

УДК 532.526.2

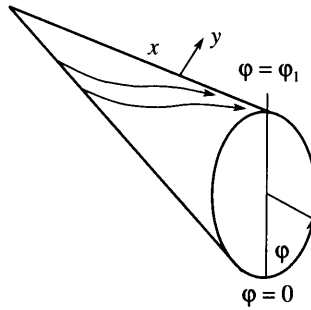
© 2007 г. В.И. ШАЛАЕВ

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЛОСКОСТИ СТЕКАНИЯ НА КОНИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Представлен анализ особенностей уравнений пограничного слоя и структуры ламинарного течения вязкого газа в окрестности плоскости стекания на острых конических телах под углом атаки. Получен явный вид особенностей во внешней части пограничного слоя. Показано, что в окрестности особенности формируется пограничная область, где течение описывается укороченными уравнениями Навье–Стокса; получены их регулярные решения. Эффект вязко-невязкого взаимодействия является основным в области порядка корня квадратного из толщины пограничного слоя, где течение описывается двухслойной моделью: уравнениями Эйлера в приближении тонкого тела во внешней области и уравнениями трехмерного пограничного слоя; давление определяется условиями взаимодействия. На основе анализа решений во внешней части пограничного слоя показано, что взаимодействие приводит к ослаблению особенностей и к зависимости характера течения от продольной координаты, но не позволяет устранить сингулярности полностью.

Ключевые слова: трехмерный пограничный слой, коническая поверхность, вязко-невязкое взаимодействие.

Безотрывное ламинарное течение вязкого газа около конических тел под углом атаки является одной из простейших и хорошо изученных задач теории трехмерного пограничного слоя. Тем не менее ряд обнаруженных здесь особенностей, которые непосредственно связаны с проблемами возникновения пространственного отрыва, существования и единственности решения уравнений пограничного слоя, до сих пор не имеют объяснения. Анализировались в основном простые тела типа круговых и эллиптических конусов. Известно, что автомодельное решение уравнений пограничного слоя в плоскости симметрии таких тел многозначно, а в плоскости стекания оно отсутствует для некоторого диапазона углов атаки, который зависит от температуры стенки, формы поверхности, чисел Маха и Прандтля [1–11]. Предполагалось, что поведение решения в плоскости стекания может быть связано с нарушением автомодельности течения. Было обнаружено, что неавтомодельные численные решения в этой плоскости можно получить, если рассмотреть задачу со вдувом газа через поверхность, причем эти решения существуют только при совершенно определенных значениях скорости вдува [11, 12]. Эти результаты показывают, что в диапазоне отсутствия решений имеют место качественные изменения структуры пристенной области, но природа их неизвестна. Другая возможная причина появления особенностей – нарушение принципа зависимости и влияния в окрестности плоскости стекания [1, 4, 6, 13, 14]. Интегрирование уравнений в окружном направлении выявляет единственный тип особенности – нарушение условия симметрии в виде появления конечных значений поперечной скорости в плоскости стекания [12–15]. Результаты работ [13, 14] указывают на существенные расхождения с экспериментальными данными в окрестности плоскости стекания задолго до появления отрыва пограничного слоя. Численные решения задачи обтекания кругового конуса под углом атаки, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными, получены на ос-



Фиг. 1. Схема течения и система координат: x – координата вдоль образующей, y – преобразованная нормаль к поверхности, φ – поперечная координата

нове уравнений Навье–Стокса [16, 17]. В работе [17] показано, что структура течения в окрестности плоскости стекания изменяется в зависимости от продольной координаты.

Особенности во внешней части пограничного слоя в плоскости стекания на тонком круговом конусе под углом атаки изучены на основе анализа точного решения асимптотических уравнений [8]. Для других конических тел такое решение не получено, и характер особенностей как и зависимость их типа от параметров задачи не известны. Появление особенностей в уравнениях пограничного слоя приводит к формированию определенной асимптотической структуры решения уравнений Навье–Стокса, которая также недостаточно изучена. Эти задачи рассмотрены в настоящей работе.

1. Безотрывное течение газа в ламинарном пограничном слое на конической поверхности при линейной зависимости вязкости от температуры $\rho\mu = 1$ и числе Прандтля $Pr = 1$ описывается автомодельными уравнениями, которые в ортогональных криволинейных координатах $x\varphi$ (фиг. 1) имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
 w_{yy} &= Aw w_\varphi - v w_y + w \left(\frac{2}{3}u + Kw \right) - h \left(\frac{2}{3} + K \right) \\
 u_{yy} &= Aw u_\varphi - v u_y + A_1 w (u - w), \quad h_{yy} = Aw h_\varphi - v h_y - v h_y - M_0 \left(u_y^2 + \frac{3}{2} A_1 w_y^2 \right) \\
 y = 0: & \quad u = v = w = 0, \quad h = h_w (h_y = 0); \quad y = \infty: \quad u = w = h = 1 \\
 y &= \sqrt{\frac{3 \operatorname{Re}(\varphi)}{2x}} \int_0^{y^*} \rho dy^*, \quad \operatorname{Re}(\varphi) = \frac{\rho_e u_e \operatorname{Re}_\infty}{\mu_e}, \quad \operatorname{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty l}{\mu_\infty}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$f_y = u, \quad g_y = w, \quad v = f + \left[K - \frac{1}{2} A (\ln(\rho_e \mu_e / u_e))' \right] g + A g_\varphi,$$

$$A(\varphi) = \frac{2w_e}{3Ru_e}, \quad A_1(\varphi) = \frac{2}{3} \left(\frac{w_e}{u_e} \right)^2, \quad M_0(\varphi) = \frac{u_\infty^2 u_e^2}{h_\infty h_e}, \quad K(\varphi) = \frac{2w_e'}{3Ru_e}$$

Координата x вдоль образующей отнесена к длине тела l , φ – поперечная координата (фиг. 1), y^* – нормаль к поверхности тела, отнесенная к l ; $R(\varphi)$ – метрический коэффициент, $f(y, \varphi)$ и $g(y, \varphi)$ – функции тока, $v(y, \varphi)$ – преобразованная нормальная скорость. Плотность ρ , энтальпия h , вязкость μ , продольная и поперечная составляющие ско-

рости u и w отнесены к своим значениям на внешней границе пограничного слоя; $\rho h = 1$, индексы x , φ и y обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, штрихи – дифференцирование по аргументу. Функции течения на внешней границе пограничного слоя, которые зависят только от φ , обозначены индексом “ e ” и отнесены к своим значениям в набегающем потоке, помеченным индексом “ ∞ ”; Re_∞ – число Рейнольдса.

Поперечная скорость на внешней границе пограничного слоя $w_e = 0$ в плоскости растекания $\varphi = \varphi_0 = 0$ ($K(0) \sim w_e(0) > 0$), которая является плоскостью начальных данных для уравнений (1.1), и в плоскости стекания $\varphi = \varphi_1$ ($K(\varphi_1) = -k \sim w_{e\varphi}(\varphi_1) < 0$), где две части пограничного слоя, приходящие с разных сторон плоскости растекания, сталкиваются.

Рассмотрим асимптотику уравнений (1.1) во внешней области пограничного слоя, при $y \gg 1$, где функции течения представляются в виде

$$u = 1 + U(\eta, \varphi), \quad w = 1 + W(\eta, \varphi), \quad h = 1 + H(\eta, \varphi)$$

$$v = y - \Delta_1 + \left[K - \frac{1}{2} A \left(\ln \left(\frac{\rho_e \mu_e}{u_e} \right) \right)' \right] (y - \Delta_2) - A \Delta_2'$$

$$\Delta_1(\varphi) = \int_0^\infty (1 - u) dy, \quad \Delta_2(\varphi) = \int_0^\infty (1 - w) dy, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{a(\varphi)}} \quad (1.2)$$

$$a' + 2 \left[(N + 1)(\ln w_e)' - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\rho_e \mu_e}{u_e} \right)' \right] a = 2N(\ln w_e)', \quad N(\varphi) = K^{-1}$$

Предполагается, что $\Delta_1 \ll y$, $\Delta_2 \ll y$, а функции $U(\eta, \varphi) \ll 1$, $W(\eta, \varphi) \ll 1$, $H(\eta, \varphi) \ll 1$ и удовлетворяют в главном приближении уравнениям

$$U_{\eta\eta} = -\eta U_\eta + a[AU_\varphi + A_1(U - 2W)]$$

$$W_{\eta\eta} = -\eta W_\eta + \frac{2}{3} a \left[\frac{3}{2} A W_\varphi + (1 + 3K)W + U - H \left(1 + \frac{3}{2} K \right) \right] \quad (1.3)$$

$$H_{\eta\eta} = -\eta H_\eta + aAH_\varphi - 2M_0\sqrt{a} \left(U_\eta + \frac{3}{2} A_1 W_\eta \right)$$

Решение (1.3) должно убывать при $\eta \rightarrow \infty$ и срачиваться с численным решением (1.1) при $\eta = O(1)$. Начальным условием для (1.3) является их решение в плоскости $\varphi = 0$.

2. Рассмотрим случай тонкого тела и малых углов атаки, так что $A = O(1)$, $A_1 \ll 1$, $u_e = \rho_e = \mu_e = 1$. Пренебрегая в (1.1) пропорциональными A_1 членами, получим для уравнения энергии (1.1) интеграл Крокко

$$h = h_w + h_r u - \frac{1}{2} M_0 u^2, \quad h_r = 1 - h_w + \frac{1}{2} M_0 \quad (2.1)$$

В этом случае решение (1.3) можно представить так

$$H = - \left(\frac{1}{2} M_0 + h_w - 1 \right) U, \quad U(\eta, \varphi) = C_1 \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right)$$

$$W(\eta, \varphi) = -b(\varphi)U, \quad b' + 2(1 + M)(\ln w_e)'b = 2pM(\ln w_e)' \quad (2.2)$$

$$p(\varphi) = 1 + \left(1 + \frac{3}{2} K \right) \left(\frac{1}{2} M_0 + h_w - 1 \right), \quad M(\varphi) = (3K)^{-1}$$

Постоянная $C_1(k)$ находится из сращивания внешней асимптотики (2.2) с решением внутри пограничного слоя.

Чтобы выделить особенности в плоскости стекания, решения уравнений (1.2) и (2.2) для функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ представим в виде квадратур, используя интегрирование по частям

$$m \neq 1: b = \frac{Mp}{M+1} - E w_e^{-2(M+1)} \int_0^\varphi \frac{p'M(M+1) + pM'}{E(M+1)^2} w_e^{2(M+1)} d\varphi \quad (2.3)$$

$$m = 1: b = 2Mp \ln w_e - 2 \int_0^\varphi \frac{(pM)' w_e + 2(M+1)Mp w_e'}{E} w_e^{2M+1} \ln w_e d\varphi$$

$$n \neq 1: a = \frac{N}{N+1} - E_1 w_e^{-2(N+1)} \int_0^\varphi \frac{N'}{E_1(N+1)^2} w_e^{2(N+1)} d\varphi$$

$$n = 1: a = 2N \ln w_e - 2E_1 w_e^{-2(N+1)} \int_0^\varphi \frac{N' w_e + 2(N+1)N w_e'}{E_1(N+1)^2} w_e^{2N+1} \ln w_e d\varphi$$

$$E = \exp\left(2 \int_0^\varphi M'(t) \ln w_e(t) dt\right), \quad E_1 = \exp\left(2 \int_0^\varphi N'(t) \ln w_e(t) dt\right)$$

Соотношения (2.3) для $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ при $n \neq 1$ и $m \neq 1$ удовлетворяют начальным условиям на линии растекания $\varphi = 0$ для регулярного при $K(0) \rightarrow 0$ решения [8]; выражения для $n = m = 1$ справедливы только при $\varphi > 0$. В окрестности плоскости стекания (2.3) можно представить в форме

$$\zeta = \varphi_1 - \varphi \ll 1, \quad w_e = \frac{3}{2} k R \zeta + O(\zeta^2), \quad k = -K(\varphi_1), \quad R = R(\varphi_1)$$

$$p_1 = p(\varphi_1) = 1 + \left(1 - \frac{3}{2}k\right) \left(\frac{1}{2}M_0 + h_w - 1\right), \quad n = -N(\varphi_1), \quad m = -M(\varphi_1)$$

$$m \neq 1: b = \frac{mp_1}{m-1} - b_m \zeta^{2(m-1)}; \quad m = 1: b = -2mp_1 \ln \zeta + b_1$$

$$n \neq 1: a = \frac{n}{n-1} + a_n \zeta^{2(n-1)}, \quad n = 1: a = -2n \ln \zeta + a_1$$

$$b_m = E(\varphi_1) \left(\frac{3}{2}kR\right)^{2(m-1)} \int_0^{\varphi_1} \frac{p'M(M+1) + pM'}{E(M+1)^2} w_e^{2(M+1)} d\varphi \quad (2.4)$$

$$b_1 = -2mp_1 \ln\left(\frac{3}{2}kR\right) - 2 \int_0^{\varphi_1} \frac{(pM)' w_e + 2(M+1)Mp w_e'}{E} w_e^{2M+1} \ln w_e d\varphi$$

$$a_n = -E_1(\varphi_1) \left(\frac{3}{2}kR\right)^{2(n-1)} \int_0^{\varphi_1} \frac{N'}{E_1(N+1)^2} w_e^{2(N+1)} d\varphi$$

$$a_1 = -2n \ln \frac{3}{2} kR - 2E_1(\varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \frac{N w_e + 2(N+1)N w_e'}{E_1(N+1)^2} w_e^{2N+1} \ln w_e d\varphi$$

Для тонкого кругового конуса коэффициенты a_n и b_m вычислены явно [8].

В случае $A_1 = O(1)$ можно получить асимптотический вид решения уравнений (1.3) в окрестности плоскости стекания. При $\zeta \rightarrow 0$ для функций внешнего течения наряду с (2.4) справедливы разложения

$$\begin{aligned} u_e &= u_e(\varphi_1) + O(\zeta^2), & h_e &= h_e(\varphi_1) + O(\zeta^2), & A_1 &= O(\zeta^2) \\ M_0 &= M_0(\varphi_1) + O(\zeta^2), & A &= -k\zeta + O(\zeta^2), & w_e &= \frac{3}{2} kR u_e \zeta + O(\zeta^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Учитывая соотношения (2.5), из (1.1) при $\zeta \rightarrow 0$ получим уравнения

$$\begin{aligned} u_{yy} &= -2k\zeta w u_\zeta - v u_y, & h_{yy} &= -2k\zeta w h_\zeta - v h_y - M u_y^2 \\ w_{yy} &= -2k\zeta w w_\zeta - v w_y + w \left(\frac{2}{3} u - k w \right) - h \left(\frac{2}{3} - k \right), & v &= f - k g - 2k\zeta g_\zeta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) зависят от двух переменных и содержат однородные по ζ слагаемые, их решение не зависит от масштаба поперечной координаты; они также допускают интеграл Крокко. Для внешней области справедливы соотношения (2.2), а для функций $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ – соотношения (2.3), но в этом случае постоянные a_n и b_m не определяются явными формулами.

Результаты настоящего раздела показывают, что во внешней части пограничного слоя имеются два типа особенностей в плоскости стекания. Для $k < 1$ функция $U(\eta, \zeta)$ существует при $\zeta = 0$, но приближается к этому пределу нерегулярно; характер этой нерегулярности подробно исследован в случае тонкого кругового конуса [8]. Для $k \geq 1$ $U(\eta, \zeta)$ не имеет предела $\zeta \rightarrow 0$ – при этих значениях параметра область пограничного слоя неограниченно растет пропорционально $\sqrt{a(\zeta)}$ при приближении к плоскости стекания; для $k = 1$ особенность является логарифмической. При $k > 1$ экспериментальные и численные исследования обнаруживают появление отрыва потока в окрестности плоскости стекания; это явление приводит к изменению структуры течения во внутренней части пограничного слоя, а не только в его внешней области [12–17], поэтому представленный анализ не достаточен для описания полной структуры течения в диапазоне умеренных значений $k \geq 1$, но полученные результаты имеют интерес, так как дают представление об одном из возможных типов особенностей, возникающих в трехмерном пограничном слое.

Функция $W(\eta, \zeta)$ нерегулярна при $\zeta \rightarrow 0$, имеет конечный предел для $k < 1/3$ и неограниченно растет при $k \geq 1/3$; для $k = 1/3$ особенность является логарифмической. Особенности трехмерного пограничного слоя в окрестности плоскости стекания при $1/3 \leq k < 1$ связаны исключительно с поведением поперечного течения. Наличие такой сингулярности свидетельствует об усилении продольной компоненты вихря во внешней части вязкой области. Особенность имеет место как при отрицательном ($k \leq 2/3$), так и при положительном ($k > 2/3$) градиентах давления, следовательно, этот параметр не является определяющим, особенность образуется в результате действия центробежных сил и сил инерции. Критическое значение $k_c = 1/3$ не зависит от числа Маха и температуры стенки, однако в определенном диапазоне этих параметров, когда численные значения $k_c(h_w, M) \geq 1/3$, структура течения определяется особенностями именно внешней части пограничного слоя и представленный анализ актуален.

3. Нерегулярность решения (2.4) приводит к тому, что в окрестности плоскости стекания формируется вихревая пограничная область с поперечным размером порядка толщины пограничного слоя, в которой члены поперечной вязкой диффузии становятся одного порядка с членами уравнений пограничного слоя. Для анализа течения в этой области введем переменные

$$z = \sqrt{kx}R\zeta/\varepsilon, \quad u = u(y, z), \quad h = h(y, z), \quad w = w(y, z), \quad \varepsilon = \left[\frac{3}{2} \operatorname{Re}(\varphi_1) \right]^{-1/2}$$

Подставив эти соотношения и соотношения (1.2) в уравнения Навье–Стокса [16], при $\varphi \rightarrow \varphi_1$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\rho\mu = \operatorname{Pr} = 1$ получим уравнения

$$\begin{aligned} u_{yy} + kh(hu_z)_z &= -kzwu_z - vu_y \\ w_{yy} + k\frac{k}{z}(h(zw)_z)_z &= -kzw w_z - vw_y + w\left(\frac{2}{3}u - kw\right) - h\left(\frac{2}{3} - k\right) \\ h_{yy} + kh(hh_z)_z &= -kzwh_z - vh_y - M_0(u_y^2 + h^2u_z^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Краевые условия (1.1) сохраняют свою форму; при $z \rightarrow \infty$ решения уравнений (3.1) и (2.6) должны срачиваться. Учет поперечной диффузии не изменяет распределение давления и допускает автомодельное решение, а уравнение (3.1) для энтальпии интегрируется в виде (2.1).

Рассмотрим внешнюю часть вязкой области, $y \gg 1$, где функции течения в главном приближении имеют вид, подобный (2.2), но удовлетворяют уравнениям, которые следуют из (3.1)

$$\begin{aligned} U_{yy} + kU_{zz} + (1-k)yU_y + kzU_z &= 0 \\ W_{yy} + (1-k)yW_y + kW_{zz} + \left(\frac{2}{z} + kz\right)W_z + 2k(m-1)W + \frac{2}{3}p_1U &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) для возмущений продольной скорости имеет решение

$$U(y, z) = C_1 \operatorname{erfc}(y\sqrt{(1-k)/2}) [1 + C_2 \operatorname{erfc}(z/\sqrt{2})] \quad (3.3)$$

где C_2 – постоянная. Эта функция при $z \rightarrow \infty$ срачивается в главном порядке с решением уравнений пограничного слоя (2.4) для $k < 1$. Для $k \geq 1$ простое решение первого уравнения (3.2) построить не удастся.

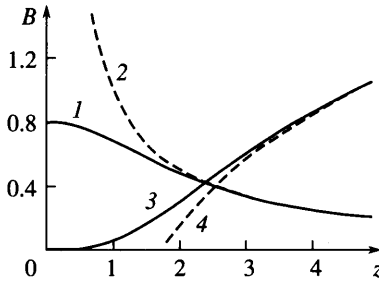
Решение уравнения (3.2) для возмущений поперечной скорости при $k < 1$ находится методом разделения переменных

$$\begin{aligned} W &= -B(z)C_1 \operatorname{erfc}(y\sqrt{(1-k)/2}) \\ B_{zz} + \left(\frac{2}{z} + z\right)B_z - 2(m-1)B &= -2mp_1F(z), \quad F(z) = \left[1 + C_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Чтобы производная $B_z(0)$ была конечной, $F(0) = 0$. Из этого условия следует, что $C_2 = 1$ и $F(z) = \operatorname{erf}(z/\sqrt{2})$. Функция $B(z)$ выражается через функцию Куммера $\Phi(a, b, x)$ [18]

$$B = mp_1B_0(z) + B_m \Phi\left(1 - m, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}z^2\right), \quad B_m = b_m \left(\frac{R\sqrt{kx}}{\varepsilon}\right)^{2(1-m)} \quad (3.5)$$

$$z \rightarrow \infty: \Phi \sim z^{2(m-1)}, \quad B_0(z) \rightarrow (m-1)^{-1}$$



Фиг. 2. Решения укороченных уравнений Навье–Стокса в области $z \geq 1$: 1 – $F_1(z)$, 2 – асимптота $F_1(z)$; 3 – $F_2(z)$, 4 – асимптота $F_2(z)$

Здесь $B_0(z)$ – частное решение неоднородного уравнения, а коэффициент B_m определен из условия срачивания (3.5) и (2.4).

Для $m = 1$ уравнение (3.4) интегрируется явно

$$B = B_1 - 2p_1 F_1(z), \quad B_1 = b_1 + p_1(2 \ln(R\sqrt{kx}/\epsilon) + C + \ln 2 - 1)$$

$$F_1(z) = F(z) \left(\ln z - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-1}(t) \ln t dt - \int_0^z e^{-1}(x) x^{-2} \int_0^x e(t) F(t) dt \quad (3.6)$$

$$e(z) = \exp(z^2/2)$$

где C – постоянная Эйлера. Функция $F_1(z)$ и ее асимптота при $z \gg 1$, $\ln z - 0.54$, которая соответствует решению уравнений пограничного слоя, представлены на фиг. 2. Как видно, решение (3.6) достаточно быстро выходит на свою асимптоту.

Другое явное решение можно получить для $m = 1/2$. В этом случае

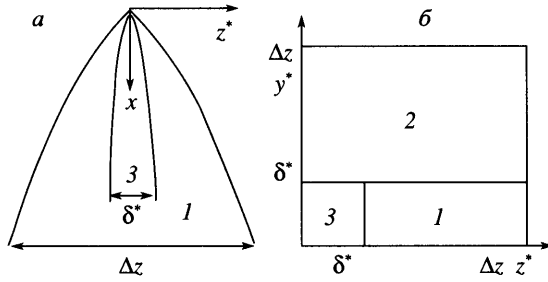
$$B(z) = B_{1/2} F(z)/z - 2p_1 \left\{ F(z) + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} [e^{-1}(z) - 1]/z \right\}$$

Функция $F_2(z) = F(z)/z$ и ее асимптота $1/z$, соответствующая решению (2.4), приведены на фиг. 2.

Таким образом, при $k \geq 1/3$ в малой окрестности плоскости стекания $|\varphi_1 - \phi| \sim O(\epsilon)$ в пограничном слое формируется область вихревого течения, которое описывается укороченными автомодельными уравнениями Навье–Стокса с заданным градиентом давления. Решение этих уравнений не имеет особенностей и срачивается с решением уравнений пограничного слоя при удалении от плоскости $\varphi = \varphi_1$.

4. Особенности в плоскости стекания при $k \geq 1/3$ приводят также к другому эффекту – росту толщины пограничного слоя при $\zeta \rightarrow 0$ и вязко-невязкому взаимодействию. Используя в соотношении (2.2) для $W(y, \zeta)$ асимптотическое представление функции $\operatorname{erfc}(x)$ при $x \gg 1$ [18] и логарифмируя его, из условия $W(\Delta, \zeta) \sim 1$ получим оценки для безразмерной толщины пограничного слоя $\Delta(\zeta)$ в окрестности плоскости стекания

$$\begin{aligned} k > 1: \Delta \sim \zeta^{n-1} \sqrt{\ln(1/\zeta^2)}; \quad k = 1: \Delta \sim \ln(1/\zeta^2) \\ 1/3 < k < 1: \Delta \sim \sqrt{\frac{1-m}{1-k}} \ln \frac{1}{\zeta^2}, \quad k = \frac{1}{3}: \Delta \sim \sqrt{\ln \ln \left(\frac{1}{\zeta^2} \right)} \end{aligned} \quad (4.1)$$



Фиг. 3. Структура течения в окрестности плоскости стекания: *a* – вид сверху; *b* – поперечное сечение, 1 – пограничный слой, 2 – область невязкого течения, 3 – пограничная область; y^* и z^* – декартовы координаты в плоскости поперечного сечения с началом на линии стекания, δ^* – толщина пограничного слоя, Δz – размер области взаимодействия

Точность этих выражений есть $O(\ln \Delta)$. Поведение толщины вихревого слоя при $\zeta \rightarrow 0$ зависит от значения параметра k : она медленно увеличивается по закону двойного логарифма при $k = 1/3$, зависимость становится степенной только при $k > 1$. Из-за этого особенность трудно обнаружить в численных расчетах, рост толщины пограничного слоя при $\varphi \rightarrow \varphi_1$ становится заметным лишь с развитием отрыва.

Чтобы эффект вязко-невязкого взаимодействия проявился в главном порядке, поперечная скорость w_e из (2.5) и индуцированная ростом толщины пограничного слоя скорость w_{ei} должны быть одного порядка. Используя это условие, можно получить оценку для углового размера области взаимодействия $\Delta\varphi \sim \Delta z/x$ и скорости на внешней границе пограничного слоя

$$w_{ei} \sim \frac{2\varepsilon u_e \zeta \partial \Delta}{R \sqrt{x} \partial \zeta} \sim w_e = \frac{3}{2} k R u_e \Delta \varphi \quad (4.2)$$

$$\Delta\varphi \sim \zeta \sim \sqrt{m\varepsilon} x^{-1/4}, \quad w_e \sim w_{ei} \sim k R u_e \sqrt{m\varepsilon} x^{-1/4}$$

Поперечный размер области взаимодействия $\Delta z \sim x^{3/4}$ (фиг. 3), но $\Delta\varphi$ и w_{ei} уменьшаются по x , что качественно согласуется с численными результатами [17]. В этой области введем переменную λ и функции

$$\lambda = R\zeta/\sqrt{\varepsilon}, \quad u_e = u_e(\varphi_1) + O(\varepsilon), \quad h_e = h_e(\varphi_1) + O(\varepsilon)$$

$$w_e = \frac{3}{2} u_e \sqrt{\varepsilon} W_e(x, \lambda), \quad A = W_e, \quad K = W_{e\lambda}, \quad A_1 = O(\varepsilon), \quad R = R(\varphi_1) + O(\varepsilon) \quad (4.3)$$

$$u = u(x, y, \lambda), \quad h = h(x, y, \lambda), \quad w = w(x, y, \lambda), \quad v = f + Kg + Ag_\lambda + \frac{2}{3} x f_x$$

Пограничный слой (область 1 на фиг. 3) описывается уравнениями

$$u_{yy} = W_e w u_\lambda - v u_y + \frac{2}{3} x u u_x, \quad h_{yy} = W_e w h_\lambda - v h_y - M_0 u_y^2 + \frac{2}{3} x u h_x \quad (4.4)$$

$$w_{yy} = W_e w w_\lambda - v w_y + w \left(\frac{2}{3} u + W_{e\lambda} w \right) - h \left(\frac{2}{3} + W_{e\lambda} \right) + \frac{2}{3} x u w_x$$

Краевые условия для этих уравнений сохраняются в виде (1.1), а уравнение энергии интегрируется в виде (2.1). Решение (4.4) должно сращиваться с решением уравнений (2.6) при $\lambda \rightarrow \infty$. Кроме этого, для уравнений (4.4) необходимо поставить начальные

условия в некотором сечении $x = x_0$, которые можно получить из решения уравнений Навье–Стокса в окрестности вершины конуса, что усложняет задачу.

Зависимость функций течения от x связана с взаимодействием пограничного слоя и внешнего потока, которое определяется толщиной вытеснения $\delta^* = \varepsilon\delta(x, \lambda)$ [1]. В области 2 (фиг. 3), где для умеренных сверхзвуковых скоростей потока течение можно считать безвихревым, введем потенциал Φ^* и деформированные координаты

$$\Phi^*(x^*, y^*, z^*) = u_\varepsilon[x + \varepsilon\Phi(x, Y, Z)], \quad y^* = \sqrt{\varepsilon}Y, \quad z^* = \sqrt{\varepsilon}Z$$

Потенциал возмущений находится из решения задачи Неймана

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right|_{Y=0} = \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)^2 \Big|_{Y^2 + Z^2 \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

Используя свойство локальной симметрии, $\delta(x, Z) = \delta(x, -Z)$, на поверхности тела получим соотношения

$$\Phi = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, t) \ln|Z - t| dt$$

$$W_e(x, \lambda) = -k\lambda[1 + r], \quad r(x, \lambda) = \frac{4m}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{\delta(x, t) dt}{\lambda^2 - t^2} \quad (4.6)$$

$$W_{e\lambda}(x, \lambda) = -k(1 - q), \quad q(x, \lambda) = -r_\lambda = -\frac{4m}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{\delta_t(x, t) dt}{\lambda^2 - t^2}$$

Соотношения (4.5) и (4.6) замыкают задачу пограничного слоя (4.4). Для больших сверхзвуковых скоростей несколько иные соотношения следуют из гиперзвуковой теории малых возмущений [19]; в этом случае при некоторых дополнительных предположениях (4.4) допуская автоматическое решение.

Рассмотрим решение уравнений (4.4)–(4.6) для внешней части пограничного слоя, при $y \gg 1$. Введем переменные

$$t = y/\sqrt{d(x, \lambda)}, \quad u = 1 + U(x, t, \lambda), \quad w = 1 - c(x, \lambda)U$$

$$v = y[1 - k(1 + r)], \quad p_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} M_0 + h_w - 1 \right)$$

Уравнения для неизвестных функций имеют вид

$$U_{tt} + tU_t + k(1 + r)d\lambda U_\lambda - \frac{2}{3} dx U_x = 0, \quad U = C_1 \operatorname{erfc} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.7)$$

$$(1 + r)\lambda d_\lambda - 2mxd_x - 2(n - 1 + q)d = -2n$$

$$(1 + r)\lambda c_\lambda - 2mxc_x - 2(m - 1 + q)c = -2m(p_1 - qp_0)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ функции $d(x, \lambda)$ и $c(x, \lambda)$ должны срачиваться с функциями $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ из (2.4). Вдоль характеристик $\xi(x, \lambda) = \text{const}$ – линий тока невязкого течения на поверхности тела – (4.7) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(1 + r)\lambda \xi_\lambda - 2m\xi_x = 0, \quad d = d(\xi, \lambda), \quad c = c(\xi, \lambda)$$

$$(1 + r)\lambda d_\lambda - 2(n - 1 + q)d = -2n, \quad r = r(\xi, \lambda), \quad q = q(\xi, \lambda)$$

$$(1 + r)\lambda c_\lambda - 2(m - 1 + q)c = -2m(p_1 - qp_0)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$c = CE_2\lambda^L + \frac{m(p_1 - p_0q)}{m-1+q} + \lambda^L E_2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{[(m-1)p_0 + p_1]q_t}{(m-1+q)^2 E_2} t^{-L} dt \quad (4.8)$$

$$L(\xi, \lambda) = 2 \frac{m-1+q}{1+r}, \quad E_2(\xi, \lambda) = \exp\left(-\int_{\lambda}^{\infty} L_t \ln t dt\right)$$

$$d = DE_3\lambda^I + \frac{n}{n-1+q} + n\lambda^I E_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{q_t E_3^{-1} t^{-I} dt}{(n-1+q)^2}$$

$$I(\xi, \lambda) = 2 \frac{n-1+q}{1+r}, \quad E_3(\xi, \lambda) = \exp\left(-\int_{\lambda}^{\infty} I_t \ln t dt\right)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ взаимодействие становится слабым, $r \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$, интегралы в соотношениях (4.8) обращаются в ноль. Сравнивая предельные выражения для d и c с соотношениями (2.4) для a и b , найдем $C = b_m \varepsilon^{m-1}$, $D = a_n \varepsilon^{n-1}$.

Функции $c(\xi, \lambda)$ и $d(\xi, \lambda)$ обращаются в бесконечность в точках (ξ_c, λ_c) и (ξ_d, λ_d) , где $L(\xi_c, \lambda_c) = 0$ и $I(\xi_d, \lambda_d) = 0$, причем в обеих точках особенность является логарифмической. Если при приближении к плоскости стекания $L < 0$ или $I < 0$, то возмущения поперечной или продольной скоростей имеют в этой плоскости степенную особенность. Если толщина пограничного слоя растет при $\lambda \rightarrow 0$ вдоль линии тока $\xi = \text{const}$, то $q + r > 0$ и вязко-невязкое взаимодействие приводит к ослаблению особенности, она не возникает, если в поле течения $L > 0$ и $I > 0$. Появление особенности зависит от продольной координаты в области носка, где взаимодействие сильное, она может не возникать, но образовываться ниже по потоку, где взаимодействие ослабевает. Эти результаты качественно согласуются с расчетами [17]. Возникновение особенности приводит к необходимости введения вязкой области $\varphi \sim y^* \sim \varepsilon$ (область 3, фиг. 3), как это сделано в разделе 3, но течение в этой области уже не является автомодельным.

Заключение. Получены в виде квадратур решения уравнений течения для внешней части пограничного слоя на тонких конических телах и их явный вид в окрестности плоскости стекания, который справедлив и для нетонких тел. Эти решения сингулярны в плоскости стекания, что является причиной образования многослойной структуры течения. Возникающая особенность никак не связана с поперечным градиентом давления – она имеет место как при положительном, так и при отрицательном градиенте давления.

В окрестности плоскости стекания размером порядка толщины пограничного слоя образуется вихревая область, течение в которой описывается укороченными автомодельными уравнениями Навье–Стокса с постоянным градиентом давления. Для внешней части области при умеренных значениях параметра задачи получены регулярные решения этих уравнений, которые срываются с решениями уравнений пограничного слоя.

В окрестности плоскости стекания размером порядка корня квадратного из толщины пограничного слоя формируется область, в которой распределение давления в поперечном направлении определяется эффектом вязко-невязкого взаимодействия. Течение в этой области описывается двухслойной моделью. Во внешнем слое справедливы уравнения Эйлера в приближении тонкого крыла малого удлинения, во внутреннем слое – трехмерные неавтомодельные уравнения пограничного слоя; обе системы уравнений связаны между собой условиями взаимодействия. Получено решение для внешней части пограничного слоя и показано, что взаимодействие ослабляет, но не устраняет особенности полностью; их тип становится зависящим от продольной координаты.

В целом во всей особой области течение описывается укороченными трехмерными уравнениями Навье–Стокса, давление в которых определяется взаимодействием пограничного слоя с внешним потоком.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по грантам № 05-08-50233а, 05-01-08087офи_а, и Минобрнауки по гранту ВЦП РНПВШ. 2.1.1. 5904.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moore F.K. Three-dimensional boundary layer theory // *Advances in Applied Mechanics*. N. Y.: Acad. Press, 1956. V. 4. P. 159–228.
2. Башкин В.А. Об единственности автомодельных решений уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1968. № 5. С. 35–41.
3. Башкин В.А., Дудин Г.Н. Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Наука, 2000. 288 с.
4. Roux B. Supersonic laminar boundary layer near the plane of symmetry of a cone at incidence // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 51. Pt 1. P. 1–14.
5. Wu P., Libby P.A. Laminar boundary layer on a cone near a plane of symmetry // *AIAA Journal*. 1973. V. 11. № 3. P. 326–333.
6. Murdock J.W. The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. Pt 4. P. 665–678.
7. Башкин В.А., Диканский Е.А. Ламинарный пограничный слой на линиях растекания и стекания конических тел в сверхзвуковом потоке при различных числах Прандтля // *Учен. зап. ЦАГИ*. 2001. Т. 32. № 3–4. С. 66–80.
8. Шалаев В.И. Особенности в пограничном слое на конусе, обтекаемом под углом атаки // *Изв. РАН. МЖГ*. 1993. № 6. С. 25–33.
9. Shalaev V.I. Singularities of the viscous flow near a cone at incidence // *Intern. Conf. "Fundamental Researches in Aerospace Science"*. Book abstracts. TsAGI, 1994. P. 71–73.
10. Шалаев В.И. Особенности трехмерного пограничного слоя на конусе // *Матер. 5-й Междунар. школы-семинара "Модели и методы аэродинамики"*. М.: МЦМНО, 2005. С. 124–125.
11. Rubin S.G., Lin T.C., Tarulli F. Symmetry plane viscous layer on a sharp cone // *AIAA Journal*. 1977. V 15. № 2. P. 204–211.
12. Sebeci T., Stewartson K., Brown S. N. Nonsimilar boundary layers on the leeward side of cones at incidence // *Comput. and Fluids*. 1983. V 11. № 3. P. 175–186.
13. Dwyer H.A. Boundary layer on a hypersonic sharp cone at small angle of attack // *AIAA Journal*. 1971. V. 9. № 2. P. 277–284.
14. Boerick R.R. The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flows // *AIAA Journal*. 1971. V. 9. № 3. P. 462–468.
15. Нейланд В.Я., Соколов Л.А. Ламинарный пограничный слой на конусе, установленном под углом атаки в сверхзвуковом потоке // *Тр. ЦАГИ*. 1977. Вып. 1819. С. 3–9.
16. Lin T.C., Rubin S.G. Viscous flow over a cone at moderate incidence. Pt 2. Supersonic boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. Pt 3. P. 593–620.
17. Башкин В.А., Егоров И.В., Иванов Д.В., Пляшечник В.И. Теоретическое и экспериментальное исследование обтекания тонкого острого кругового конуса под углом атаки сверхзвуковым потоком газа // *Изв. РАН. МЖГ*, 2003. № 1. С. 123–133.
18. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: УРСС, 2002. 515 с.
19. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 455 с.