3}, можно оценить разности $|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}|$, $|\rho - \bar{\rho}|$ через $|\mathbf{u}_{x_3}|$ и $|\rho_{x_3}| = |\delta \rho'_{x_3}|$. В выбранном классе решений в силу (1.2) справедливы следующие оценки величин $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$, $\rho - \bar{\rho}$:

$$|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}| = O(\sigma + \delta), \quad |\rho - \bar{\rho}| = O(\sigma\delta + \delta^2) \tag{2.4}$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка $O(\sigma^2 + \sigma\delta + \delta^2)$ и более высоких порядков, получаем приближенные формулы

$$\int_0^h \rho \mathbf{u} dx_3 \approx \bar{\rho} h \bar{\mathbf{u}}, \quad \int_0^h \int_{x_3}^h \rho d\zeta dx_3 \approx \frac{\bar{\rho} h^2}{2} \tag{2.5}$$

$$\int_0^h \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dx_3 \approx \bar{\rho} h(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \tag{2.6}$$

Используя эти приближенные формулы, приводим систему (2.1) к виду

$$(\bar{\rho} h)_t + \operatorname{div}(\bar{\rho} h \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (\bar{\rho} h \bar{\mathbf{u}})_t + \operatorname{div} \bar{\rho} h(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} = 0, \quad h_t + \operatorname{div}(h \bar{\mathbf{u}}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\bar{p} = \frac{\rho h^2}{2F^2} \tag{2.8}$$

Следствием системы (2.7) является уравнение

$$\bar{\rho}_t + (\bar{\mathbf{u}} \nabla) \bar{\rho} = 0 \tag{2.9}$$

Полученная модель с точностью до замены искомых функций совпадает с системой уравнений газовой динамики. Для того чтобы убедиться в этом, введем плотность, скорость и удельную энтропию "газа" формулами

$$\rho_1 = \bar{\rho} h, \quad \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}, \quad S_1 = -\ln \bar{\rho} \tag{2.10}$$

После замены искомых функций уравнения (2.7), (2.8) совпадают с уравнениями неизэнтропического движения политропного газа с показателем политропы, равным двум:

$$\rho_{1t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (\rho_1 \mathbf{u}_1)_t + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla p_1 = 0, \quad S_{1t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) S_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$p_1 = \frac{e^{S_1} \rho_1^2}{2F^2} \quad (2.12)$$

Формулы (2.10) устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями системы уравнений (2.7), (2.8), описывающей распространение длинных волн на поверхности слабо стратифицированной жидкости, и решениями уравнений неизэнтропической газовой динамики (2.11), (2.12). Тем самым газодинамическая аналогия распространена на течения слабо стратифицированной жидкости.

3. Математическая модель движения стратифицированной жидкости, учитывающая сдвиговый характер течения. Далее будет получена модель, учитывающая в среднем сдвиговый характер движения. Будем предполагать, что малые параметры связаны неравенством $\sigma \gg \delta$. В этом случае $u_{1x_3} = O(\sigma)$, $u_{2x_3} = O(\sigma)$, $\rho'_{x_3} = O(\sigma)$ и

$$|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}| = O(\sigma), \quad |\rho - \bar{\rho}| = O(\sigma\delta) \quad (3.1)$$

Пренебрежем в (2.11) величинами третьего порядка относительно малых параметров σ, δ, а из величин второго порядка учтем только наибольшие, имеющие порядок $O(\sigma^2)$.

В этой аппроксимации приближенные соотношения (2.5) сохраняются, а соотношения (2.6) заменяются следующими:

$$\int_0^h \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) dx_3 = \bar{\rho} h (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\rho} \int_0^h (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \otimes (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3$$

Подстановка этих формул в (2.1) дает уравнения

$$\begin{aligned} &(\bar{\rho} h)_t + \operatorname{div}(\bar{\rho} d \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (\bar{\rho} h \bar{\mathbf{u}})_t + \operatorname{div} \bar{\rho}(h(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) + P) + \nabla \bar{p} = 0, \\ &h_t + \operatorname{div}(h \bar{\mathbf{u}}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} h^2}{2F^2}, \quad P = \int_0^h (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \otimes (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dx_3$$

В полученной системе уравнений число неизвестных превышает число уравнений, так как наряду с h, $\bar{\rho}$, $\bar{\mathbf{u}}$ не известны в ней компоненты тензора P.

$$P_{ij} = \int_0^h (u_i - \bar{u}_i)(u_j - \bar{u}_j) dx_3, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

Для замыкания системы нужно получить уравнения, определяющие эволюцию этих компонент. Проинтегрируем по глубине следующие следствия системы (1.13):

$$\frac{d}{dt}(\rho u_i u_j) + \frac{1}{F^2}\left(u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{x_3}^h \rho d\zeta + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{x_3}^h \rho d\zeta \right) = 0$$

Используя представления (2.2) и отбрасывая в полученных уравнениях величины более высокого порядка малости по сравнению с $O(\sigma^2)$, получаем равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j + \bar{\rho}P_{ij}) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k + \overline{\rho u_k}P_{ij} + \overline{\rho u_i}P_{jk} + \overline{\rho u_j}P_{ik}) +$$
$$+\frac{1}{F^2}\int_0^h\left(u_j\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{x_3}^h\rho d\zeta + u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{x_3}^h\rho d\zeta\right)dx_3 = 0$$

Вычислим

$$\int_0^h u_j\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{x_3}^h\rho d\zeta dx_3 = \int_0^h u_j\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\rho}(h-x_3)dx_3 + O(\sigma\delta) = h\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}h) - \frac{1}{2}\delta u_j^h h^2\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\rho}' +$$
$$+\frac{1}{2}\delta\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\rho}'\int_0^h x_3^2 u_{x_3}dx_3 + O(\sigma\delta) \approx \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2}\right)$$

Последнее приближенное равенство получено отбрасыванием малых величин порядка $O(\sigma\delta)$. С использованием этого равенства получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j + \bar{\rho}P_{ij}) + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k + \overline{\rho u_k}P_{ij} + \overline{\rho u_i}P_{jk} + \overline{\rho u_j}P_{ik}) +$$
$$+\frac{1}{F^2}\left(\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2}\right) + \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2}\right)\right) = 0$$

Вычитая из него следующее следствие уравнений (3.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j) + \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}h\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k) + \bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\rho}P_{jk} + \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\rho}P_{ik}\right) +$$
$$+\frac{1}{F^2}\left(\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2}\right) + \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2}\right)\right) = 0$$

приходим к уравнениям, определяющим эволюцию компонент P_{ij}. В итоге получена замкнутая система уравнений

$$\begin{gathered} h_t + \operatorname{div}_2(h\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (\bar{\rho}h)_t + \operatorname{div}_2(\bar{\rho}h\bar{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial\bar{\rho}h\bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}_2(\bar{\rho}h(\bar{\mathbf{u}}\otimes\bar{\mathbf{u}}) + \bar{\rho}P) + \frac{1}{2F^2}\nabla_2(\bar{\rho}h^2) = 0 \\ \frac{\partial\bar{\rho}P_{ij}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho}P_{ij}\bar{\mathbf{u}}) + \sum_{k=1}^{2}\left(\bar{\rho}P_{jk}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{\rho}P_{ik}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k}\right) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

описывающая сдвиговые течения слабо стратифицированной жидкости.

Вместо переменных P_{ij} введем новые переменные Q_{ij}, связанные с P_{ij} соотношением $P_{ij} = h^3Q_{ij}/12$.

В новых переменных уравнения (3.3) записываются в эквивалентном виде

$$
\begin{gathered}
\frac{d\bar\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} + h\operatorname{div}_2(\bar{\mathbf{u}}) = 0 \\
\frac{d\bar u_1}{dt} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} + \left(\frac{hQ_{11}}{4} + \frac{1}{F^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{hQ_{12}}{4}\frac{\partial h}{\partial x_2} + \\
+ \left(\frac{h^2 Q_{11}}{12\bar\rho} + \frac{h}{2\bar\rho F^2}\right)\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_1} + \frac{h^2 Q_{12}}{12\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_2} = 0 \\
\frac{d\bar u_2}{dt} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_1} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + \frac{hQ_{12}}{4}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \left(\frac{hQ_{22}}{4} + \frac{1}{F^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x_2} + \\
+ \frac{h^2 Q_{12}}{12\bar\rho}\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_1} + \left(\frac{h^2 Q_{22}}{12\bar\rho} + \frac{h}{2\bar\rho F^2}\right)\frac{\partial\bar\rho}{\partial x_2} = 0 \\
\frac{dQ_{11}}{dt} + 2Q_{12}\frac{\partial\bar u_1}{\partial x_2} - 2Q_{11}\frac{\partial\bar u_2}{\partial x_2} = 0 \\
\frac{dQ_{12}}{dt} - Q_{12}\operatorname{div}_2(\bar{\mathbf{u}}) + Q_{11}\frac{\partial\bar u_2}{\partial x_1} + Q_{22}\frac{\partial\bar u_1}{\partial x_2} = 0 \\
\frac{dQ_{22}}{dt} + 2Q_{12}\frac{\partial\bar u_2}{\partial x_1} - 2Q_{22}\frac{\partial\bar u_1}{\partial x_1} = 0
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Из определения величин P_{ij} и неравенства Коши вытекает, что $P_{11}P_{22} \ge P_{12}^2$. Компоненты Q_{ij} связаны аналогичным неравенством

$$
Q_{11}Q_{22} \ge Q_{12}^2 \tag{3.5}
$$

Из системы (3.4) можно получить следующее уравнение для величины $J = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2$:

$$
\frac{dJ}{dt} - 2J\operatorname{div}_2\mathbf{u} = 0
$$

Из этого уравнения следует, что если при $t = 0$ выполнено равенство $J = 0$ (или неравенство $J \ge 0$), то $J = 0$ ($J \ge 0$) при всех значениях t.

Заметим, что J при $t = 0$ обращается в нуль в случае, когда начальные значения горизонтальных компонент скорости линейно зависят от вертикальной переменной x_3, т.е. когда при $t = 0$ выполнены равенства $u_{1x_3x_3} = 0$, $u_{2x_3x_3} = 0$. Рассмотрим класс решений системы (3.4), удовлетворяющих соотношению $J = 0$. Полагаем

$$
Q_{11} = \Omega_2^2, \quad Q_{22} = \Omega_1^2, \quad Q_{12} = -\Omega_1\Omega_2
$$

Последние три уравнения системы (3.4) преобразуются к виду

$$
\frac{d\Omega_1}{dt} = \Omega_1\frac{\partial\bar u_1}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{d\bar u_2}{dx_1}, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \Omega_1\frac{\partial\bar u_1}{\partial x_2} + \Omega_2\frac{\partial\bar u_2}{\partial x_2} \tag{3.6}
$$

Эти уравнения переписываются в форме

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \Omega_1\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} + \Omega_2\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2}\right),\quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \Omega_1\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} + \Omega_1\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1}\right).\quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) по форме совпадают с уравнениями для горизонтальных компонент вектора вихря, следующими из системы уравнений Эйлера, поэтому есть основания считать, что вектор

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \left(\Omega_1, \Omega_2, \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2}\right)$$

представляет осредненный вектор вихря исходного течения.

В итоге получена новая математическая модель (3.4), учитывающая в среднем слабую стратификацию, влияние слабого сдвига горизонтальной скорости по вертикали и обобщающая классическую модель теории мелкой воды. При $\bar{\rho}$ = const новая модель совпадает с полученной в [8] моделью вихревых движений однородной по плотности жидкости.

4. Гиперболичность уравнений длинных волн. Для того чтобы найти характеристики системы уравнений (3.4), представим ее в векторном виде

$$\mathbf{U}_t + A\mathbf{U}_{x_1} + B\mathbf{U}_{x_2} = 0$$

Здесь $\mathbf{U} = (\rho, h, u_1, u_2, Q_{11}, Q_{12}, Q_{22})$, A, B – матрицы размера 7×7. Пусть $\xi = (\tau, \xi, \eta)$ – вектор нормали к характеристике. Характеристическая матрица системы (3.4) определяется следующим образом:

$$A(\xi) = \tau I + \xi A + \eta B$$

Простое, но громоздкое вычисление дает следующее выражение для $\det A(\xi)$:

$$\det A(\xi) = \chi^2\left(\chi^2 - \frac{h^2}{12}(Q_{11}\xi^2 + 2Q_{12}\xi\eta + Q_{22}\eta^2)\right)\Big(\chi^2 - \\ - \frac{h^2}{4}(Q_{11}\xi^2 + 2Q_{12}\xi\eta + Q_{22}\eta^2) - F^{-2}h(\xi^2 + \eta^2)\Big) \quad (4.1)$$

Пусть искомая характеристическая поверхность задается уравнением $H(t, x_1, x_2) = 0$. Для получения дифференциальных уравнений характеристик заменим вектор (τ, ξ, η) в формуле (4.1) на вектор H_t, H_{x_1}, H_{x_2} и приравняем $\det A(H_t, H_{x_1}, H_{x_2})$ к нулю. В результате получаем семейство контактных характеристик (соответствующий характеристический корень имеет кратность 3)

$$H_t + u_1H_{x_1} + u_2H_{x_2} = 0$$

и два семейства "звуковых" характеристик

$$H_t + u_1H_{x_1} + u_2H_{x_2} = \pm\sqrt{\frac{h^2}{12}(Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2)}$$

$$H_t + u_1H_{x_1} + u_2H_{x_2} = \\ = \pm\sqrt{\frac{h}{F^2}(H_{x_1}^2 + H_{x_2}^2) + \frac{h^2}{4}(Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2)}$$

Для того чтобы корни характеристического уравнения были действительными, квадратичная форма

$$Q_{11}H_{x_1}^2 + 2Q_{12}H_{x_1}H_{x_2} + Q_{22}H_{x_2}^2$$

должна быть неотрицательной. Легко видеть, что неотрицательность квадратичной формы обеспечивается неравенством (3.5). В итоге установлено, что (3.4) – это гиперболическая система уравнений при выполнении неравенства (3.5).

5. Одномерное движение. В случае одномерного движения уравнения (3.3) имеют вид

$$\begin{gathered} h_t + (h\bar{u})_x = 0, \quad (\bar{\rho}h)_t + (\bar{\rho}h\bar{u})_x = 0 \\ (\bar{\rho}h\bar{u})_t + (\bar{\rho}h\bar{u}^2)_x + \left(\frac{\bar{\rho}h^2}{2F^2} + \bar{\rho}P\right)_x = 0 \\ (\bar{\rho}P)_t + (\bar{\rho}P\bar{u})_x + 2\bar{\rho}P\bar{u}_x = 0 \end{gathered} \tag{5.1}$$

Выполним следующую замену искомой функции: $p = \omega^2 h^3/12$, где величина ω имеет смысл средней завихренности. Из системы (5.1) получаем следствия

$$\bar{\rho}_t + \bar{u}(\bar{\rho})_x = 0, \quad (\omega^2)_t + \bar{u}(\omega^2)_x = 0$$

из которых вытекает, что $\bar{\rho}$ и ω^2 сохраняются вдоль траекторий частиц аналогично энтропии в газовой динамике. Следствием системы (5.1) является закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{\rho}h\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{\rho}\omega^2 h^3}{24} + \frac{\bar{\rho}h^2}{2F^2}\right) + \left(\frac{\bar{\rho}h\bar{u}^3}{2} + \frac{\bar{\rho}\omega^2 h^3\bar{u}}{8} + \frac{\bar{\rho}h^2\bar{u}}{F^2}\right)_x = 0$$

Полученные уравнения имеют сходство с уравнениями, описывающими динамику равновесной по давлениям смеси двух газов, имеющих одинаковые плотность и давление, но разные температуры. Введем скорость u_1, плотность ρ_1, энтропии "газов" S_1, S_2, внутреннюю энергию смеси E_1 и давление p_1 формулами

$$\begin{gathered} u_1 = \bar{u}, \quad \rho_1 = \bar{\rho}h, \quad e^{S_1} = \frac{1}{\bar{\rho}}, \quad e^{S_2} = \frac{\omega^2}{\bar{\rho}^2} \\ E_1 = \frac{e^{S_1}p_1}{2F^2} + \frac{e^{S_2}\rho_1^2}{24}, \quad p_1 = \frac{e^{S_1}\rho_1^2}{2F^2} + \frac{e^{S_2}\rho_1^3}{12} \end{gathered} \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует аналог основного термодинамического тождества

$$dE_1 + p_1 d\left(\frac{1}{\rho_1}\right) = T_1 dS_1 + T_2 dS_2$$

$$T_1 = \frac{\rho_1 e^{S_1}}{2F^2}, \quad T_2 = \frac{\rho_1^2 e^{S_2}}{24}$$

где температуры "газов", давление и внутреннюю энергию смеси можно представить в виде функций плотности и температур

$$p_1 = \rho_1(T_1 + 2T_2), \quad E_1 = T_1 + T_2 \tag{5.3}$$

Эти соотношения аналогичны уравнениям состояния смеси двух совершенных газов. Действительно, пусть уравнения состояния двух совершенных газов заданы в виде

$$p_{1i}V = n_i R T_i, \quad E_{1i} = n_i c_{vi} T_i$$

Здесь p_{1i} – парциальные давления газов, E_{1i} – внутренние энергии, V – объем смеси, n_i – число молей в объеме, R, $c_{\upsilon i}$ – постоянные. Учитывая, что давление смеси равно сумме парциальных, а внутренняя энергия – сумме внутренних энергий компонент, суммируя уравнения состояния газов и относя результат к массе смеси, получаем формулы для удельных величин

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{n_i R T_i}{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2}, \quad E_1 = \sum_{i=1}^{2} \frac{n_i c_{\upsilon i} T_i}{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2} \tag{5.4}$$

Здесь μ_i – молекулярные массы, $\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2$ – масса вещества в объеме. При фиксированном составе смеси отношение n_1/n_2 – фиксировано, поэтому при соответствующем выборе коэффициентов равенство (5.4) сводится к (5.3).

В итоге система уравнений (5.5) сведена в одномерном случае к уравнениям динамики смеси двух совершенных газов, имеющих разные температуры

$$\begin{gathered} \rho_{1t} + (\rho_1 u)_x = 0, \quad (\rho_1 u)_t + (\rho_1 u^2)_x + p_{1x} = 0 \\ (\rho_1 S_1)_t + (\rho_1 S_1 u)_x = 0, \quad \left(\rho_1\left(\frac{u^2}{2} + E_1\right)\right)_t + \left(\rho_1 u\left(\frac{u^2}{2} + E_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right)\right)_x = 0 \end{gathered} \tag{5.5}$$

Уравнения состояния “газа” определены в (5.2).

Частные решения, характеризуемые равенством $S_1 = \text{const}$, описывают сдвиговые течения однородной по плотности жидкости [8], а модель движения стратифицированной жидкости, описывающая движения без сдвига скорости (2.7), возникает при предельном переходе $S_2 \to -\infty$ в системе (5.5).

Заключение. При описании одномерных сдвиговых движений стратифицированной жидкости возникает система уравнений, являющаяся аналогом уравнений динамики смеси двух газов. Новая система уравнений (3.4), описывающая общие сдвиговые трехмерные движения слабо стратифицированной жидкости, требует дополнительного исследования. Обобщение газодинамической аналогии позволяет использовать известные классы решений уравнений газовой динамики для приближенного описания вихревых движений стратифицированной жидкости в слое со свободной границей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00609).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
3. *Gavrilyuk S.L., Teshukov V.M.* Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Contin. Mech.Thermodyn. 2001. V. 13. № 6. P. 365–382.
4. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
5. *Teshukov V.M., Gavrilyuk S.L.* Kinetic model for the motion of compressible bubbles in a perfect fluid // Europ. J. Mech. B/Fluids. 2002. V. 21. № 4. P. 469–491.
6. *Teshukov V.M., Gavrilyuk S.L.* Linear stability of parallel inviscid flows of shallow water and bubbly liquid // Stud. Appl. Math. 2004. № 1. P. 1–29.
7. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
8. *Тешуков В.М.* Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 3. С. 8–15.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. С. 720.

Новосибирск

Поступила в редакцию 14.VI.2007