

УДК 532.528

© 2007 г. О.Г. ГОМАН, Ю.А. СЕМЕНОВ

**КОСОЙ ВХОД КЛИНА В ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ**

Предложен новый подход к решению автомодельной задачи входа клина в идеальную жидкость под произвольным углом к свободной поверхности. Метод решения основан на построении выражения комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного. Для определения функций модуля и угла вектора скорости на свободной границе получены интегральное и интегродифференциальное уравнения. Представлены результаты расчетов формы свободной поверхности, углов контакта свободной поверхности и клина, а также коэффициентов гидродинамических сил.

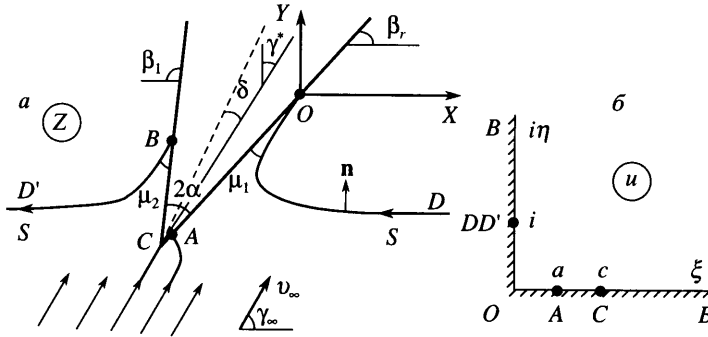
*Ключевые слова:* проникание, течения со свободной границей, автомодельность, комплексный потенциал.

Задача проникания тел в жидкость имеет важное прикладное значение для описания явления качки корабля, проектирования глиссирующих судов, полупогружных винтов, гидросамолетов, а также в некоторых технологиях металлургии.

Взаимодействие тел с жидкостью на начальной стадии их входа в жидкость обусловлено высоким уровнем возникающих нагрузок и существенной нестационарностью течения. Указанному классу задач гидродинамики свойственны значительные трудности, связанные с присутствием свободной границы и линии контакта трех фаз. К настоящему времени детально исследована только автомодельная задача, т.е. задача проникания клина с постоянной скоростью. Приближенное решение этой классической задачи впервые было получено в [1] для малых углов килеватости и для случая косоугольного входа клина [2]. Полное решение задачи в нелинейной постановке для нормального входа найдено [3] методом конформных отображений путем построения функции Вагнера и нахождения отображающей функции с помощью интегральной формулы Шварца. Обширную литературу по проблеме проникания тел в жидкость можно найти в монографиях [4–6] и обзоре [7].

Наиболее полно к настоящему времени решение рассматриваемой задачи было дано в [8], в которой дальнейшее развитие получил подход, предложенный в [3], и задача была сведена к решению некоторой нелинейной системы интегральных уравнений, а также выполнены и представлены некоторые расчеты.

В данной работе дается полное решение нелинейной автомодельной задачи входа клина в невозмущенную идеальную несжимаемую жидкость под произвольным углом к свободной поверхности. Предложенный метод решения отличается от используемого в [3, 8] и основывается на интегральном представлении выражений сопряженной комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного. Эти выражения получаются в результате обобщения принципа симметрии на случай нестационарных свободных границ и содержат в явном виде модуль и угол наклона вектора скорости к свободной границе как функции параметрической переменной. Указанные интегральные представления сводят рассматриваемую задачу к системе нелинейных уравнений, включающей интегральное и интегродифференциальное уравнение.



Фиг. 1. Схема течения: а – физическая область течения; б – область параметра

**1. Постановка задачи.** Математическая формулировка автомодельной задачи погружения для симметричного клина, проникающего в неподвижную жидкость, дана в [1, 3]. В данной работе для удобства рассматривается обратное течение, реализующееся в результате натекания полупространства жидкости на неподвижный клин. Схема течения представлена на фиг. 1.

Итак, полупространство идеальной несжимаемой и невесомой жидкости набегает на клин с постоянной скоростью  $v_\infty$ , направленной под углом  $\gamma_\infty$  к невозмущенной свободной поверхности. Начало системы координат находится в точке контакта свободной поверхности с правой щекой клина, где скорость жидкости равна  $v_0$ . Клин имеет при вершине угол  $2\alpha$ . Ось симметрии клина может быть отклонена от направления скорости на угол  $\delta$ . Форма свободной поверхности неизвестна заранее и подлежит определению из решения задачи.

В автомодельных координатах  $x = X/v_0 t$ ,  $y = Y/v_0 t$ , где  $t$  – время, переменная область течения в физической плоскости преобразуется в стационарную область в плоскости  $x, y$ . Комплексный потенциал автомодельного течения представим в виде

$$W(Z, t) = \Phi(Z, t) + i\Psi(Z, t) = v_0^2 t w(z) = v_0^2 t [\phi(z) + i\psi(z)], \quad z = x + iy \quad (1.1)$$

Комплексная скорость  $dw/dz$  и производная комплексного потенциала  $dw/du$  ищутся в области параметрического переменного  $u = \xi + i\eta$ , в качестве которой удобно выбрать первый квадрант, поскольку в этом случае наиболее просто обобщается принцип симметрии. Соответствие точек в физической области и области параметра показано на фиг. 1.

В случае несимметричного обтекания точка торможения потока  $A$  находится на одной из щек клина, а скорость в вершине клина  $C$  обращается в бесконечность; следовательно, сопряженная комплексная скорости (далее комплексная скорость для краткости) имеет нуль в точке  $A$  и полюс в точке  $C$ . Пользуясь методом особых точек Чаплыгина [9], можно показать, что в точке  $u = a$  находится простой нуль, а в точке  $u = c$  полюс, порядок которого равен  $(1 - 2\alpha/\pi)$ . Поскольку на свободной границе модуль скорости считается заданным, то при симметричном продолжении области параметра через мнимую ось, которая соответствует свободной границе, в симметричных точках  $u = -a$  и  $-c$  следует поместить инверсные особенности того же порядка, то есть полюс первого порядка в точке  $u = -a$  и нуль порядка  $(1 - 2\alpha/\pi)$  в  $-c$ . В остальных точках области течения скорость ограничена и не обращается в нуль. Следовательно, главная часть выражения комплексной скорости, определяемая особыми точками, имеет вид

$$\frac{dw}{dz} \sim \left( \frac{u-a}{u+a} \right) \left( \frac{u+c}{u-c} \right)^{(1-2\alpha/\pi)}$$

На правой части свободной поверхности модуль скорости изменяется от значения  $v_0$  в точке контакта с правой щекой клина до значения  $v_\infty$  на бесконечности; на левой части – от значения  $v_\infty$  до значения  $v_b$  в точке контакта свободной поверхности с левой щекой клина.

В [10] была получена регулярная часть выражения комплексной скорости, удовлетворяющая заданному значению модуля скорости на свободной границе  $\mathcal{U}(\eta)$  (как функции от мнимой координаты  $\eta$  в области параметра  $u$ ). Эта регулярная часть имеет вид

$$\frac{dw}{dz} \sim v_0 \exp \left[ -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \left( \frac{i \eta - u}{i \eta + u} \right) d \eta \right]$$

Окончательное выражение комплексной скорости (с учетом направления скорости в точке  $O$ ) имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = v_0 \left( \frac{u-a}{u+a} \right) \left( \frac{u+c}{u-c} \right)^{(1-2\alpha/\pi)} \exp \left[ -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \left( \frac{i \eta - u}{i \eta + u} \right) d \eta - i(\gamma_\infty + \alpha + \delta) \right] \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) можно рассматривать как обобщение известного принципа симметрии (или метода особых точек как варианта принципа симметрии). Следует отметить, что метод особых точек в [9] был сформулирован при условии постоянства модуля скорости на свободной границе, тогда как в данном случае он применен, когда этот модуль имеет переменные значения. Справедливость такого обобщения легко подтверждается прямой проверкой выражения (1.2). Так, полагая  $u = \xi$ , из выражения (1.2) получим, что  $\arg(dw/dz) = -\beta_r$  для  $0 < \xi < a$ ;  $\arg(dw/dz) = \pi - \beta_r$  для  $a < \xi < c$ ; и  $\arg(dw/dz) = -\beta_l$  для  $c < \xi < \infty$ , где  $\beta_r = \gamma_\infty - \alpha + \delta$ ,  $\beta_l = \pi - \gamma_\infty - \alpha - \delta$ . Полагая  $u = i\eta$ , из (1.2) следует, что  $|dw/dz| = \mathcal{U}(\eta)$ , т.е. заданной функции  $\mathcal{U}(\eta)$ , которая должна быть определена ниже из динамического граничного условия.

В точках контакта свободной поверхности со щеками клина граница области течения имеет угол  $\mu_1$  в точке  $O$  и угол  $\mu_2$  в точке  $B$ . Так как скорость в окрестности этих точек не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, то граница области комплексного потенциала будет иметь те же углы, что и область течения. При обходе точки  $O$  в области параметра по окружности бесконечно малого радиуса  $\arg(u)$  увеличивается на  $\pi/2$ , в то время как  $\arg(w)$  в области  $w$  возрастает на  $\mu_1$ ; следовательно, в точке  $O$  комплексный потенциал имеет особенность вида  $w \sim u^{2\mu_1/\pi}$ . Точке  $D$  в области параметра соответствует струя бесконечного расхода. Из фиг. 1 видно, что на бесконечности справа  $\psi/\phi \rightarrow -\text{tg} \gamma_\infty$ , а на бесконечности слева  $\psi/\phi \rightarrow \pi - \text{tg} \gamma_\infty$ . При обходе точки  $D$  в области параметра по окружности бесконечно малого радиуса  $\arg(u)$  увеличивается на  $\pi$ , тогда как  $\arg(w)$  в области  $w$  уменьшается на  $\pi$ ; таким образом, в точке  $D$  комплексный потенциал имеет полюс первого порядка,  $w \sim (u-i)^{-1}$ .

В точке  $A$  комплексный потенциал имеет нуль второго порядка, соответствующий точке раздвоения линии тока, т.е.  $w \sim (u-a)^2$ . Продолжая область параметра  $u$  на всю расширенную комплексную плоскость, в симметричных точках следует поместить особенности того же порядка. С учетом указанных особенностей комплексного потенциала в точках  $O$ ,  $A$  и  $D$  главную часть производной комплексного потенциала можно записать в виде

$$\frac{dw}{du} \sim u^{2\mu_1/\pi-1} \frac{(u^2-a^2)}{(u^2+1)^2}$$

На свободной поверхности изменяется как действительная, так и мнимая часть комплексного потенциала. Регулярная часть выражения для производной комплексного потенциала, позволяющая удовлетворить граничному условию для направления вектора скорости на свободной границе, была получена в [10] в виде выражения

$$\frac{dw}{du} \sim \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(u^2 + \eta^2) d\eta \right]$$

где функция  $\theta(\eta) = \arctg(v_n/v_s)$ ,  $v_n(\eta)$  и  $v_s(\eta)$  – нормальная и касательная компоненты скорости на свободной границе. Окончательное выражение производной комплексного потенциала имеет вид

$$\frac{dw}{du} = Nu^{(2\mu_1/\pi-1)} \frac{u^2 - a^2}{(1+u^2)^2} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\eta^2 + u^2) d\eta \right] \quad (1.3)$$

где  $N$  – масштабный множитель.

Справедливость представления (1.3), как и (1.2), подтверждается прямой проверкой. Полагая  $u = \xi$  (твердая граница), из выражения (1.3) получим  $\text{Im}dw = \text{Im}(dw/du)d\xi = 0$  для  $0 < \xi < \infty$ ; при  $u = i\eta$  следует  $\text{Im}dw/\text{Re}dw = v_n/v_s$ , что соответствует определению комплексного потенциала  $dw = (v_s + iv_n)ds$ .

Из выражений (1.2) и (1.3) можно найти производную функции  $z = z(u)$ , отображающей область параметра  $u$  на область течения в физической плоскости  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} = Nu^{(2\mu_1/\pi-1)} \frac{(u+a)^2}{(1+u^2)^2} \left( \frac{u-c}{u+c} \right)^{1-(2\alpha/\pi)} \times \\ \times \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{d\eta} \ln(\eta^2 + u^2) d\eta + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left( \frac{i\eta - u}{i\eta + u} \right) d\eta + i(\gamma_{\infty} + \alpha + \delta) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Интегрированием выражения (1.4) в области параметра  $u$  можно рассчитать форму свободной поверхности.

Для определения неизвестных параметров  $a$ ,  $c$  и  $N$  имеются три заданные условия: значение наклона вектора скорости потока в бесконечности, длина смоченной части щеки клина  $OC$  (в автомодельных переменных эта длина равна единице) и условие, что координата свободной границы в точках  $D$  и  $D'$  одинакова. Эти условия приводят к виду

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \left| \frac{\eta-1}{\eta+1} \right| d\eta + \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left( 2 \arctg \frac{1}{c} - \pi \right) + \pi - 2 \arctg \frac{1}{a} - \alpha - \delta = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_0^c \left| \frac{dz}{du} \right|_{u=\xi} d\xi = 1 \quad (1.6)$$

$$\text{Im} \left( \int_{C_\epsilon} \frac{dz}{du} du \right) = 0 \quad (1.7)$$

где  $C_\epsilon$  – полуокружность бесконечно малого радиуса  $|u - i| = \epsilon$ .

В систему уравнений (1.5)–(1.7) входят неизвестные функций  $\psi(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ , которые подлежат определению из динамического и кинематического граничного условий.

**2. Динамическое граничное условие.** Интеграл Коши-Лагранжа, записанный в физической области для точки  $O$  и произвольной точки области течения, имеет вид

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_Z + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{Z=0} + \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_a}{\rho} \quad (2.1)$$

где  $P_a$  – давление на свободной поверхности, которое предполагается постоянным.

Будем рассматривать форму свободной поверхности как функцию дуговой координаты  $S$  вдоль этой поверхности и времени  $t$ , т.е.  $Z = Z(S, t)$ . Через  $W(S, t)$  обозначим значение комплексного потенциала на свободной границе. Для частиц на свободной границе имеем соотношения

$$dW = \left[\frac{\partial W}{\partial S}\right]_t dS + \left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_S dt, \quad dZ = \left[\frac{\partial Z}{\partial S}\right]_t dS + \left[\frac{\partial Z}{\partial t}\right]_S dt$$

откуда для частной производной комплексного потенциала по времени в фиксированной точке  $Z$  получим выражение

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_Z = \left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_S + \left[\frac{\partial W}{\partial S}\right]_t \left(-\left[\frac{\partial Z}{\partial t}\right]_S \left[\frac{\partial Z}{\partial S}\right]_t^{-1}\right) = \left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_S - \left[\frac{\partial W}{\partial Z}\right]_t \left[\frac{\partial Z}{\partial t}\right]_S \quad (2.2)$$

С учетом того, что  $[\partial W/\partial Z]_t = \bar{V}$  – комплексно сопряженная скорость, а  $[\partial W/\partial t]_S = V$  – скорость жидкости, последнее выражение преобразуем к виду

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_Z = \left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_S - v^2 \quad (2.3)$$

где  $v^2 = \bar{V}V$  – квадрат модуля скорости.

Введем автомодельную переменную  $s = S/v_0 t$  и форму свободной границы перепишем в виде  $Z(S, t) = v_0 t z(s)$ , где  $z = z(s)$  – форма свободной границы в автомодельных переменных. Аналогично этому  $W(S, t) = v_0^2 t w[S/v_0 t]$ . Из последнего выражения следует, что

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t}\right]_S = v_0^2 w(s) - v_0 \frac{dw}{ds} s \quad (2.4)$$

Можно положить  $w(0) = 0$ . Выделяя действительную часть выражений (2.3) и (2.4) и подставляя ее в уравнение (2.1), получим уравнение для модуля скорости на свободной поверхности

$$v^2 = v_0^2 \left(1 + 2\phi - 2\frac{d\phi}{ds} s\right) \quad (2.5)$$

При этом касательная и нормальная компоненты скорости выражаются через функцию  $\theta = \arctg(v_n/v_s)$  как

$$v_s = v \cos \theta, \quad v_n = v \sin \theta \quad (2.6)$$

Дифференцируя выражение (2.5) по  $s$  с учетом соотношения  $d\phi/ds = v_s/v_0$  и равенств (2.6), определим вид дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{ds} = \frac{v_s \sin \theta}{v/v_0 + s \cos \theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (2.7)$$

После умножения последнего выражения на  $ds/d\eta$  получается интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d \ln v}{d\eta} = \frac{s \sin \theta}{v/v_0 + s \cos \theta} \frac{d\theta}{d\eta} \quad (2.8)$$

$$s(\eta) = \int_0^\eta \left. \frac{dz}{du} \right|_{u=i\eta} d\eta$$

**3. Кинематическое граничное условие.** На свободной границе давление постоянно, поэтому ускорение жидкой частицы перпендикулярно свободной поверхности, что можно записать как

$$\operatorname{Re} \left( \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]_S \overline{dZ} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Элемент свободной границы  $dZ$  и скорость жидкости  $V$  на нем представим в виде  $V = ve^{i\gamma}$ ,  $dZ = e^{i\chi} dS$ , где  $\gamma$  – аргумент вектора скорости,  $\chi$  – аргумент элемента  $dZ$ ,  $dS = |dZ|$ . Дифференцируя выражение  $V = ve^{i\gamma}$  по времени при фиксированном  $S$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{d\eta} \frac{d\eta}{ds} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{dV}{d\eta} = ve^{i\gamma} \left( \frac{d \ln v}{d\eta} + i \frac{d\gamma}{d\eta} \right)$$

и подставляя результат в выражение (3.1), можно получить уравнение

$$\cos(\gamma - \chi) \frac{d \ln v}{d\eta} - \sin(\gamma - \chi) \frac{d\gamma}{d\eta} = 0 \quad (3.2)$$

Из выражения (1.4) при  $u = i\eta$  найдем, что  $\chi = \pi/2 - \theta + \gamma$ . Выражая аргумент комплексной скорости  $\gamma$  из (1.2), дифференцируя полученную функцию  $\gamma(\eta)$  по  $\eta$  и подставляя результат в уравнение (3.2), получим интегральное уравнение относительно функции  $d \ln v / d\eta$

$$-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta} \frac{d \ln v}{d\eta} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta'} \frac{\eta'}{\eta'^2 - \eta^2} d\eta' = \frac{a}{a^2 + \eta^2} + \left( \frac{2\alpha}{\pi} - 1 \right) \frac{c}{c^2 + \eta^2} \quad (3.3)$$

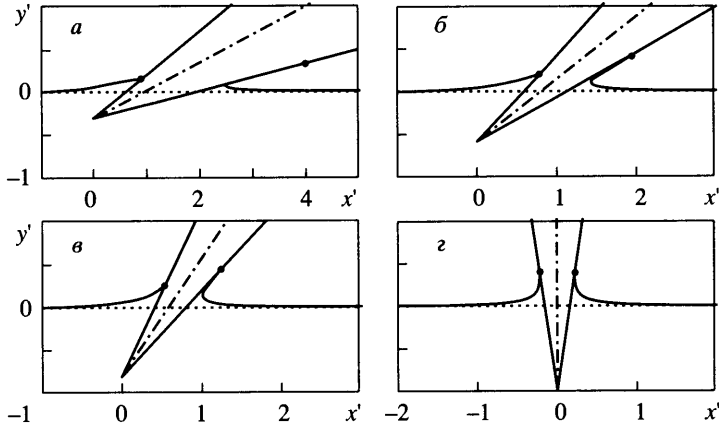
Система уравнений (1.5)–(1.7), (2.8) и (3.3) замкнута и позволяет найти параметры  $a$ ,  $c$ ,  $N$  и функции  $v(\eta)$  и  $\theta(\eta)$ .

На поверхности клина нормальная компонента скорости равна нулю, а тангенциальная  $v_s < 0$  в точке  $O$  и  $v_s > 0$  в  $B$ . Поэтому в точке  $O$   $\theta_O = \pi$ , а в точке  $B$   $\theta_B = 0$ . В этих же точках на свободной поверхности функция  $\theta(\eta)$  находится из решения системы уравнений (1.5)–(1.7), (2.8) и (3.3). Таким образом, углы контакта свободной поверхности с клином  $\mu_1$  и  $\mu_2$  находятся из выражений

$$\mu_1 = \theta(0), \quad \mu_2 = \pi - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta)$$

**4. Вычисление давления на щеках клина.** Интеграл Коши–Лагранжа (2.1) позволяет рассчитать давление на щеках клина. Для этого необходимо вычислить производную потенциала течения  $\partial\Phi/\partial t$  в физической области течения через потенциал  $\phi$  в стационарной области. Координаты щек клина  $Z = Z(S, t)$  удобно задать соотношениями для правой и левой щек клина

$$Z(S, t) = v_0 t \left( 1 - \frac{S}{v_0 t} \right) e^{i\beta t}, \quad 0 < S < v_0 t$$



Фиг. 2. Форма свободной границы при различном наклоне вектора скорости к свободной границе для угла клина  $2\alpha = 18^\circ$ :  $a-z - \gamma_\infty = 18, 36, 54, 90^\circ$

$$Z(S, t) = v_0 t \left( \frac{S}{v_0 t} - 1 \right) e^{i(\pi - \beta_1)}, \quad v_0 t < S < (v_0 + v_b)t$$

причем координата  $S$  отсчитывается от точки  $O$  вдоль поверхности клина. Из последних выражений следует, что  $[\partial Z/\partial t]_S = v_0 e^{i\beta_1}$  для правой щеки клина и  $-v_0 e^{i(\pi - \beta_1)}$  для левой.

Подставляя найденные значения  $\partial Z/\partial t$  в выражение (2.2) и учитывая, что мнимая часть комплексного потенциала на щеках клина равна нулю, из выражения (2.1) можно получить выражения для коэффициента давления на правой и левой щеках клина

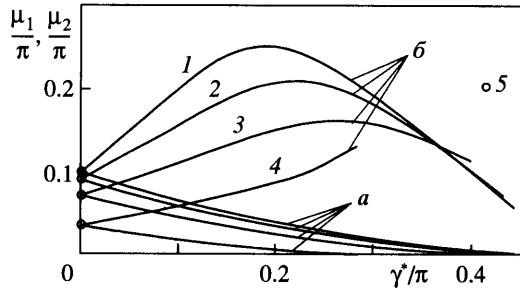
$$p_r(s) = \frac{P}{1/2\rho v_\infty^2} = \frac{2(\phi + s v/v_0) + (1 - v/v_0)^2}{(v_\infty/v_0)^2}, \quad -0 \leq s \leq 1$$

$$p_l(s) = \frac{P}{1/2\rho v_\infty^2} = \frac{2(\phi - s v/v_0) + (1 + v/v_0)^2}{(v_\infty/v_0)^2}, \quad 1 \leq s \leq 1 + \frac{v_b}{v_0}$$

**5. Результаты расчетов.** Численное решение системы уравнений (2.8), (3.3) осуществляется методом последовательных приближений, при этом система нелинейных уравнений (1.5)–(1.7) решается на каждой итерации. В качестве начального приближения принимается  $\psi(\eta) \equiv v_0$ ,  $\theta(\eta) \equiv \pi$ . На мнимой оси в параметрической области в интервале  $0 < \eta_i < 1$ , который соответствует правой части свободной границы, были выбраны фиксированные точки  $\eta_i$ ,  $i = 1, N/2$ , распределенные по закону геометрической прогрессии с начальным элементом  $\eta_1 = 10^{-5}$ . В интервале  $1 < \eta_i < \infty$ ,  $i = N/2 + 1, N$ , соответствующем левой части свободной границе, точки  $\eta_i$  задавались как  $\eta_i = 1/\eta_{N-i}$ . Исследование точности численного решения показало, что при  $N = 300$  погрешность представленных в работе результатов не превосходит 1%.

Результаты расчетов на фиг. 2 формы свободной поверхности при косом входе клина в невозмущенную жидкость даны для угла при вершине  $2\alpha = 18^\circ$  и вектора скорости, направленным вдоль оси симметрии клина, где  $x' = X/v_\infty t$ ,  $y' = Y/v_\infty t$ .

Зависимости угла контакта свободной границы с правой,  $\mu_1$ , и левой,  $\mu_2$ , щеками клина от угла отклонения вектора скорости набегающего потока от вертикали  $\gamma^* = \pi/2 - \gamma_\infty$



Фиг. 3. Зависимость угла контакта свободной границы с клином от угла  $\gamma^*$  отклонения вектора скорости  $v_\infty$  от вертикали для различных углов клина: 1–4 –  $\alpha = 1^\circ; 30^\circ; 30^\circ; 30^\circ$ ; а, б –  $\mu_1, \mu_2$ ; 5 – результаты [3] для случая симметричного течения

представлены на фиг. 3. Вектор скорости совпадает с осью симметрии клина. Для случая симметричного течения  $\gamma^* = 0$  углы контакта на правой и левой щеках клина одинаковы  $\mu_1 = \mu_2$  и по величине согласуются с результатами [3]. Зависимость  $\mu_2(\gamma^*)$  имеет максимум, величина которого и соответствующего ему значения  $\gamma^*$  зависят от угла клина  $2\alpha$ . Для очень острого клина,  $\alpha = 1^\circ$ , максимальное значение  $\mu_2/\pi \approx 0.25$  достигается при  $\gamma^* \approx 35^\circ$ . Теоретическая оценка максимального значения контактного угла  $\mu$  свободной поверхности и клина приведена в [3, 11] и составляет значение  $\mu/\pi = 0.25$ .

Согласно результатам [8] при  $2\alpha = 0.5\pi$ ,  $\gamma^* = -0.153\pi$  и  $\delta = -0.053\pi$  точка раздвоения линии тока совпадает с вершиной клина. В результате расчета течения при этих параметрах получены те же значения первых двух значащих цифр контактных углов  $\mu_1/\pi = 0.035$  и  $\mu_2/\pi = 0.0083$ , что и в [8], а значение  $|a - c| < 10^{-6}$ , что указывает на совпадение точки раздвоения линии тока с вершиной клина в пределах погрешности вычислений.

Распределение давления на щеках клина для различных значений отклонения вектора скорости от вертикали, отнесенное к  $\text{tg } \alpha$ , приведено на фиг. 4 для случая, когда направление вектора скорости совпадает с осью клина. Координата  $s' = S/v_\infty t$  отсчитывается от вершины клина. Можно видеть, что асимметрия распределения давления растет с увеличением наклона вектора скорости. Характер распределения давления на правой щеке клина при косом и вертикальном проникании в жидкость близки между собой при одинаковом значении угла килеватости. С увеличением угла клина влияние нелинейных эффектов возрастает.

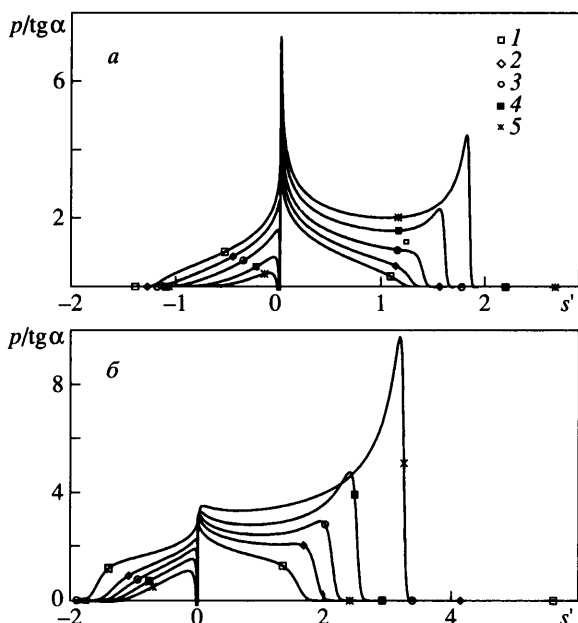
Зависимости коэффициентов гидродинамической силы, нормальной к щекам клина,  $C_{nr}/\text{tg } \alpha$  и  $C_{nl}/\text{tg } \alpha$  представлены на фиг. 5 и 6, а также коэффициентов сопротивления  $C_d/\text{tg } \alpha$  и момента относительно вершины клина  $C_m/\text{tg } \alpha$  для различных углов клина. Коэффициенты вычислены в соответствии с выражениями

$$C_{nr} = \frac{1}{h} \int_0^c p_r(s) \frac{ds}{d\xi} d\xi, \quad C_{nl} = \frac{1}{h} \int_c^\infty p_l(s) \frac{ds}{d\xi} d\xi$$

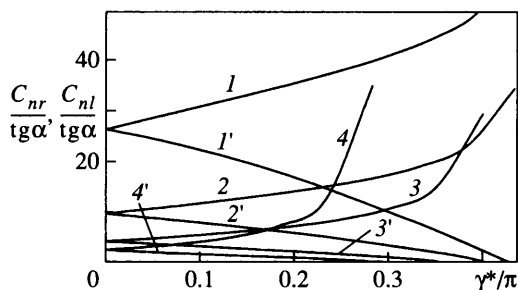
$$C_d = C_{nr} \sin(\alpha - \delta) + C_{nl} \sin(\alpha + \delta)$$

$$C_m = \frac{1}{h^2} \left\{ \int_0^c [1 - s(\xi)] p_r[s(\xi)] \frac{ds}{d\xi} d\xi + \int_c^\infty [1 - s(\xi)] p_l[s(\xi)] \frac{ds}{d\xi} d\xi \right\}$$





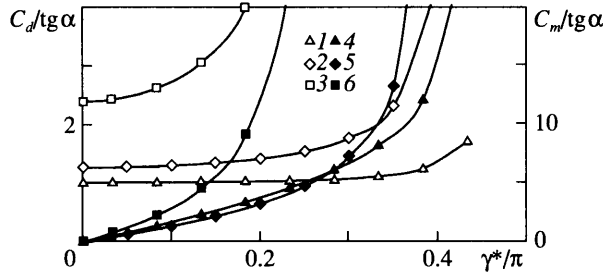
Фиг. 4. Распределение коэффициента давления на правой ( $s' > 0$ ) и левой ( $s' < 0$ ) щеках клина:  $a - 2\alpha = 18^\circ$ ;  $b - 60^\circ$ ;  $1-5 - \gamma^* = 0, 18, 36, 54, 63^\circ$



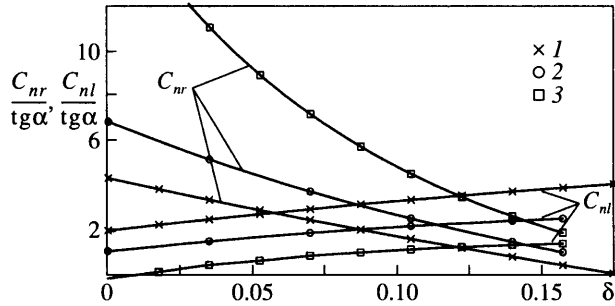
Фиг. 5. Коэффициенты нормальной гидродинамической силы на правой и левой (штрих) щеках клина как функции угла  $\gamma^*$  для различных углов клина:  $1-4 - \alpha = 1, 3, 9, 30^\circ$

В качестве характерной длины  $H = v_0 t h$ , где  $h = v_\infty / v_0 [ \text{tg}(\alpha - \delta) + \text{tg}(\alpha + \delta) ]$ , выбрано сечение клина прямой, перпендикулярной направлению вектора скорости и проходящее через продолжение невозмущенной свободной границы. С увеличением угла наклона вектора скорости сила давления на правой щеке увеличивается, а на левой уменьшается, так что коэффициент сопротивления  $C_d$  изменяется слабее, чем коэффициенты нормального давления  $C_{nr}/\text{tg}\alpha$  и  $C_{nl}/\text{tg}\alpha$ .

Зависимости коэффициентов гидродинамической силы  $C_{nr}$  и  $C_{nl}$ , отнесенные к  $\text{tg}\alpha$ , от угла  $\delta$  отклонения оси клина от направления вектора скорости на фиг. 7 показывают, что с увеличением  $\delta$  коэффициент нормальной силы на правой щеке снижается, а на левой щеке увеличивается. Если точка раздвоения линии тока  $A$  не совпадает с вершиной



Фиг. 6. Зависимости коэффициента силы сопротивления (1–3) и момента (4–6) от угла  $\gamma^*$  для различных углов клина: 1–3, 4–6 –  $\alpha = 3, 9, 30^\circ$



Фиг. 7. Зависимости коэффициентов нормальной гидродинамической силы на щеках клина  $2\alpha = 30^\circ$  от угла  $\delta$  отклонения оси клина от направления  $u_\infty$  для различных значений направления вектора скорости: 1–3 –  $\gamma_\infty = 70, 50, 30^\circ$

клина  $C$ , то в малой окрестности точки  $O$  возникает отрицательное давление. Хотя факт возникновения отрицательного давления можно трактовать как сигнал о перестройке течения и переходе его к режиму с частичной кавитацией или полным отрывом, тем не менее в рамках идеальной несжимаемой жидкости существует решение, соответствующее режиму безотрывного обтекания и при отрицательных давлениях в окрестности острия (с бесконечной скоростью в самом острие). Аналогичная ситуация имеет место, например, при обтекании бесконечно тонкой пластинки, для которой существует безотрывное решение с бесконечной скоростью в передней кромке, удовлетворяющее постулату Жуковского–Чаплыгина в задней кромке.

По всей видимости, в качестве критерия перехода к режиму отрывного обтекания следует принимать не условие возникновения отрицательного давления, а условие возникновения отрицательного значения  $C_{nr}$  (фиг. 7).

**Заключение.** Представлено решение нелинейной автомодельной задачи входа в воду клина под произвольным углом наклона вектора скорости к свободной поверхности. Решение достигнуто путем нахождения выражений для комплексной скорости и производной комплексного потенциала в области параметрического переменного на основе обобщения принципа симметрии. Окончательно задача свелась к системе уравнений, содержащей нелинейное интегральное и интегродифференциальное уравнения, которые решены численно методом последовательных приближений. Исследовано влияние различных геометрических параметров на гидродинамические характеристики погружающегося клина.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wagner H.* Über Stoss- and Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // ZAMM. 1932. № 12. H.4. S. 193–215.
2. *Garabedian P.R.* Oblique water entry of a wedge // Communs. Pure and Applied Math. 1953. V. 6. № 2. P. 157–165.
3. *Dobrovolskaya Z.N.* Some problems of similarity flow of fluid with a free surface // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt.4. P. 805–829.
4. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
5. *Сагомонян А.Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
6. *Кубенко В.Д.* Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. думка, 1981. 159 с.
7. *Korobkin A.A., Puknachov V.V.* Initial Stage of Water Impact. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 159–185.
8. *Чекин Б.С.* Вход клина в несжимаемую жидкость // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 396–404.
9. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
10. *Семенов Ю.А.* Аналитическое решение автомодельной задачи погружения несимметричного клина // Прикл. гидромеханика. 2003. Т. 5(77). № 4. С. 64–72.
11. *Fraenkel L.E., Keady G.* On the entry of a wedge into water: the thin wedge and an all-purpose boundary-layer equation // J. Engr. Math. 2004. V. 48. № 3/4. P. 219–252.

Днепропетровск,  
Киев

Поступила в редакцию  
11.V.2004