

УДК 532.546

© 2007 г. О. Ю. ДИНАРИЕВ, Д. Н. МИХАЙЛОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ АНСАМБЛЯ ПОР

Рассмотрен класс моделей пористых сред, основанный на концепции ансамбля пор с некоторым распределением основных геометрических параметров (например, размера пор). Исследованы случаи, когда поры насыщены однофазной и двухфазной многокомпонентной жидкой смесью. Свойства равновесных состояний смеси выводятся из условия минимума свободной энергии; законы переноса выводятся из условия убывания свободной энергии. Гидродинамическая связность пор описывается двумя видами ядер: одно ядро описывает связность пор в пространстве, другое описывает связность пор в элементарном макрообъеме. Аналитически и численно исследованы одномерные задачи установления стационарного режима, распространения пассивной примеси, двухфазного течения (аналог задачи Баклея-Левретта). Продемонстрирована связь рассматриваемых моделей с моделями релаксационной фильтрации. Предложена простая модель капиллярного гистерезиса, связанная с немонотонностью функции отношения площади поры к ее объему.

Ключевые слова: пористая среда, ансамбль пор, многокомпонентная смесь, капиллярный гистерезис, распространение пассивной примеси, двухфазное течение.

Широко распространенным средством математического описания процессов в пористых материалах является модель сплошной среды [1–6], когда и сам пористый материал, и находящаяся в порах жидкость или газ предполагаются непрерывно распределенными в пространстве. При этом индивидуальные свойства пор считаются несущественными; принимается, что вполне достаточен опосредованный учет этих свойств в макроскопических коэффициентах пористости и проницаемости.

В то же время экспериментально наблюдаемые динамические эффекты, касающиеся коэффициентов абсолютной и фазовых проницаемостей, капиллярного давления, переноса примеси, вызвали к жизни большое количество моделей, учитывающих структуру пор, например модели совокупности капилляров или сеточные модели (см. обзор [7]). Отметим, что распределение пор по размерам – важная составляющая теории кольматации [8]. Однако каждая из созданных моделей структуры порового пространства предназначалась для решения вполне определенной частной задачи: расчета фазовых проницаемостей, капиллярного давления и проч.

В настоящей работе предложен математический формализм, который позволяет единообразно описать все модели, основанные на концепции ансамбля пор. Показано, что этот подход позволяет моделировать явления, рассматривавшиеся ранее как абсолютно независимые (например, релаксационные явления и капиллярный гистерезис). Изложены основные уравнения теории для однофазного и двухфазного случаев; приведены аналитические и численные результаты по одномерным однофазным и двухфазным (аналог задачи Баклея–Левретта) течениям. Представлены результаты численного моделирования капиллярного гистерезиса.

1. Основные понятия модели ансамбля пор: однофазный случай. Рассмотрим изотропную однородную недеформируемую пористую среду. Все процессы предполагаются изотермическими, поэтому зависимость от температуры везде опускается. Предполагается также, что гравитационные силы несущественны. Индексы a , b , c пробегает зна-

чения 1, 2, 3, соответствуя порядковым номерам пространственных декартовых координат x^a . Индексы i, j, k пробегает значения 1, ..., M , соответствуя номерам компонентов смеси. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Используются сокращенные обозначения для частных производных $\partial_a = \partial/\partial x^a$, $\partial_t = \partial/\partial t$, где t – время.

Первым шагом в определении ансамбля пор является понятие собирательного параметра ζ , который перечисляет или индексирует различные поры в выделенном элементарном макрообъеме. Этот параметр может включать в себя характерный размер или другие геометрические свойства поры, индекс поры в случае пор разного типа (например, для трещиновато-пористой породы), или просто совпадать с номером поры.

Вторым шагом является определение вероятностной меры $d\mu(\zeta)$ на пространстве пор, которая характеризует частоту появления поры ζ в ансамбле. По определению имеет место нормировочное условие

$$\int d\mu(\zeta) = 1 \quad (1.1)$$

Далее для каждой поры ζ определяется поровый объем $v = v(\zeta)$ и площадь поровой поверхности $\sigma = \sigma(\zeta)$. Эти величины предполагаются нормированными на единичный объем таким образом, что их интегрирование по вероятностной мере дает пористость ϕ и удельную поверхность S соответственно

$$\phi = \int v(\zeta) d\mu(\zeta); \quad S = \int \sigma(\zeta) d\mu(\zeta) \quad (1.2)$$

Рассмотрим M -компонентную однофазную смесь, насыщающую поровое пространство. Тогда для каждой поры определен набор мольных плотностей компонентов смеси $n_i = n_i(t, x^b, \zeta)$. Динамика этих величин подчиняется локальным законам сохранения

$$\partial_t(vn_i) + \partial_a i_i^a = j_i \quad (1.3)$$

где $i_i^a = i_i^a(t, x^b, \zeta)$ – пространственный поток компонента i , $j_i = j_i(t, x^b, \zeta)$ – приток компонента i к поре ζ из других пор в том же элементарном макрообъеме. В силу условия сохранения компонентов при перетоках между порами величина $j_i = j_i(t, x^b, \zeta)$ удовлетворяет интегральному условию

$$\int j_i(t, x^a, \zeta) d\mu(\zeta) = 0 \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) следуют макроскопические уравнения переноса

$$\begin{aligned} \phi \partial_t N_i + \partial_a I_i^a &= 0 \\ N_i(t, x^a) &= \frac{1}{\phi} \int n_i(t, x^a, \zeta) v(\zeta) d\mu(\zeta), \quad I_i^a(t, x^a) = \int i_i^a(t, x^a, \zeta) d\mu(\zeta) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $N_i(t, x^a)$, $I_i^a(t, x^a)$ – средняя мольная плотность и средний поток в элементарном макрообъеме. Для замыкания задачи (1.3) (так же, как и задачи (1.5)) требуются определяющие соотношения – явные выражения для потоков. Поскольку исследуются изотермические процессы, определяющие соотношения необходимо вводить в соответствии с условием убывания свободной энергии.

Пусть $f = f(n_i)$ – свободная энергия смеси (энергия Гельмгольца) на единицу объема. Зависимость от температуры опущена. Напомним, что функция $f = f(n_i)$ удовлетворяет следующим термодинамическим соотношениям [9]

$$\kappa_i = \frac{\partial f}{\partial n_i}, \quad p = -f + n_i \kappa_i, \quad dp = n_i d\kappa_i \quad (1.6)$$

где $\kappa_i = \kappa_i(n_j)$ – химический потенциал компонента i , $p = p(n_i)$ – гидростатическое давление. Зная свободную энергию частицы смеси, несложно вычислить ее для смеси в порах

$$H = H_b + H_s$$

$$H_b = H_b(t, x^a) = \int f(n_i(t, x^a, \zeta))v(\zeta)d\mu(\zeta) \quad (1.7)$$

$$H_s = H_s(t, x^a) = \int \gamma_s(n_i(t, x^a, \zeta))\sigma(\zeta)d\mu(\zeta)$$

Здесь H – свободная энергия смеси в порах на единицу объема, H_b – объемная часть свободной энергии, H_s – поверхностная энергия, обусловленная взаимодействием смеси с неподвижной твердой фазой, γ_s – плотность поверхностной энергии. После непосредственного дифференцирования по времени величин (1.7) с использованием уравнения (1.3) и соотношений (1.6) получается уравнение для эволюции свободной энергии

$$\partial_t H + \partial_a H^a = \Sigma, \quad H^a = \int i_i^a \xi_i d\mu(\zeta) \quad (1.8)$$

$$\Sigma = \int (j_i \xi_i + i_i^a \partial_a \xi_i) d\mu(\zeta), \quad \xi_i = \kappa_i + \frac{\sigma \partial \gamma_s}{v \partial n_i}$$

Математическая форма уравнения (1.8) позволяет интерпретировать величину Σ как диссипативную функцию. Величина Σ не может быть положительной, так как диссипативные процессы должны приводить к уменьшению свободной энергии $\Sigma \leq 0$.

Условие $\Sigma \leq 0$ позволяет сформулировать определяющие соотношения в виде

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = -\int k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') \partial_a \xi_j(t, x^b, \zeta') d\mu(\zeta') \quad (1.9)$$

$$j_i(t, x^a, \zeta) = \int (d_{ij}(t, x^a, \zeta, \zeta') (\xi_j(t, x^a, \zeta') - \xi_j(t, x^a, \zeta))) d\mu(\zeta') \quad (1.10)$$

Ядра, фигурирующие в (1.9), (1.10), должны быть симметричными в соответствии с условиями Онзагера [10]

$$k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = k_{ji}(t, x^b, \zeta', \zeta); \quad d_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = d_{ji}(t, x^b, \zeta', \zeta) \quad (1.11)$$

и, кроме того, интегральные операторы, определяемые этими ядрами, должны быть неотрицательными. Определяющие соотношения (1.9), (1.10) показывают, что движущей силой переноса между порами служат перепады величин ξ_i . При этом выражения для потоков (1.9), (1.10) охватывают как случай гидродинамического переноса (под действием перепада давления), так и случай диффузионного переноса. В настоящей работе сосредоточимся только на переносе, обусловленном перепадом давления. Примем, что плотность поверхностной энергии и сдвиговая вязкость – постоянные величины γ_s (коэффициент поверхностного натяжения) и η соответственно. Примем также, что ядра гидродинамической связности пор k_{ij} , d_{ij} имеют частный вид

$$k_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = \eta^{-1} n_i(t, x^b, \zeta) n_j(t, x^b, \zeta') k(\zeta, \zeta') \quad (1.12)$$

$$d_{ij}(t, x^b, \zeta, \zeta') = \eta^{-1} n_i(t, x^b, \zeta) n_j(t, x^b, \zeta') d(\zeta, \zeta') \quad (1.13)$$

где ядра $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ должны быть симметричными, а соответствующие интегральные операторы – неотрицательными. Возможный функциональный вид ядер обсуждается в Приложении. Используя выражения (1.12), (1.13), соотношения (1.6) и предпола-

гая близость значений химических потенциалов в разных порах в одном элементарном макрообъеме, можно приближенно заменить соотношения (1.9), (1.10) более простыми

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = -\frac{1}{\eta} n_i(t, x^b, \zeta) \int k(\zeta, \zeta') \partial_a p(t, x^b, \zeta') d\mu(\zeta') \quad (1.14)$$

$$j_i(t, x^a, \zeta) = \frac{1}{\eta} \int d(\zeta, \zeta') (p(t, x^b, \zeta') - p(t, x^b, \zeta)) \times \\ \times (\varepsilon n_i(t, x^b, \zeta') + (1 - \varepsilon) n_i(t, x^b, \zeta)) d\mu(\zeta') \quad (1.15)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & p(t, x^b, \zeta') \geq p(t, x^b, \zeta) \\ 0, & p(t, x^b, \zeta') < p(t, x^b, \zeta) \end{cases}$$

Соотношения (1.14), (1.15) удовлетворяют условию $\Sigma \leq 0$ и (1.4) и в комбинации с уравнением состояния $p = p(n_i)$ делают задачу (1.3) замкнутой. Из наличия определяющих соотношений для задачи переноса в ансамбле пор (1.3), вообще говоря, не следует наличие определяющих соотношений для макроскопической задачи фильтрации (1.5). Макроскопический закон фильтрации может быть строго выведен только при некоторых дополнительных предположениях.

Так, например, пусть имеется однокомпонентная жидкость, и ядро $d(\zeta, \zeta')$ принимает очень большие значения, вследствие чего происходит быстрое выравнивание давления в ансамбле пор. Тогда получаем обычный макроскопический закон фильтрации Дарси

$$I_1^a = -\eta^{-1} K N_1(t, x^a) \partial_a p \quad (1.16)$$

$$K = \int k(\zeta, \zeta') (d\mu(\zeta)) d\mu(\zeta') \quad (1.17)$$

причем коэффициент макроскопической проницаемости K оказывается связанным с ядром $k(\zeta, \zeta')$ интегральным соотношением (1.17).

2. Примеры одномерных однофазных течений. В настоящем разделе исследуем одномерные нестационарные течения слабосжимаемой жидкости в среде с ансамблем пор, включая задачи об установлении стационарного режима и о переносе пассивной примеси. По предположению все полевые переменные зависят от времени t и одной пространственной координаты x^1 . Для однокомпонентной жидкости принимается линейное уравнение состояния

$$p = p_0 + \frac{n_1 - n_{10}}{\beta n_{10}} \quad (2.1)$$

причем предполагается малость изменения плотности $|n_1 - n_{10}|/n_{10} \ll 1$. Для двухкомпонентной жидкости по-прежнему принимается уравнение состояния (2.1), а вторая компонента рассматривается как пассивная примесь (*tracer*), не влияющая на основное течение. Из уравнений (1.3), (1.14), (1.15), (2.1) выводится линейное уравнение для давления

$$\beta \nu \partial_t p + \partial_1 i_* = j_* \quad (2.2)$$

$$i_*(t, x^1, \zeta) = -\frac{1}{\eta} \int k(\zeta, \zeta') \partial_1 p(t, x^1, \zeta') d\mu(\zeta') \quad (2.3)$$

$$j_*(t, x, \zeta) = \frac{1}{\eta} \int (d(\zeta, \zeta') (p(t, x^1, \zeta') - p(t, x^1, \zeta))) d\mu(\zeta') \quad (2.4)$$

Задачу для давления (2.2) можно решать численно или аналитически (см. ниже). При известном поле давления можно затем решить уравнение переноса для концен-

трации пассивной примеси $c = c(t, x^1, \zeta)$, которое также выводится из (1.3), (1.14), (1.15), (2.1)

$$\begin{aligned} & \nu(\zeta)\partial_t c(t, x^1, \zeta) + i_* (r, x^1, \zeta)\partial_1 c(t, x^1, \zeta) = \\ & = \frac{1}{\eta} \int d(\zeta, \zeta') (p(t, x^1, \zeta') - p(t, x^1, \zeta)) \times \\ & \times (\varepsilon c(t, x^1, \zeta') + (1 - \varepsilon)c(t, x^1, \zeta) d\mu(\zeta')) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим задачу для давления и связь с нелокальными моделями фильтрации. Для того чтобы выписать решение для давления в компактном виде, удобно ввести упрощающие обозначения. Будем рассматривать функции параметра ζ как элементы функционального пространства $L_2(d\mu(\zeta))$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этих обозначениях правые части выражений (2.3), (2.4) представляются в операторном виде $i_* = -\eta^{-1} \mathbf{K} \partial_1 p$, $j_* = -\eta^{-1} \mathbf{D} p$, где \mathbf{K} , \mathbf{D} – самосопряженные неотрицательные операторы. Далее нетривиальное (непостоянное) поле давления может быть обусловлено подходящими граничными и начальными условиями или же внешними источниками. Будем решать задачу в бесконечном пространстве с внешними источниками

$$\beta \nu \partial_t p + \partial_1 i_* = j_* + \vartheta_* s \quad (2.6)$$

где $\vartheta_* = \vartheta_*(\zeta) = 1 - \text{фиксированная функция параметра } \zeta$, $s = s(t, x^a)$ – произвольная функция источников. После выполнения преобразования Фурье по времени и координате решение для давления получается в операторном виде

$$\begin{aligned} p_F &= p_F(\omega, k, \zeta) = \int \exp(-i\omega t - ikx^1) p(t, x^1, \zeta) dt dx^1 \\ p_F &= \eta(i\eta\beta\nu\omega + k^2\mathbf{K} + \mathbf{D})^{-1} \vartheta_* s_F \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) позволяет найти связь между макроскопическим давлением $P = \varphi^{-1} \langle \vartheta_*, p \rangle$ и макроскопическим потоком $I = \langle \vartheta_*, i_* \rangle$. После необходимых подстановок получаем нелокальный макроскопический закон фильтрации

$$I(t, x^1) = -\frac{1}{\eta} \int \Pi(t-t', x^1-x'^1) \partial_1 P(t', x'^1) dt' dx'^1 \quad (2.8)$$

$$\Pi_F(\omega, k) = \varphi \frac{\langle \vartheta_*, \mathbf{K}(i\eta\beta\nu\omega + k^2\mathbf{K} + \mathbf{D})^{-1} \vartheta_* \rangle}{\langle \vartheta_*, (i\eta\beta\nu\omega + k^2\mathbf{K} + \mathbf{D})^{-1} \vartheta_* \rangle} \quad (2.9)$$

Функция (2.9) голоморфна при $\text{Im} \omega < 0$, поэтому согласно теореме Пэли-Винера [11] нелокальный закон фильтрации (2.8) удовлетворяет условию причинности. Нелокальные законы фильтрации (особенно релаксационные законы фильтрации с нелокальностью по времени) возникают в разных задачах, наблюдались в экспериментах и широко обсуждались в литературе [12–17]. Чисто релаксационный закон фильтрации получается из (2.8), (2.9) в пределе малых волновых чисел (или длинных волн). Таким образом, имеется связь моделей с ансамблем пор и макроскопическими релаксационными моделями. Отметим, что в полном соответствии с (1.17) имеет место переход к закону Дарси для медленных процессов и длинных волн с макроскопическим коэффициентом проницаемости

$$K = \int \Pi(t, x^1) dt dx^1 = \Pi_F(0, 0) \quad (2.10)$$

Приведем численные решения задачи для давления и пассивной примеси. Пусть параметр ζ имеет смысл характерного размера пор. В качестве меры на ансамбле пор ис-

пользовалось логнормальное распределение. Выражения для ядер $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$ были также построены на основе логнормального распределения

$$d\mu(\zeta) = g(\zeta)d\zeta, \quad g(\zeta) = \frac{1}{\zeta\sigma_*\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2\left(\frac{\zeta}{l}\right)\right] \quad (2.11)$$

$$v(\zeta) = \varphi \exp\left(-\frac{9}{2}\sigma_*^2\right) \zeta^3 \Gamma^{-3} \quad (2.12)$$

$$k(\zeta, \zeta') = K\Xi \frac{l^2\theta(\zeta)\theta(\zeta')}{\zeta\zeta'\sigma_*\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2\left(\frac{\zeta}{\zeta'}\right)\right] \quad (2.13)$$

$$d(\zeta, \zeta') = d_0 \frac{l^2}{\zeta\zeta'\sigma_*\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_*^2} \ln^2\left(\frac{\zeta}{\zeta'}\right)\right], \quad \theta(\theta) = \exp\left[-\frac{(\zeta - \zeta_*')^2}{\alpha}\right]$$

Использованные числовые характеристики ансамбля пор:

$$l = 0.4 \text{ мкм}, \quad \sigma_* = 0.459, \quad \zeta_* = 0.7 \text{ мкм}, \quad \alpha = 0.015 \text{ мкм}^2, \quad \varphi = 0.3, \quad K = 10^{-12} \text{ м}^2, \quad d_0 = 10^{-7}$$

Безразмерный параметр Ξ определялся численно из условия нормировки (1.17). Ядро $k(\zeta, \zeta')$ в формуле (2.13) соответствует ситуации, при которой лишь часть пор имеет гидродинамическую связанность в пространстве (“открытые” поры), где параметр ζ_* – центр распределения открытых пор, а параметр α определяет ширину данного распределения. Подчеркнем, что сохраняется обмен компонентами между “закрытыми” и “открытыми” порами в одном и том же элементарном макрообъеме. Тот факт, что ядра (2.13) допустимы (т.е. определяют положительно определенные интегральные операторы), доказан в Приложении. Принималось, что ансамбль пор насыщен жидкостью с параметрами $\eta = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\beta = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$. Длина моделируемого образца пористой среды составляла $L = 0.05 \text{ м}$.

Рассчитаны две задачи. Во-первых, при начальном давлении в среде $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ на границах поддерживались значения давления $1.2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $0.8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ соответственно. Исследовалась динамика установления давления в порах. Результаты представлены на фиг. 1 в безразмерном времени $\tau = t/T$, $T = \eta\beta\phi L^2 K^{-1}$.

Во-вторых, при установившемся перепаде $\Delta p = 5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ в образце пористой среды с левого конца начиналась закачка примеси с концентрацией $c = 0.01$. Исследовалась динамика распространения примеси по порам ансамбля. Результаты представлены на фиг. 2 в безразмерном времени $\tau_c = t/T_c$, $T_c = \eta\phi L^2 (K\Delta p)^{-1}$.

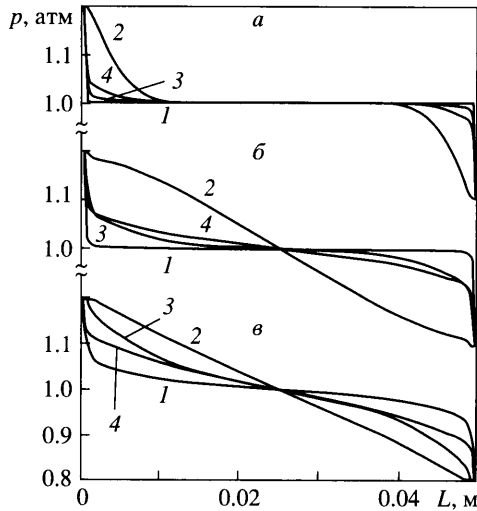
Скорость установления давления в различных порах существенно различна (фиг. 1). В первую очередь давление восстанавливается в открытых порах, для которых существует гидродинамическая связанность в пространстве (между соседними элементарными макрообъемами). Далее благодаря обмену компонентами между порами в одном и том же элементарном макрообъеме начинается восстановление давления и в закрытых порах, не имеющих гидродинамической связанности в пространстве. Интенсивность этого процесса определяется значениями ядра $d(\zeta, \zeta')$.

Аналогично протекает и распространение примеси по порам ансамбля (фиг. 2), благодаря перетокам между порами примесь постепенно проникает из открытых пор в закрытые.

3. Основные понятия модели ансамбля пор: двухфазный случай. Рассмотрим ситуацию, когда в порах могут быть две жидкие или газообразные фазы: фаза A и фаза B . Тогда в каждой поре определены плотности компонентов и насыщенности фаз

$$n_{iA} = n_{iA}(t, x^a, \zeta), \quad n_{iB} = n_{iB}(t, x^a, \zeta), \quad i = 1, \dots, M \quad (3.1)$$

$$\omega_A = \omega_A(t, x^a, \zeta), \quad \omega_B = \omega_B(t, x^a, \zeta), \quad \omega_A + \omega_B = 1$$



Фиг. 1. Распределение давления в ансамбле пор для безразмерного времени $\tau = t/T$: а – $\tau = 10^{-2}$; б – $\tau = 0.5$; в – $\tau = 20$; $\zeta \sim 0.3, \sim 0.55, 3, \zeta \sim 0.8$ мкм (кривые 1–3) давление, усредненное по ансамблю пор (4)

где $0 \leq \omega_A, \omega_B \leq 1$. Соответствующие макроскопические насыщенности фаз $s_A(t, x^a)$, $s_B(t, x^a)$ и макроскопические плотности компонентов $N_{iA}(t, x^a)$, $N_{iB}(t, x^a)$ определяются по формулам

$$s_\Lambda(t, x^a) = \varphi^{-1} \int \omega_\Lambda(t, x^a, \zeta) v(\zeta) d\mu(\zeta) \quad (3.2)$$

$$N_{i\Lambda}(t, x^a) = \varphi^{-1} s_\Lambda(t, x^a)^{-1} \int \omega_\Lambda(t, x^a, \zeta) n_{i\Lambda}(t, x^a, \zeta) v(\zeta) d\mu(\zeta) \quad (3.3)$$

$\Lambda = A, B$

Определим свободную энергию смеси H в элементарном макрообъеме пористой среды аналогично (1.7), учитывая свободную энергию в объеме H_b и поверхностную энергию H_s ,

$$H = H_b + H_s$$

$$H_b = \int (\omega_A f(n_{iA}) + \omega_B f(n_{iB})) v(\zeta) d\mu(\zeta) \quad (3.4)$$

$$H_s = \int (\omega_A(\zeta) \gamma_{As} + \omega_B(\zeta) \gamma_{Bs}) \sigma(\zeta) d\mu(\zeta) + \\ + \int \omega_A(\zeta) \omega_B(\zeta') \gamma_{AB} \Delta(\zeta, \zeta') (d\mu(\zeta)) d\mu(\zeta')$$

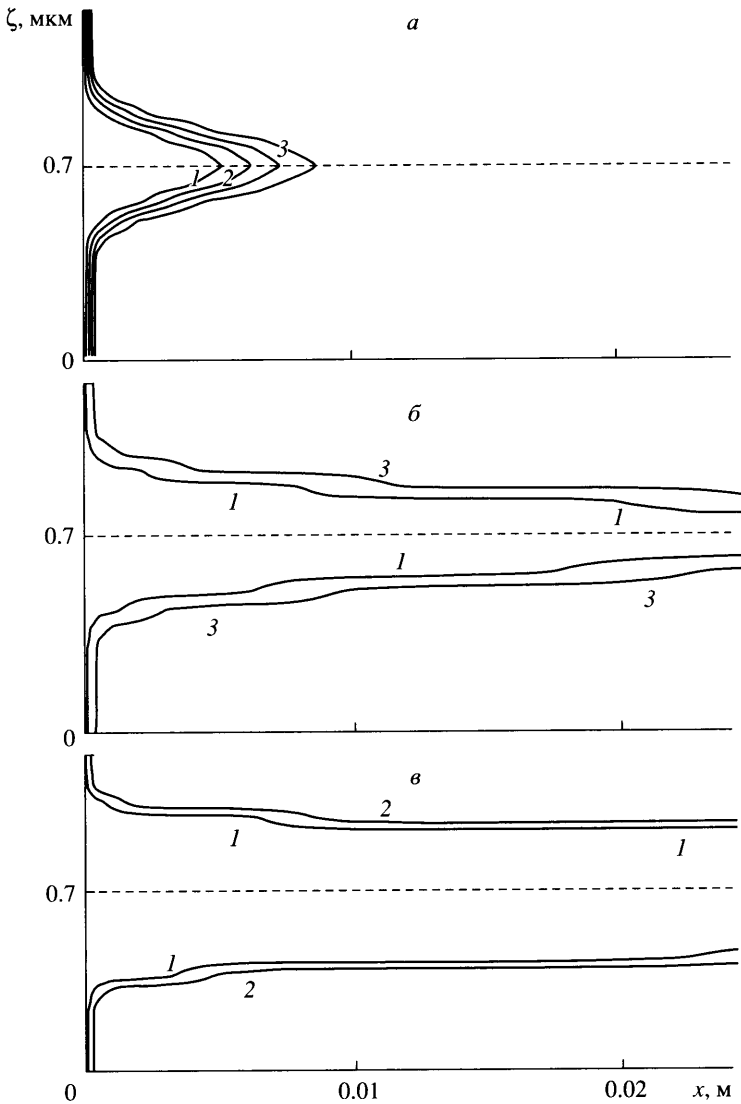
где γ_{As} , γ_{Bs} – коэффициенты поверхностного натяжения на контакте фазы A и B с поверхностью поры, γ_{AB} – коэффициент поверхностного натяжения на контакте между фазами A и B . Все коэффициенты поверхностного натяжения считаются постоянными. Симметричное ядро $\Delta(\zeta, \zeta')$ характеризует площадь поверхности контакта между порами ζ, ζ' .

Исследуем равновесные распределения смеси в ансамбле пор. Устойчивое равновесное распределение должно обеспечивать минимум функционала свободной энергии (3.4) при дополнительном условии, что общее число молекул компонентов смеси фиксировано

$$N_i = \int (\omega_A n_{iA} + \omega_B n_{iB}) v(\zeta) d\mu(\zeta) \quad (3.5)$$

Поэтому дифференциальное условие равновесия имеет вид дифференциального неравенства с множителями Лагранжа λ_i

$$\delta H - \lambda_i \delta N_i \geq 0 \quad (3.6)$$



Фиг. 2. Динамика распространения пассивной примеси в ансамбле пор

С помощью (1.6) и (3.4) неравенство (3.6) можно переписать в развернутом виде

$$\int (\omega_A(\kappa_i(n_{jA})) - \lambda_i) \delta n_{iA} + \omega_B(\kappa_i(n_{jB})) - \lambda_i) \delta n_{iB} v(\zeta) d\mu(\zeta) + \int d\mu(\zeta) (\delta \omega_A \Psi_A + \delta \omega_B \Psi_B) \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\Psi_A = (f(n_{iA}) - \lambda_i n_{iA}) v(\zeta) + \gamma_{As} \sigma(\zeta) + \gamma_{AB} \int \Delta(\zeta, \zeta') \omega_B(\zeta') d\mu(\zeta')$$

$$\Psi_B = (f(n_{iB}) - \lambda_i n_{iB}) v(\zeta) + \gamma_{Bs} \sigma(\zeta) + \gamma_{AB} \int \Delta(\zeta, \zeta') \omega_A(\zeta') d\mu(\zeta')$$

При варьировании следует иметь в виду, что ω_A, ω_B связаны соотношением $\omega_A + \omega_B = 1$. Кроме того, нужно учитывать, что величины n_{iA} (или n_{iB}) физически не определены, ес-

ли $\omega_A = 0$ (или $\omega_B = 0$). Тем не менее для математического единообразия удобно считать n_{iA} , n_{iB} непрерывно определенными при всех насыщенных. Поэтому имеется три случая:

1) $\omega_A = 0$, $\delta\omega_A \neq 0$. В силу произвольности δn_{iB} имеют место условия равновесия

$$\kappa_i(n_{iB}) = \lambda_i, \quad \Psi_A \geq \Psi_B \quad (3.8)$$

2) $\omega_B = 0$, $\delta\omega_B \geq 0$. В силу произвольности δn_{iA} имеют место условия равновесия

$$\kappa_i(n_{iA}) = \lambda_i, \quad \Psi_B \geq \Psi_A \quad (3.9)$$

3) $0 < \omega_A < 1$. В силу произвольности δn_{iA} , δn_{iB} , $\delta\omega_A$ имеют место условия равновесия

$$\kappa_j(n_{iB}) = \lambda_i, \quad \kappa_i(n_{iA}) = \lambda_i \text{ и } \Psi_A = \Psi_B \quad (3.10)$$

Равенство химических потенциалов в разных порах для каждой фазы влечет равенство давлений в разных порах для каждой фазы. Далее, используя соотношение (1.6), можно представить равенство $\Psi_A = \Psi_B$ как соотношение для капиллярного скачка давления

$$p_A(n_{iA}) - p_B(n_{iB}) = \Phi(\zeta) = (\gamma_{As} - \gamma_{Bs}) \frac{\sigma(\zeta)}{\nu(\zeta)} + \frac{\gamma_{AB}}{\nu(\zeta)} \int \Delta(\zeta, \zeta') (\omega_B(\zeta') - \omega_A(\zeta')) d\mu(\zeta') \quad (3.11)$$

Правая часть соотношения (3.11) не зависит от плотностей компонентов и является функцией только параметра ζ . Если фиксировано некоторое значение Φ_* , то уравнение $\Phi(\zeta) = \Phi_*$ определяет поры, в которых сосуществуют две фазы с капиллярным скачком Φ_* . При этом поры $\Phi(\zeta) > \Phi_*$ оказываются заполненными одной фазой, а поры $\Phi(\zeta) < \Phi_*$ – другой. Зная распределение фаз по порам, можно вычислить макроскопическую насыщенность (см. (3.2)) и, следовательно, рассчитать кривую капиллярного давления. Важно, однако, что в основе этого рассуждения лежит неявное предположение о возможности свободного обмена веществом для всех пор.

Пусть теперь поры могут обмениваться веществом только с порами, которые имеют близкое значение ζ (например, когда параметр σ_* в разд. 2 очень мал). Пусть, кроме того, множество пор $\Phi(\zeta) > \Phi_*$ (или множество пор $\Phi(\zeta) < \Phi_*$) распадается на несвязные подмножества. Тогда заполнение этих несвязных подмножеств разными фазами не будет нарушать условий локального минимума (3.6). Такое распределение будет обеспечивать локальный минимум свободной энергии, но этот минимум не будет глобальным. При этом оказывается, что одному значению капиллярного скачка можно поставить в соответствие более одного значения макроскопической насыщенности. Для различных сценариев вытеснения одной фазы другой описанный эффект будет проявляться как гистерезис капиллярного давления. Конкретная численная модель данного явления приведена в разд. 4.

Перейдем теперь к динамике двухфазной многокомпонентной смеси. Примем динамические уравнения в виде условий сохранения компонентов аналогично (1.3)

$$\partial_t(\nu(\omega_A n_{iA} + \omega_B n_{iB})) + \partial_a i_i^a = j_i \quad (3.12)$$

где, как и раньше, $i_i^a = i_i^a(t, x^b, \zeta)$ – пространственный поток компонента i , $j_i = j_i(t, x^b, \zeta)$ – приток компонента i к поре ζ из других пор в том же элементарном макрообъеме, удовлетворяющий условию (1.4). Кроме того, принимаем условия фазового равновесия (3.11) и $\kappa_i(n_{jA}) = \kappa_i(n_{jB})$.

Из выражения (3.4), уравнения (3.12), условия фазового равновесия (3.11) и $\kappa_i(n_{jA}) = \kappa_i(n_{jB})$ выводится уравнение для эволюции свободной энергии

$$\partial_t H + \partial_a H^a = \Sigma; \quad H^a = \int i_i^a \kappa_i d\mu(\zeta) \quad (3.13)$$

$$\Sigma = \int (j_i \kappa_i + i_i^a \partial_a \kappa_i) d\mu(\zeta)$$

Как и в разд. 1, примем постоянные коэффициенты вязкости фаз η_A, η_B , и будем считать, что перенос осуществляется только за счет перепада давления между порами. Тогда имеется двухфазная модель переноса, аналогичная (1.14), (1.15) и удовлетворяющая неравенству $\Sigma \leq 0$

$$i_i^a(t, x^b, \zeta) = i_{iA}^a(t, x^b, \zeta) + i_{iB}^a(t, x^b, \zeta) \quad (3.14)$$

$$i_{i\Lambda}^a = -\frac{\omega_\Lambda n_{i\Lambda}}{\eta_\Lambda} \int k(\zeta, \zeta') \omega'_\Lambda \partial_a p'_\Lambda d\mu(\zeta') \quad (3.15)$$

$$j_i^a = j_{iA}^a + j_{iB}^a \quad (3.16)$$

$$j_{i\Lambda} = \frac{\omega_\Lambda}{\eta_\Lambda} \int d(\zeta, \zeta') \omega'_\Lambda (p'_\Lambda - p_\Lambda) (\varepsilon_\Lambda n'_{iA} + (1 - \varepsilon_\Lambda) n_{i\Lambda}) d\mu(\zeta') \quad (3.17)$$

где $\Lambda = A, B$; ядра $k(\zeta, \zeta'), d(\zeta, \zeta')$ – симметричные, а соответствующие этим ядрам интегральные операторы – неотрицательные. В соответствии с выражениями (3.15) можно рассчитать фазовые проницаемости (ср. с (1.17))

$$K_\Lambda = \int k(\zeta, \zeta') \omega_\Lambda \omega'_\Lambda (d\mu(\zeta)) d\mu(\zeta') \quad (3.18)$$

Соотношения (3.14)–(3.17) делают модель двухфазного переноса в ансамбле пор замкнутой. Конечно, возможные процессы сильно зависят от конкретного вида ядер $k(\zeta, \zeta'), d(\zeta, \zeta')$. Ниже в разд. 5 исследованы одномерные течения двухфазной смеси для одной частной реализации определяющих соотношений (3.14)–(3.17).

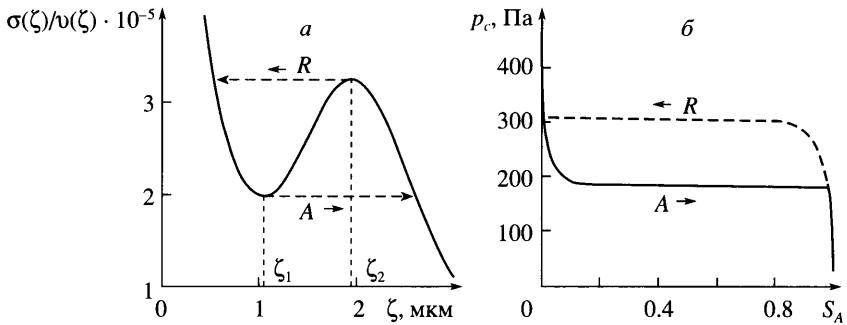
4. Численное моделирование капиллярного гистерезиса. Для иллюстрации возможности описания капиллярного гистерезиса в теории ансамбля пор было выполнено численное моделирование этого явления на двух простых моделях. Было принято, что влияние слагаемого в выражении для поверхностной энергии (3.4), связанного с ядром Δ , пренебрежимо мало. Тогда выражение для капиллярного давления (3.11) принимает вид

$$p_{cap} = \Phi(\zeta) = (\gamma_{As} - \gamma_{Bs}) \sigma(\zeta) \nu(\zeta)^{-1} \quad (4.1)$$

В модели (4.1) равновесные насыщенности фаз в порах могут принимать только значения 0 или 1. Как было указано выше, капиллярный гистерезис связан с возможной несвязностью множества пор $\Phi(\zeta) > \Phi_*$ (или множества пор $\Phi(\zeta) < \Phi_*$) и, следовательно, с неоднозначностью заполнения пор фазами при фиксированной левой части (4.1).

Пример 1. Одномерный параметр ζ пробегает действительные положительные значения и имеет смысл характерного размера пор. Если функция $\sigma(\zeta) \nu(\zeta)^{-1}$ монотонна, то множество пор $\Phi(\zeta) < \Phi_*$ (или множество пор $\Phi(\zeta) > \Phi_*$) всегда связно (оно представляет собой интервал на действительной оси), и капиллярный гистерезис отсутствует. Исследовалась модель с немонотонной функцией $\sigma(\zeta) \nu(\zeta)^{-1}$

$$d\mu(\zeta) = g(\zeta) d\zeta, \quad g(\zeta) = \frac{2\zeta}{l^2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l^2}\right)$$



Фиг. 3. Гистерезис капиллярного давления для одномерного параметра ζ : a – немонотонная функция $\sigma(\zeta)/\nu(\zeta)$, b – кривые капиллярного давления для процессов дренирования (R) и пропитки (A)

$$\nu = \nu(\zeta) = \frac{4\varphi\left(\frac{\zeta}{l}\right)^3}{3\pi}$$

$$\sigma = \sigma(\zeta) = S\Theta^{-1}\left(\frac{\zeta}{l}\right)^2 \left(1 + A\left(\frac{\zeta}{l}\right)^Z \exp(-\alpha l^{-2}\zeta^2)\right)$$

$$\Theta = 1 + (1 + \alpha)^{-(2+0.5Z)} \Gamma(2 + 0.5Z)$$

где Γ – гамма-функция, $\varphi = 0.18$, $S = 46476 \text{ м}^{-1}$ – удельная поверхность, $l = 1 \text{ мкм}$, $\alpha = 0.87$, $A = 0.35$, $Z = 8$. Были приняты следующие коэффициенты поверхностного натяжения: $\gamma_{As} = -0.008 \text{ нм}^{-1}$ (фаза A – смачивающая), $\gamma_{Bs} = 0.003 \text{ нм}^{-1}$ (фаза B – несмачивающая). Результаты расчетов капиллярного давления представлены на фиг. 3. Расчеты в целом согласуются с экспериментальными кривыми капиллярного гистерезиса [7], однако экспериментальные кривые капиллярного давления для процессов дренажа и пропитки наклонные, а расчетные – параллельны оси абсцисс в широком диапазоне изменения насыщенности. Более точное описание капиллярного гистерезиса достигается в следующем примере.

Пример 2. Параметр $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ является двумерным вектором, причем параметры ζ_1, ζ_2 пробегают действительные положительные значения. Параметры ζ_1, ζ_2 могут представлять, например, главные радиусы инерции пор. Исследовалась следующая модель:

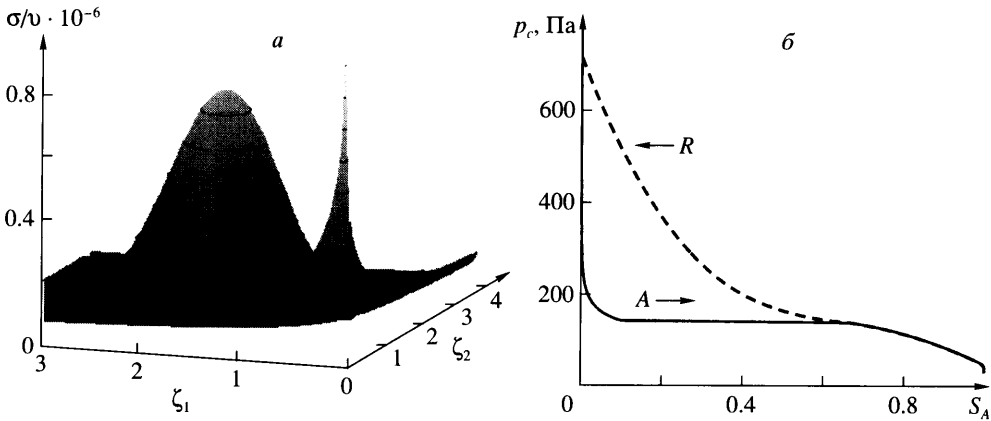
$$d\mu(\zeta) = g(\zeta_1)g(\zeta_2)d\zeta_1d\zeta_2, \quad g(\zeta_i) = \frac{2\zeta_i}{l^2} \exp\left(-\frac{\zeta_i}{l}\right)^2$$

$$\nu(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\varphi}{\Xi} \left(\frac{\zeta_1\zeta_2}{l^2}\right)^{3/2}, \quad \Xi = \frac{9}{16} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\sigma(\zeta_1, \zeta_2) = S\Theta^{-1}\left(\frac{\zeta_1\zeta_2}{l^2}\right) \left(1 + A\left(\frac{\zeta_1\zeta_2}{l^2}\right)^Z \exp(-\alpha l^{-2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2))\right)$$

$$\Theta = \frac{\pi}{4} + A(1 + \alpha)^{-(3+Z)} \Gamma^2\left(\frac{3+Z}{2}\right)$$

где Γ – гамма-функция, $\varphi = 0.18$, $S = 46476 \text{ м}^{-1}$ – удельная поверхность, $l = 1.5 \text{ мкм}$, $\alpha = 3.3$, $A = 10^3$, $Z = 12$.



Фиг. 4. Гистерезис капиллярного давления для двумерного параметра ζ : *a* – функции $\sigma(\zeta)/\nu(\zeta)$, *б* – кривые капиллярного давления для процессов дренирования (*R*) и притки (*A*)

Коэффициенты поверхностного натяжения были те же, что и в примере 1. Результаты расчетов капиллярного давления представлены на фиг. 4.

Результаты моделирования демонстрируют хорошее соответствие с экспериментальными кривыми капиллярного гистерезиса, описанными в литературе [7]. Форма гистерезиса также адекватна эксперименту. Отметим, что, сравнивая экспериментальную кривую капиллярного гистерезиса с расчетной кривой, можно произвести оценку параметров, характеризующих ансамбль пор.

5. Одномерное двухфазное течение в модели ансамбля пор: аналог задачи Баклея-Левевергга. Используем теорию разд. 3 для вывода упрощенной модели одномерного двухфазного течения. Примем, что имеется смесь двух однокомпонентных несжимаемых жидкостей, причем фазовые переходы отсутствуют. Пусть параметр ζ – одномерный (например, характерный размер пор), $d\mu(\zeta) = g(\zeta)d\zeta$, где $g(\zeta)$ – весовая функция. Определяющие соотношения (3.14)–(3.17) выпишем для частного вида ядер $k(\zeta, \zeta')$, $d(\zeta, \zeta')$:

$$k(\zeta, \zeta') = k_* \left(\frac{\zeta + \zeta'}{2} \right) \delta(\zeta, \zeta'), \quad d(\zeta, \zeta') = \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \zeta'} \left(d_* \left(\frac{\zeta + \zeta'}{2} \right) \delta(\zeta, \zeta') \right) \quad (5.1)$$

Здесь $k_*(\zeta)$, $d_*(\zeta)$ – гладкие положительные функции, $\delta(\zeta, \zeta')$ – симметричная обобщенная функция (аналог δ -функции Дирака), удовлетворяющая соотношению

$$\int \delta(\zeta, \zeta') h(\zeta') d\mu(\zeta') = h(\zeta) \quad (5.2)$$

для произвольной гладкой функции $h(\zeta)$. По предположению все полевые переменные зависят от времени t и одной пространственной координаты x^1 . Капиллярными эффектами будем пренебрегать. Тогда с учетом соотношений (5.1), (5.2) уравнения двухфазного течения (3.12), (3.14)–(3.17) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nu \partial_t \omega_\Lambda + \partial_1 i_\Lambda &= j_\Lambda \\ i_\Lambda &= -\eta_\Lambda^{-1} \omega_\Lambda^2 k_*(\zeta) \partial_1 p \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$j_\Lambda = \frac{1}{\eta_\Lambda g(\zeta) \partial \zeta} \left(g(\zeta) \omega_\Lambda^2 d_*(\zeta) \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)$$

где $\Lambda = A, B$.

Сложение уравнений (5.3) дает эллиптическое уравнение на давление

$$\partial_1(\Omega k_*(\zeta)\partial_1 p) + \frac{\partial}{g(\zeta)\partial\zeta}\left(g(\zeta)\Omega d_*(\zeta)\frac{dp}{\partial\zeta}\right) = 0$$

$$\Omega = \eta_A^{-1}\omega_A^2 + \eta_B^{-1}\omega_B^2$$
(5.4)

Уравнение (5.4) следует решать при заданных давлениях на границах пространственного интервала $p|_{x^1=a} = p_a$, $p|_{x^1=b} = p_b$ и при условии $\partial p/\partial\zeta \rightarrow 0$ при больших и малых ζ . Теперь используя (5.3), (5.4), можно получить нелинейное уравнение переноса для насыщенности в порах:

$$\nu\partial_t\omega_A - k_*(\zeta)\partial_1 p\partial_1 F - d_*(\zeta)\frac{\partial p}{\partial\zeta}\frac{\partial F}{\partial\zeta} = 0, \quad F = \frac{\omega_A^2}{\eta_A\Omega}$$
(5.5)

здесь F – аналог функции Баклея–Левретта, а уравнение (5.4) представляет собой аналог теории Баклея–Левретта [3, 6] для среды с ансамблем пор. Динамика насыщенности подчиняется нелинейному гиперболическому уравнению (5.5), и в соответствии с общей теорией возможны решения со скачками насыщенности. На скачке должны выполняться условия сохранения

$$\left[U\nu\omega_A + \left(k_*(\zeta)l_1\partial_1 p + d_*(\zeta)l_2\frac{\partial p}{\partial\zeta} \right) F \right] = 0$$
(5.6)

где U и (l_1, l_2) – скорость скачка и нормаль к поверхности разрыва в плоскости (x^1, ζ) соответственно, $[a]$ – скачок величины a . Кроме соотношения (5.6) на скачке насыщенности должны выполняться также условия устойчивости Лакса–Олейник [18, 19].

Таким образом, одномерное двухфазное течение в ансамбле пор для ядер (5.1) в значительной степени аналогично двумерной теории Баклея–Левретта. Поэтому многие из ранее полученных результатов двумерной двухфазной фильтрации могут быть перенесены в теорию одномерного двухфазного течения в ансамбле пор.

Заключение. Сформулированы базовые уравнения модели ансамбля пор для одно- и двухфазного течения в пористых средах. С помощью численных расчетов показано, что предложенная модель позволяет адекватно описать гидродинамические процессы, определяемые структурой межпоровых связей. Например, процесс установления порового давления и распространения пассивной примеси в случае, когда часть пор закрыта (т.е. отсутствует гидродинамическая связанность в пространстве между соседними макрообъемами). Это существенное преимущество модели ансамбля пор по сравнению с моделью сплошной среды, где индивидуальные свойства пор учитываются опосредованно в макроскопических коэффициентах пористости и проницаемости.

Предложена простая модель капиллярного гистерезиса, связанная с немонотонностью функции отношения площади поры к ее объему. Результаты численных расчетов гистерезиса капиллярного давления демонстрируют хорошее соответствие с экспериментальными данными, описанными в литературе.

В случае одномерного двухфазного течения уравнения модели ансамбля пор могут быть сведены к аналогу двухфазной теории Баклея–Левретта. Продемонстрирована связь рассматриваемых моделей с моделями релаксационной фильтрации.

Работа поддержана международной нефтяной и газовой компанией Schlumberger Oil-field Services (RUP1–1410).

Приложение

В настоящем приложении обсуждается функциональный вид допустимых ядер. В самом общем случае ядро $k(\zeta, \zeta')$ определяет положительный самосопряженный оператор в $L_2(d\mu(\zeta))$ [20] в том и только том случае, когда оно представляется в виде

$$k(\zeta, \zeta') = \int h(\zeta, \lambda)h(\zeta', \lambda)d\lambda \quad (\text{П.1})$$

где $h(\zeta, \lambda)$ – произвольная функция (возможно, обобщенная), λ – спектральный параметр. Однако форма (П. 1) неудобна для приложений. Поэтому докажем следующее утверждение.

Пусть ζ – одномерный действительный параметр, $\psi_1(\zeta)$ – монотонная гладкая функция, неограниченная ни сверху, ни снизу, $\psi_2(\zeta)$ – произвольная гладкая функция. Тогда ядро

$$k(\zeta, \zeta') = \exp[-(\psi_1(\zeta) - \psi_1(\zeta'))^2]\psi_2(\zeta)\psi_2(\zeta') \quad (\text{П.2})$$

определяет самосопряженный положительный оператор. Заметим, что достаточно доказать неравенство

$$\int k(\zeta, \zeta')h(\zeta)h(\zeta')g(\zeta)g(\zeta')d\zeta d\zeta' \geq 0 \quad (\text{П.3})$$

для произвольной гладкой функции $h(\zeta)$. Легко видеть, что переопределением параметра ζ и функции $h(\zeta)$ проблема сводится к случаю $\psi_1(\zeta) = \zeta$, $\psi_2(\zeta) = 1$, $g(\zeta) = 1$. Выполняя преобразование Фурье по ζ , получаем

$$\int k(\zeta, \zeta')h(\zeta)h(\zeta')d\zeta d\zeta' = (2\pi)^{-1} \int \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{4}\right) |h^*(\vartheta)|^2 d\vartheta \geq 0$$

$$h^*(\vartheta) = \int \exp(-i\vartheta\zeta)h(\zeta)d\zeta$$

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 628 с.
2. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1947. 244 с.
3. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
4. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 339 с.
5. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975. 216 с.
6. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
7. Dullien F.A.L. Porous media: fluid transport and pore structure. San Diego Acad. Press, 1992. 574 p.
8. Santos A., Bedrikovetski P. Size exclusion during particle suspension transport in porous media: stochastic and averaged equations // Comput. and Appl. Math. 2004. V. 23. № 2, 3. P. 1–24.
9. Пригожин И., Дефэй Р. Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 510 с.
10. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
11. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 331 с.
12. Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во КГУ, 1980. 136 с.
13. Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во КГУ, 1987. 113 с.

14. Динариев О.Ю., Николаев О.В. Релаксационные явления в насыщенных пористых средах. Линейная теория // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 469–475.
15. Динариев О.Ю., Николаев О.В. О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58. № 1. С. 78–82.
16. Динариев О.Ю., Николаев О.В. Об обобщении закона Дарси для нестационарных режимов фильтрации // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 31–36.
17. Динариев О.Ю., Шапиро А.А. Нелокальные точные решения кинетической теории газа в пористой среде // Журн. техн. физ. 1996. Т. 66. Вып. 1. С. 24–34.
18. Lax P.D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973. 48 p.
19. Марсден Дж.Э., Чорин А. Математические основы механики жидкости. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 204 с.
20. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 1063 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.XI.2006