

УДК 532.592

© 2007 г. М.И. ИВАНОВ

НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИЛИВНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ВОЛНЫ РОССБИ

Исследуется приливное уравнение Лапласа, играющее фундаментальную роль в теории приливов. Разработан метод численно-аналитического интегрирования приливного уравнения Лапласа на всей сфере без использования приближения β -плоскости, исследованы его неосесимметричные решения. Получены гармоники, соответствующие долгопериодным колебаниям, известным как планетарные волны или волны Россби.

Ключевые слова: приливное уравнение Лапласа, функции Хафа, неосесимметричные гармоники, волны Россби, особые точки, ряд Фукса.

В 1775 г. при исследовании динамических приливов Лаплас получил дифференциальное уравнение, описывающее собственные гармонические колебания тонкого слоя жидкости, покрывающего вращающийся шар, в настоящее время носящее его имя [1, 2]. Выведенное для океана постоянной глубины, это уравнение, однако, применимо к более широкому классу задач; в частности, к нему сводятся задача метеорологии о приливах в атмосфере Земли [3–7] или исследование приливов на вращающихся звездах [8, 9]. Хотя уравнение Лапласа представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, его полное решение до сих пор не получено. Это связано, во-первых, с тем, что оно не сводится ни к одному из известных в теории ОДУ уравнений, во-вторых, с тем, что у него имеются особые точки, и, в-третьих, с тем, что искомая собственная частота входит в уравнение сложным, нелинейным образом. В большинстве случаев один из интегралов уравнения Лапласа будет обращаться в особую точку в бесконечность, что затрудняет применение к уравнению Лапласа численных методов.

Наибольшего продвижения в решении задачи достиг Хаф в 1897–1898 гг. [10, 11]. Он попытался выразить собственные функции уравнения Лапласа рядами из функций Лежандра и вывел формулу для приближенного вычисления собственных частот. В большинстве последующих исследований [3, 4, 6, 12, 13] решения уравнения Лапласа разыскивались согласно методике Хафа, т.е. в виде бесконечных рядов из сферических функций, а собственные числа – по методу Бубнова–Галеркина, что приводило к трудным и громоздким вычислениям. Возможно, наилучших результатов добился Лонге-Хиггинс [12]. Получение и исследование свойств мод представляло более сложную задачу. Только в редких случаях удавалось довести исследование приливного уравнения Лапласа до построения мод [3, 6, 12], полученных к тому же с неопределенной точностью.

Из альтернативных методов отметим сведение уравнения Лапласа к уравнению, определяющему сфероидальные функции [12, 14, 15], допустимое при больших значениях безразмерного параметра β , что характерно для быстро вращающихся планет. Значительные сложности вызывала также геометрия сферы, что привело к возникновению приближения β -плоскости, которое заключалось в замене криволинейной поверхности сферы некоторой плоскостью с линеаризацией параметра Кориолиса по меридиану [14–16]. Предпринимались попытки устранить трудности, связанные с нали-

чаем особых точек, решая задачу для океана, ограниченного кругами широты, и приближая ограничивающие широты к полюсам шара [17]. Были исследованы лишь осесимметричные гармоники, так как в случае неосесимметричных колебаний краевые условия на всей сфере не будут пределом краевых условий при устремлении ограничивающих широт к полюсам.

Особый интерес вызывали не существующие в осесимметричной постановке решения, описывающие течения с периодом, превышающим период вращения планеты, которые были названы планетарными волнами или волнами Россби. Подобные течения в земной атмосфере были обнаружены Россби при анализе метеорологических данных [18].

Автором разработан метод интегрирования уравнения Лапласа с использованием рядов Фукса в окрестностях особых точек и последующим численным решением обобщенной задачи Штурма–Лиувилля. При помощи разработанного метода были получены собственные частоты уравнения Лапласа в случае неосесимметричных колебаний и построены соответствующие моды, в том числе и отвечающие волнам Россби.

1. Постановка задачи. Приливное уравнение Лапласа имеет вид [3–5]

$$f \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{\partial Y}{\partial \mu} \right) + \left(\frac{n(f^2 + \mu^2)}{(f^2 - \mu^2)^2} - \frac{n^2 f}{(1 - \mu^2)(f^2 - \mu^2)} + \beta f \right) Y = 0 \quad (1.1)$$

где $\mu = \cos \theta$, $f = \sigma/2\omega$, $\beta = 4\omega^2 a^2/g h$, θ – коширота, ω – угловая скорость вращения планеты, σ – угловая скорость волны, n – широтное волновое число (число волн на параллели), g – ускорение свободного падения, a – радиус планеты, h – эквивалентная глубина.

В дальнейшем изучим уравнение (1.1). Будем рассматривать сферу, целиком покрытую водой. Механически это наиболее интересный случай, однако его исследование представляет значительную математическую трудность, так как в область значений переменной μ входят полюса сферы, являющиеся особыми точками уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) не инвариантно относительно замены n на $-n$ и f на $-f$, но инвариантно относительно их синхронной замены. Это означает, что отрицательным значениям n отвечают волны, распространяющиеся против направления вращения Земли, поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать лишь положительные значения n .

Рассмотрим неосесимметричные колебания $n \geq 1$. Граничными условиями для сферы, целиком покрытой водой, будут условия [19]

$$Y(\pm 1) = 0 \quad (1.2)$$

Это очевидно ввиду того обстоятельства, что при $n \geq 1$ на сфере существует по меньшей мере один меридиан, значение волнового возмущения на котором всегда равно нулю, а такой меридиан обязан пройти через оба полюса сферы.

Задача (1.1), (1.2) представляет собой обобщенную задачу Штурма–Лиувилля, причем в общем случае уравнение (1.1) имеет четыре особые точки: полюса сферы $\mu = \pm 1$ и так называемые критические широты $\mu = \pm f$. Когда $|f| > 1$, количество особых точек сокращается до двух (полюса сферы).

2. Интегрирование задачи на собственные значения. Рассмотрим особые точки уравнения (1.1). Согласно теории Фукса, они – регулярные особые точки, а поведение интегралов уравнения (1.1) будет определяться значениями корней характеристического уравнения [20, 21]. Для полюсов шара корни Фукса равны $n/2$ и $-n/2$, откуда следует, что один из фундаментальных интегралов всегда будет голоморфен, тогда как другой будет на полюсе обращаться в бесконечность.

Построим в окрестности полюса шара ряд Фукса для голоморфного решения. Воспользуемся приближенным равенством $1 - \mu^2 \approx 2(1 \mp \mu)$, $\mu \rightarrow \pm 1$, чтобы получить выражение, пригодное для обоих полюсов. Тогда имеем

$$F(\mu) = (1 - \mu^2)^{n/2} + \frac{n(2 - f + f^2) + n^2 f(1 + f) + 2\beta f(1 - f)(1 + f)^2}{8(n + 1)f(1 + f)} (1 - \mu^2)^{(n/2)+1} + O((1 - \mu^2)^{(n/2)+2}) \quad (2.1)$$

где $F(\mu)$ – всюду голоморфный фундаментальный интеграл уравнения Лапласа. Аналогичное разложение в окрестности обоих полюсов сферы было получено еще Эскартом [19], но использовалось лишь для качественного исследования уравнения Лапласа, собственные частоты и моды не вычислялись.

Второй фундаментальный интеграл обращается в особых точках в бесконечность, так как будет содержать член $(1 - \mu^2)^{-n/2}$ [20], и поэтому должен быть отброшен как не имеющий физического смысла.

Рассмотрим теперь критические широты. Для любого n корни Фукса критических широт равны 2 и 0. Отсюда следует, что один интеграл будет голоморфен, а другой ограничен вместе со своей первой производной. Следовательно, любое решение уравнения Лапласа будет конечно на критической широте.

Зафиксируем β, f и n . Удержим в ряде (2.1) несколько первых членов. Обозначим такой ряд как $F^*(\mu)$. (В описанном ниже численном решении удерживались первые два члена.) В малой окрестности $[\mu_0, 1]$ конечный ряд $F^*(\mu)$ совпадает с искомой функцией $Y(\mu)$ с точностью до членов высших порядков малости (не ограничивая общности, можно рассматривать только одно полушарие), где μ_0 – некоторое число, близкое к единице.

Составим граничные условия

$$Y(\mu_0) = F^*(\mu_0) \quad (2.2)$$

$$Y'(\mu_0) = F^{*'}(\mu_0) \quad (2.3)$$

Решение краевой задачи (1.1), (2.2), (2.3) при фиксированном f ($|f| \neq 1$) может быть проведено стандартными численными методами, например методом Рунге–Кутты. Оно дает набор функций, зависящих от f . Гармоники задачи (1.1), (1.2) (называемые функциями Хафа) обязательно должны быть симметричны или антисимметричны. Легко видеть, что других мод быть не может. Требуя выполнения одного из условий

$$Y(0) = 0 \quad (2.4)$$

$$Y'(0) = 0 \quad (2.5)$$

получаем соответствующие собственные функции (условию (2.4) удовлетворяют антисимметричные моды, а условию (2.5) – симметричные). Устремляя $\mu_0 \rightarrow 1$, получаем решения спектральной задачи (1.1), (1.2).

Численная реализация метода показала, что получающиеся собственные значения и формы обладают устойчивостью к включению в формулу (2.1) более старших членов ряда Фукса и уменьшению радиуса окрестности полюса сферы, где решение уравнения Лапласа заменяется этим рядом, что подтверждает корректность разработанного метода.

Отметим, что использование свойств голоморфного решения в окрестности полюса для конструирования алгоритма численного интегрирования приливного уравнения Лапласа было применено в [8, 9], но разработанный авторами метод интегрирования отличается громоздкостью и приводит к появлению большого числа искусственно введенных свободных неизвестных, что весьма затрудняет сходимость к истинному решению.

3. Точные решения. При $\beta = 0$ уравнение (1.1) имеет точные решения, известные как волны Гаурвица [7, 13, 16, 22]

$$f_n^s = \frac{n}{(n+s+1)(n+s+2)}$$

$$Y_n^s = \frac{s+2}{(2n+2s+3)(n+s+2)^2} P_{n+s+2}^n(\mu) + \frac{2n+s+1}{(2n+2s+3)(n+s+1)^2} P_{n+s}^n(\mu) \quad (3.1)$$

Здесь $n > 0$ – широтное волновое число, $s \geq -1$ – номер моды (азимутальное волновое число), $P_s^n(\mu)$ – присоединенные (ненормированные) функции Лежандра. Как можно видеть, все собственные частоты для случая невращающейся планеты отрицательны и при этом находятся в интервале $[-1/2, 0)$. Пронормированные собственные функции показаны на фиг. 1. Количество нулей каждой моды равно модулю азимутального волнового числа и возрастает по мере увеличения периода (за исключением самой быстрой волны, азимутальное число которой равно -1). Две моды имеют один нуль, их азимутальные волновые числа есть 1 и -1 . С ростом s экстремумы мод смещаются к полюсам, а возвышение вблизи экватора приближается по абсолютной величине к нулю. Симметричные моды около экватора имеют характерный М-образный профиль. В случае наличия нескольких экстремумов, максимальную величину из них имеет ближайший к полюсу. Таким образом, волны Гаурвица в некотором смысле полярны.

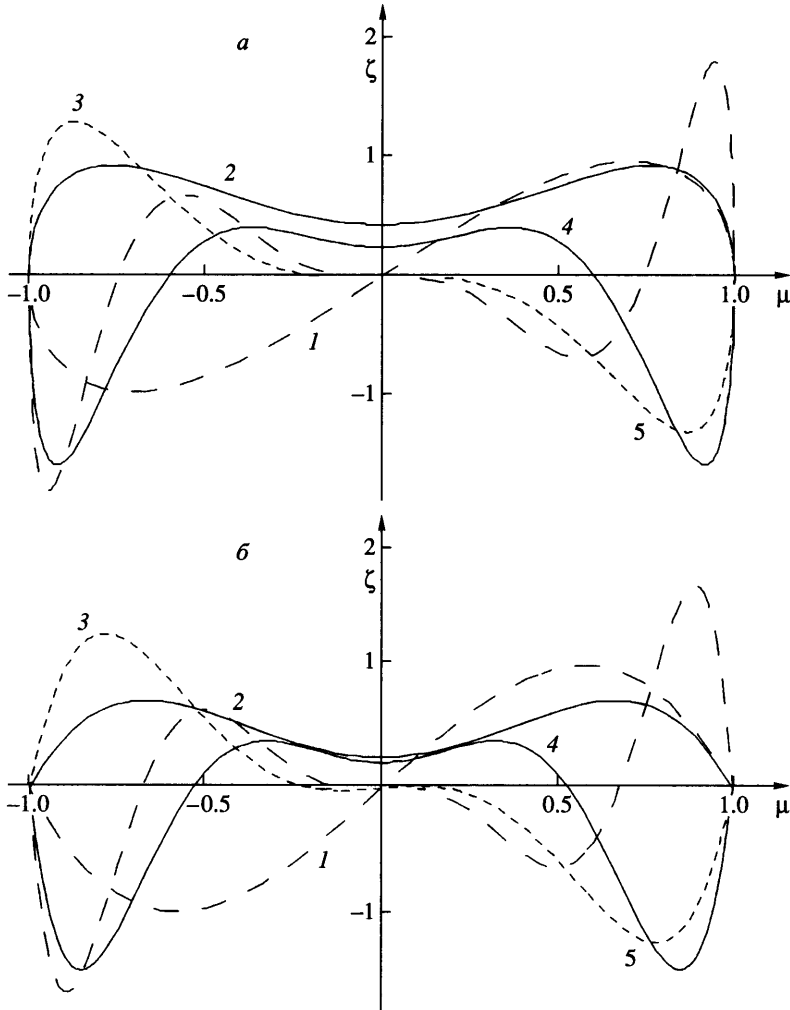
4. Численные исследования. Частоты и моды. Собственные частоты уравнения Лапласа на всей сфере было достаточно подробно исследованы аналитически [10–13]. Хаффом была получена формула для приближенного нахождения собственных частот в этом случае [1, 10, 11]

$$f \frac{2k(k+1) + nf^{-1}}{k^2(k+1)^2} - \frac{(k-1)^2(k-n)(k+n)}{k^2(2k-1)(2k+1)(k(k-1) + nf^{-1})} -$$

$$- \frac{(k+2)^2(k-n+1)(k+n+1)}{(k+1)^2(2k+1)(2k+3)((k+1)(k+2) + nf^{-1})} - \frac{1}{\beta} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $k \geq n$ – целое число. Отметим, что формула (4.1) получена удержанием нескольких членов в разложении решения по сферическим функциям и является неутонченной.

Зафиксируем β . Аналитическое исследование формулы (4.1) показывает, что для каждого конкретного значения n и k собственная частота f принимает четыре различных значения, три из которых отрицательны, а одно – положительно (за исключением случаев $n = 0$ и $k = n$). Собственные колебания принято разделять на два рода [1]. К колебаниям первого рода относят два больших по модулю корня уравнения (4.1), один из которых положителен, а другой отрицателен (отрицательный корень по абсолютной величине больше). Им отвечает короткопериодические волны, движущиеся как в направлении вращения Земли, так и против него (вторые имеют меньший период обращения). В осесимметричном случае ($n = 0$) других колебаний нет (уравнение (4.1) имеет только два равных по модулю корня разных знаков), притом положительная и отрицательная волны имеют равный период. Эти колебания в случае неосесимметричных колебаний дополняются колебаниями второго рода, которые соответствуют двум меньшим по модулю отрицательным корням уравнения (4.1) (им отвечают волны, при стремящейся к нулю скорости вращения Земли переходящие в волны Гаурвица (3.1)). Частоты этих колебаний образуют уплотняющийся вблизи нуля спектр, а сами волны всегда движутся против направления вращения Земли. Периоды колебаний второго рода всегда превышают сутки. При $n = k$ уравнение Хафа имеет только три корня: два отрицательных и один положительный.



Фиг. 1. Волны Гаурвица R_i для значений $\{i, f\}$: а - $n = 1$ ($1 - \{-1, -1/2\}$, $2 - \{0, -1/6\}$, $3 - \{1, -1/12\}$, $4 - \{2, -1/20\}$, $5 - \{3, -1/30\}$); б - $n = 2$ ($1 - \{-1, -1/3\}$, $2 - \{0, -1/6\}$, $3 - \{1, -1/10\}$, $4 - \{2, -1/15\}$, $5 - \{3, -1/21\}$)

Построенные табл. 1–3 позволяют оценить точность формулы Хафа (4.1). В них сравнены частоты собственных колебаний на всей сфере, вычисленные по формуле (4.1) и соответствующие результаты численного интегрирования краевой задачи (1.1), (1.2) для значений $\beta = \beta_0/3$, β_0 и $3\beta_0$ соответственно, где $\beta_0 = 19.648$ – числовое значение безразмерного параметра β , отвечающее средней глубине мирового океана [17]. Можно видеть, что рост β приводит к снижению собственной частоты, а переход к большим значениям n – напротив, к увеличению собственной частоты (за единственным исключением).

При малых β или больших n точность формулы Хафа следует признать весьма высокой. С другой стороны, сравнение таблиц показывает, что формула (4.1) дает лишние (продублированные) собственные частоты, относящиеся к колебаниям второго рода.

Таблица 1

n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.440	-0.990	-	-0.117	0.434	-0.109	-	-0.970	-
1	1	1.017	-1.262	-0.437	-0.068	1.010	-0.065	-0.436	-	-1.252
1	2	1.452	-1.556	-0.152	-0.044	1.450	-0.043	-	-	-1.559
1	3	1.845	-1.902	-0.078	-0.031	1.845	-0.030	-	-	-1.905
1	4	2.229	-2.266	-0.048	-0.023	2.230	-0.022	-	-	-2.267
2	0	0.858	-1.211	-	-0.147	0.855	-0.140	-	-	-1.200
2	1	1.368	-1.564	-0.314	-0.091	1.365	-0.088	-0.314	-	-1.558
2	2	1.798	-1.911	-0.158	-0.062	1.797	-0.061	-	-	-1.911
2	3	2.200	-2.273	-0.096	-0.045	2.200	-0.044	-	-	-2.274
2	4	2.593	-2.644	-0.065	-0.034	2.593	-0.034	-	-	-2.645
3	0	1.268	-1.527	-	-0.142	1.267	-0.138	-	-	-1.523
3	1	1.741	-1.903	-0.242	-0.095	1.739	-0.093	-0.242	-	-1.901
3	2	2.165	-2.272	-0.145	-0.069	2.164	-0.067	-	-	-2.272
3	3	2.570	-2.645	-0.097	-0.052	2.569	-0.051	-	-	-2.645
3	4	2.966	-3.022	-0.070	-0.041	2.966	-0.040	-	-	-3.022

Отметим, что во вторых половинах табл. 1–3 гармоники сгруппированы иначе, чем принято в [1]. К колебаниям первого рода относятся P-, FN- и SN-волны, к колебаниям второго рода – R-волны и I-волна (R_{-1}). Основаниями для такой классификации служат свойства гармоник.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Нижним индексом будем обозначать число нулей гармоники в промежутке между двумя полюсами (сами полюсы, в которых мода обращается в нуль вследствие краевых условий (1.2), в счет брать не будем). Младшей модой класса будем называть моду, имеющую наименьшее число нулей, старшей – соответственно имеющую наибольшее.

В самом общем виде последовательность волн, движущихся как по (первая строка), так и против направления вращения Земли (последующие строки), с возрастанием абсолютной величины собственного числа выглядит так

$$P_0, P_1, P_2, \dots$$

$$\dots, R_2, R_1, R_0, I = R_{-1}, SN_2, SN_3, \dots, SN_i, FN_{i-1}, FN_i, FN_{i+1}, \dots$$

$$(\dots, R_2, R_1, R_0, I = R_{-1}, SN_2, FN_1, FN_2, FN_3, \dots,$$

$$\dots, R_2, R_1, R_0, I = R_{-1}, FN_0, FN_1, FN_2, \dots)$$

В скобках представлены возможные варианты при малых i . Нижняя последовательность отвечает случаю, когда SN-волны отсутствуют (как, например, в табл. 1 для $n = 2, 3$).

Волны, направление движения которых совпадает с направлением вращения Земли, обозначены как P-волны (“положительные волны”). В литературе их относят к классу гравитационных волн [6, 13]. Они отличаются друг от друга только числом нулей и для рассмотренных значений β сходны с тригонометрическими функциями (а не с присоединенными функциями Лежандра), так как имеют по сути равные величины экстремумов

Таблица 2

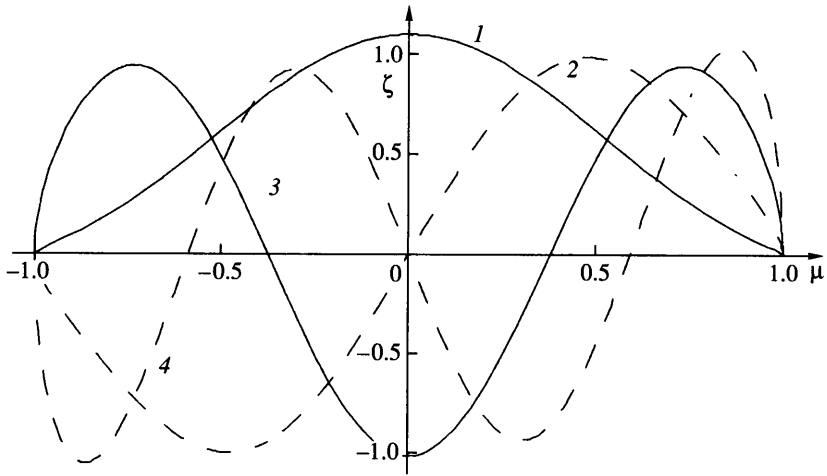
n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.255	-0.843	-	-0.079	0.240	-0.072	-	-0.765	-
1	1	0.678	-0.997	-0.382	-0.049	0.652	-0.046	-0.372	-0.955	-
1	2	0.957	-1.084	-0.137	-0.036	0.943	-0.033	-	-	-1.102
1	3	1.181	-1.248	-0.072	-0.027	1.179	-0.025	-	-	-1.260
1	4	1.393	-1.435	-0.045	-0.020	1.394	-0.019	-	-	-1.441
2	0	0.487	-0.867	-	-0.120	0.478	-0.110	-	-0.836	-
2	1	0.849	-1.082	-0.290	-0.076	0.835	-0.071	-0.288	-	-1.059
2	2	1.120	-1.251	-0.148	-0.055	1.112	-0.051	-	-	-1.250
2	3	1.355	-1.438	-0.091	-0.041	1.353	-0.039	-	-	-1.440
2	4	1.579	-1.635	-0.062	-0.032	1.579	-0.030	-	-	-1.638
3	0	0.719	-0.991	-	-0.129	0.714	-0.120	-	-0.978	-
3	1	1.043	-1.225	-0.231	-0.086	1.033	-0.081	-0.231	-	-1.213
3	2	1.307	-1.427	-0.139	-0.063	1.303	-0.060	-	-	-1.423
3	3	1.547	-1.630	-0.093	-0.049	1.545	-0.047	-	-	-1.630
3	4	1.776	-1.837	-0.067	-0.039	1.776	-0.037	-	-	-1.838

Таблица 3

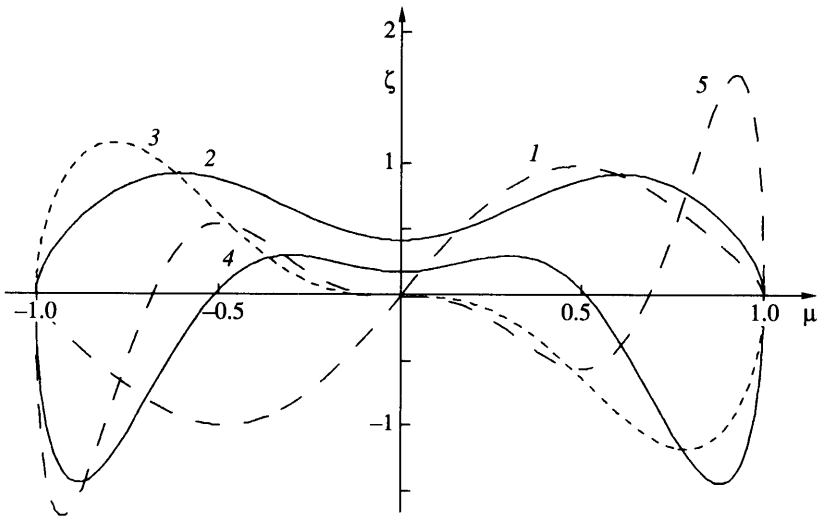
n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.163	-0.786	-	-0.044	0.135	-0.043	-	-0.598	-
1	1	0.517	-0.902	-0.338	-0.027	0.448	-0.027	-0.302	-0.764	-
1	2	0.719	-0.874	-0.123	-0.022	0.667	-0.020	-	-0.882	-
1	3	0.851	-0.934	-0.065	-0.018	0.828	-0.016	-	-0.971	-
1	4	0.965	-1.016	-0.042	-0.015	0.960	-0.014	-	-	-1.048
2	0	0.292	-0.710	-	-0.082	0.269	-0.074	-	-0.617	-
2	1	0.583	-0.870	-0.262	-0.051	0.541	-0.048	-0.250	-0.786	-
2	2	0.772	-0.933	-0.134	-0.039	0.741	-0.036	-	-0.914	-
2	3	0.916	-1.015	-0.083	-0.031	0.900	-0.029	-	-	-1.020
2	4	1.042	-1.109	-0.057	-0.026	1.037	-0.024	-	-	-1.119
3	0	0.419	-0.717	-	-0.102	0.404	-0.092	-	-0.671	-
3	1	0.671	-0.890	-0.214	-0.066	0.644	-0.062	-0.210	-0.840	-
3	2	0.852	-0.994	-0.128	-0.050	0.831	-0.046	-	-0.975	-
3	3	0.999	-1.097	-0.087	-0.040	0.988	-0.037	-	-	-1.093
3	4	1.133	-1.203	-0.063	-0.033	1.128	-0.030	-	-	-1.205

(фиг. 2). Самая младшая мода этого класса (P_0), известная как волна Кельвина [6, 13], обращается в нуль только на полюсах шара.

Долгопериодные моды, движущиеся в отрицательном направлении (R-волны), суть волны Россби (фиг. 3), аналогичные волнам Гаурвица п.3. Рост β приводит к смещению к экватору экстремумов соответствующих мод. В литературе их относят к классу гироскопических волн [6, 13].

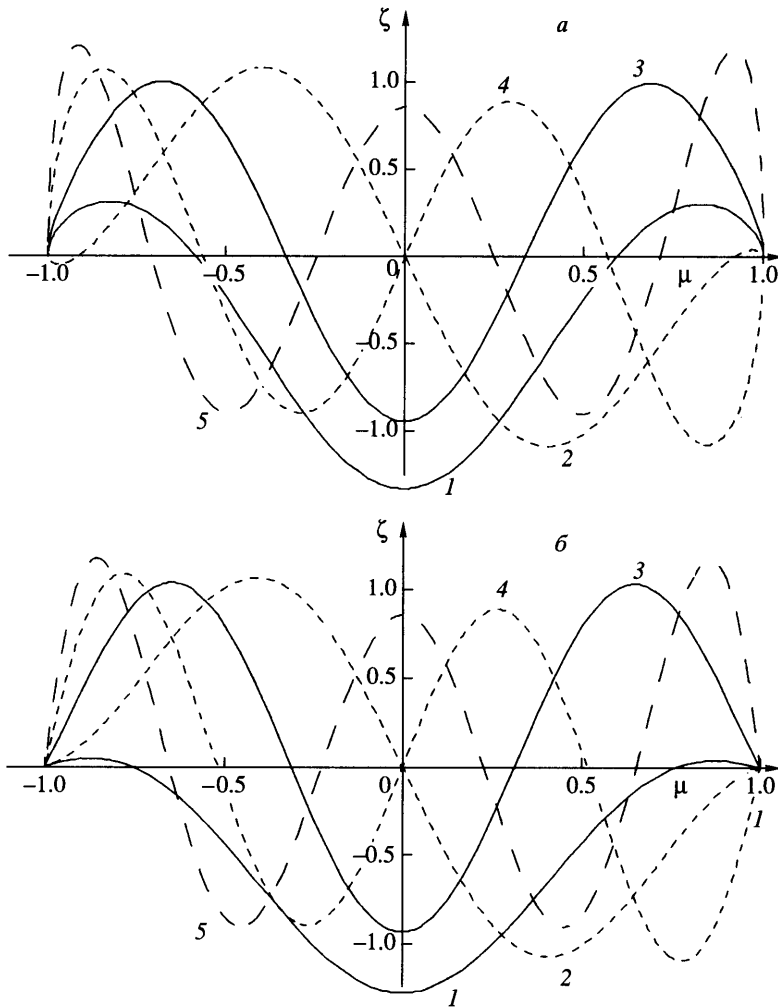


Фиг. 2. Положительные волны P_i $\{i, f\}$, $n = 1$ (1 – $\{0, 0.240\}$, 2 – $\{1, 0.652\}$, 3 – $\{2, 0.943\}$, 4 – $\{3, 1.179\}$)



Фиг. 3. Волны Россби R_i $\{i, f\}$, $n = 1$ (1 – $\{-1, -0.372\}$, 2 – $\{0, -0.072\}$, 3 – $\{1, -0.046\}$, 4 – $\{2, -0.033\}$, 5 – $\{3, -0.025\}$)

Следующая за R_0 гармоника – I-волна (ее также можно обозначить как R_{-1} , фиг. 3). Она, как и волны Россби, относится к колебаниям второго рода, но имеет смысл выделить ее в отдельный класс “промежуточных волн”, так как по ряду свойств она отличается от обычных R-волн. Эта волна представляет собой антисимметричное колебание с единственным нулем на экваторе, сходное с модой P_1 . Кроме того, эта гармоника – единственная во всем спектре, частота которой понижается при переходе к большим значениям n . Эта мода известна как смешанная гравитационно-гироскопическая волна [6, 13].



Фиг. 4. Отрицательные волны: *a* – $n = 1$ (1 – $\{SN_2, -0.765\}$, 2 – $\{SN_3, -0.955\}$, 3 – $\{FN_2, -1.102\}$, 4 – $\{FN_3, -1.260\}$, 5 – $\{FN_4, -1.441\}$); *б* – $n = 2$ (1 – $\{SN_2, -0.836\}$, 2 – $\{FN_1, -1.059\}$, 3 – $\{FN_2, -1.250\}$, 4 – $\{FN_3, -1.440\}$, 5 – $\{FN_4, -1.638\}$)

Вид P- и R-волн при $n = 2$ аналогичен случаю $n = 1$, и потому соответствующие фигуры не показаны. Единственное качественное различие заключается в характере подхода моды к полюсу, который определяется по (2.1).

Класс SN-волн относится уже к первому роду. Периоды волн данного класса не могут быть меньше полусуток, поэтому возможен случай, когда в спектре SN-волны будут отсутствовать. Если же они присутствуют, младшая SN-мода всегда симметрична и имеет два нуля между полюсами и экстремум на экваторе, с повышением частоты количество нулей увеличивается (фиг. 4). Ближайший к полюсу экстремум SN-моды, расположенный вблизи критической широты, чаще всего по величине гораздо меньше, чем остальные экстремумы.

Значение $f = -1$ – критическое, при переходе через него свойства мод меняются. Волны с $f < -1$ обозначены как FN-волны (фиг. 4). В отличие от SN-волн они имеют почти

равные экстремумы (что, видимо, связано с отсутствием критической широты) и сходны с Р-волнами. При этом у младшей FN-моды всегда на один нуль меньше, чем у старшей SN-моды. У последующих FN-мод количество нулей растет. Эта особенность может привести к ситуации, когда почти идентичные по форме гармоники (и движущиеся в одном и том же направлении) отвечают сильно различающимся значениям собственной частоты. Как SN-, так и FN-моды относят к классу гравитационных волн [6, 13].

Заключение. Разработан метод численно-аналитического интегрирования приливного уравнения Лапласа без использования приближения β -плоскости, применение которого позволило найти неосесимметричные моды уравнения Лапласа и исследовать их свойства. Изучение геометрии неосесимметричных мод позволило предложить их классификацию, удовлетворяющую требованию, чтобы в одном классе не было двух различных мод с одинаковым количеством нулей. Установлено, что значение $f = -1$ критическое, при переходе через него свойства мод меняются. Оценена точность формулы Хафа для определения собственных частот.

Автор выражает благодарность С.В. Нестерову и Л.Д. Акуленко за поддержку работы и плодотворные обсуждения и В.Г. Байдулову, высказавшему ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сретенский Л.Н.* Динамическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
2. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932. = *Ламб Г.* Гидродинамика. Т. 1. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. 452 с.
3. *Chapman S., Lindzen R.S.* Atmospheric tides. Thermal and Gravitational. Dordrecht: D. Reidel, 1970. = *Чепмен С., Линдзен Р.* Атмосферные приливы. Термические и гравитационные. М.: Мир, 1972. 295 с.
4. *Сидоренков Н.С.* Атмосферные процессы и вращение Земли. СПб: Гидрометеоздат, 2002. 367 с.
5. *Akasofu S.-I., Chapman S.* Solar terrestrial physics. Oxford: Clarendon Press, 1972. = *Акасофу С.-И., Чепмен С.* Солнечно-земная физика. Ч. 1. М.: Мир, 1974. 384 с.
6. *Volland H.* Atmospheric Tidal and Planetary Waves. Dordrecht: Kluwer, 1988. 364 p.
7. *Дикий Л.А.* Атмосфера Земли как колебательная система // Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1. № 5. С. 469–489.
8. *Bildsten L., Ushomirsky G., Cutler C.* Ocean g-modes on rotating neutron stars // *Astrophys. J.* 1996. V. 460. № 2. Pt 1. P. 827–831.
9. *Lee U., Saio H.* Low-frequency nonradial oscillations in rotating stars. Pt I. Angular dependence // *Astrophys. J.* 1997. V. 491. № 2. Pt 1. P. 839–845.
10. *Hough S.S.* On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Pt I. On Laplace's "Oscillations of the first species" and on the dynamics of ocean currents // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1897. V. 189. P. 201–257.
11. *Hough S.S.* On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Pt II. On the general integration of Laplace's dynamical equations // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1898. V. 191. P. 139–185.
12. *Longuet-Higgins M.S.* The eigenfunctions of Laplace's tidal equations over a sphere // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1968. V. 262. № 1132. P. 511–607.
13. *Schwarztrauber P.N., Kasahara A.* The vector harmonic analysis of Laplace's tidal equations // *SIAM Journal. Sci. Stat. Comput.* 1985. V. 6. № 2. P. 464–491.
14. *Longuet-Higgins M.S.* Planetary waves on a rotating sphere // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1964. V. 279. № 1379. P. 446–473.
15. *Longuet-Higgins M.S.* Planetary waves on a rotating sphere, part II // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1965. V. 284. № 1396. P. 40–68.
16. *Haurwitz B.* The motion of atmospheric disturbances on the spherical Earth // *J. Mar. Res.* 1940. V. 3. № 5. P. 254–267.

17. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Шматков А.М. Собственные колебания поверхности вращающегося сферического слоя жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 85–95.
18. Rossby C.-G. et al. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action // J. Mar. Res. 1939. V. 2. № 1. P. 38–55.
19. Eckart C. Hydrodynamics of oceans and atmospheres. Oxford etc.: Pergamon Press, 1960. = Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 327 с.
20. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 351 с.
21. Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, 1959. = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб: Лань, 2003. 576 с.
22. Neamtan S.M. The motion of harmonic waves in the atmosphere // J. Meteorol. 1946. V. 3. № 2. P. 53–56.

Москва

Поступила в редакцию
26.X.2006