

УДК 532.546:536.34

© 2007 г. А.А. АФАНАСЬЕВ, А.А. БАРМИН

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ И ПАРА С УЧЁТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Рассматривается фильтрация жидкости в пористой среде с учетом процессов теплопроводности и фазовых переходов. Решена одномерная задача о распаде произвольного разрыва применительно к процессам совместной неизотермической фильтрации воды и пара. Предполагается, что слева и справа от начального разрыва присутствуют двухфазные области фильтрации воды и пара. Построены шесть качественно различных разрывных решений с внутренними однофазными зонами фильтрации воды или пара и в пространстве определяющих параметров ограничены области, соответствующие каждому из решений. При выполнении требования существования структуры разрыва [1] решение задачи о распаде при рассмотренных параметрах существует и единственно.

*Ключевые слова:* фильтрация, фазовые переходы, разрывы, автомодельные решения, задача о распаде произвольного разрыва.

В работах [2–4] рассмотрены одномерные задачи об инжекции воды в паросодержащий геотермальный пласт. Показано [2], что существуют параметры задачи, для которых решение, содержащее исключительно однофазные области фильтрации воды или пара, термодинамически противоречиво (имеются области, в которых пар переохлажден: температура пара меньше температуры равновесия между водой и паром, или области, в которых вода перегрета). В [4] в ряде случаев удалось построить решение с промежуточной областью совместной фильтрации жидкостей: областью фильтрации пароводяной смеси. В [5] решена аналогичная [2–4] задача об инжекции перегретого пара в нефтяной пласт.

В [1, 6, 7] рассмотрена структура разрывов смесь–смесь, смесь–пар, смесь–вода, вода–пар. В пространстве определяющих параметров ограничены области с различным типом фронта. Показано, что среди разрывов смесь–вода(пар) структуру имеют только априорно эволюционные разрывы и фронты Жуге, а также, что эволюционные разрывы вода–пар могут не иметь структуры.

В данной работе рассмотрена классическая задача о распаде произвольного разрыва в геотермальном пласте. Предполагается, что слева и справа от начального разрыва присутствуют двухфазные области пароводяной смеси. Показано, что в зависимости от начальных параметров задачи ее решения качественно различны и могут содержать до четырех фронтов фазовых переходов, разделяющих как двухфазные зоны фильтрации пароводяной смеси, так и однофазные зоны воды или пара с переменными распределениями давления, температуры и содержания воды в каждой зоне. Построены решения разных типов: однофронтное решение и различные многофронтные, и в пространстве параметров задачи ограничены области, соответствующие каждому из решений. При непрерывном изменении начальных параметров однофронтное решение непрерывным образом переходит в многофронтное. Показано, что с требованием существования структуры разрывов [1] решение задачи существует и единственно.

В работах [2–5] решение соответствующих задач путем упрощения уравнений тепло-массопереноса сведено к решению системы трансцендентных уравнений и, следовательно-

но, распределения параметров в пласте найдены приближенно. В данной работе система законов сохранения как система обыкновенных дифференциальных уравнений решена в полном виде и, следовательно, найденные распределения в пласте будут точным решением задачи о распаде произвольного разрыва. Характер построенных решений существенно отличен от случая газовой динамики, так как процессы описываются параболической (вода, пар) или имеющей одну действительную характеристику (пароводяная смесь) системами.

Задача о распаде позволяет выявить свойства рассматриваемых течений воды и пара, обусловленных конкуренцией процессов переноса тепла и изменения давления, приводящего к изменению условий фазового перехода. Задача о распаде имеет прикладное значение, так как по ее решениям можно построить решения более простых задач, например об инжекции или отборе жидкости из полубесконечного пласта [2–5], которые описывают начальный этап запуска искусственных циркуляционных систем, использующихся для добычи геотермальных ресурсов. Кроме того, построенные решения можно использовать для тестирования конечноразностных схем, применяющихся для численного решения соответствующих уравнений переноса.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим однородный одномерный бесконечный пористый резервуар, в котором в начальный момент времени присутствует фазовый разрыв ( $x = 0$ ), разделяющий две области ( $x < 0$  и  $x > 0$ ), насыщенных двухфазной смесью воды и пара. Смесь полагается термодинамически равновесной: температуры воды, пара и пористого скелета равны между собой и совпадают с температурой фазового перехода между водой и паром при соответствующем давлении. Состояние пароводяной смеси будем характеризовать водонасыщенностью  $s$  – объемным содержанием воды в порах и давлением  $P$ , а температуру в силу термодинамического равновесия выразим через давление. Распределения давления и водонасыщенности в начальный момент времени в каждой области постоянны и равны  $P_-, s_-$  и  $P_+, s_+$  при  $x < 0$  и  $x > 0$  соответственно. Начальный разрыв в общем случае существовать не может и в процессе эволюции распадется на систему распространяющихся в пласте фронтов. Исследуется временная эволюция описанного распределения в зависимости от  $P_{\pm}, s_{\pm}$ .

Систему одномерных законов сохранения массы и энергии, описывающую, с учетом закона фильтрации Дарси, процессы совместной неизотермической фильтрации воды и пара, запишем в виде [1]

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\varphi \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\rho_m(s, P, T) = m s \rho_w + m(1-s)\rho_v + (1-m)\rho_s$$

$$\rho e_m(s, P, T) = m s \rho_w e_w + m(1-s)\rho_v e_v + (1-m)\rho_s e_s \quad (1.1)$$

$$\kappa(s, P, T) = \rho_w \frac{k f_w(s)}{\mu_w} + \rho_v \frac{k f_v(s)}{\mu_v}$$

$$\varphi(s, P, T) = \rho_w \frac{k f_w(s)}{\mu_w} h_w + \rho_v \frac{k f_v(s)}{\mu_v} h_v$$

$$\lambda_m(s, P, T) = m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_v + (1-m)\lambda_s$$

Здесь  $\rho_m$  – эффективное значение плотности среды,  $\rho e_m$  – эффективная плотность внутренней энергии,  $-\kappa \partial P / \partial x$  – поток массы ( $\kappa > 0$ ),  $-\varphi \partial P / \partial x$  – поток энергии, обуславливаемый потоком жидкости ( $\varphi > 0$ ),  $-\lambda_m \partial T / \partial x$  – поток энергии, связанный с процессами теплопроводности,  $T$  – температура среды,  $m$  – пористость пласта,  $k$  – проницаемость пористой среды,  $f(s)$  – относительная фазовая проницаемость,  $\mu$  – вязкость,  $e$  – плотность внутренней энергии,  $h$  – энтальпия. Индексы:  $m$  – эффективное значение в пласте,  $w$  – значение в воде,  $v$  – значение в паре,  $s$  – значение в скелете пористой среды.

В двухфазной области фильтрации пароводяной смеси систему (1.1) замыкаем условием равновесия  $F = T - T_f(P) = 0$  ( $T_f$  – температура термодинамического равновесия между водой и паром), тогда (1.1) имеет одно гиперболическое и пару малых возмущений параболического типа. В однофазной области фильтрации воды или пара (1.1) замыкаем условием  $s = 1$ ,  $F \leq 0$  или  $s = 0$ ,  $F \geq 0$  соответственно, тогда (1.1) имеем две пары малых возмущений параболического типа [1, 2].

Уравнения состояния и относительные фазовые проницаемости воды и пара полагаем следующими:

$$\begin{aligned} \rho_w(P, T) &= \rho_{w0}(1 + \alpha(P - P_0) - \beta(T - T_0)), & \rho_v(P, T) &= \frac{P}{RT} \\ e_w(T) &= C_w T, & e_v(T) &= C_v T + q, & e_s(T) &= C_s T \\ h_i &= e_i + \frac{P}{\rho_i}, & i &= v, w; & f_w(s) &= s^3, & f_v(s) &= 1 - s \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T_f(P)}, \quad A = 12.512, \quad B = 4611.73 \text{ К}$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  – коэффициенты сжимаемости и теплового расширения воды,  $R$  – газовая постоянная пара,  $C_i$  ( $i = w, v, s$ ) – теплоемкость,  $q$  – энергия межмолекулярного взаимодействия.

В расчетах значения физических параметров воды, пара и пористого скелета принимались следующими:

$$\alpha = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad \beta = 10^{-3} \text{ К}^{-1}, \quad \rho_{w0} = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_s = 2.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$R = 461 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}, \quad C_w = 4.2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}, \quad C_v = 1.56 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К}, \quad C_s = 1 \text{ кДж/кг} \cdot \text{К},$$

$$q = 1.8 \cdot 10^3 \text{ кДж/кг}, \quad P_0 = 10^5 \text{ Па}, \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad k = 10^{-15} \text{ м}^2, \quad m = 0.1,$$

$$\lambda_w = 0.58 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_v = 0.02 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_s = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \mu_w = 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\mu_v = 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Задача о распаде по постановке автомодельна и имеет решения, зависящие от  $x$  и  $t$  в виде комбинации

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\chi_k t}}, \quad \chi_k = \sqrt{\frac{k P_0 \lambda_s}{m \mu_v \rho_s C_s (1 - m)}} \quad (1.3)$$

Здесь  $\chi_k$  – масштабный коэффициент – среднее геометрическое коэффициентов теплопроводности и пьезопроводности в паре.

Переходя в (1.1) к автомодельной переменной (1.3), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\xi \chi_k d\rho_m}{2 \frac{d\xi}{d\xi}} + \frac{d}{d\xi} \left( \kappa \frac{dP}{d\xi} \right) &= 0 \\ \frac{\xi \chi_k d\rho e_m}{2 \frac{d\xi}{d\xi}} + \frac{d}{d\xi} \left( \chi \frac{dP}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} \left( \lambda_m \frac{dF}{d\xi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\chi = \varphi + \lambda_m T'_f(P)$$

В области смеси (1.4) есть система второго порядка относительно давления и первого относительно водонасыщенности, а в воде или паре – второго порядка относительно давления и температуры.

Ниже будут получены решения, соответствующие течениям с поверхностями фазового раздела. Полагается, что давление и температура на разрывах системы (1.1) непрерывны, а рвутся только их градиенты и водонасыщенность [6]. Температура на фронтах совпадает с температурой термодинамического равновесия ( $F = 0$ ). Законы сохранения на разрыве в автомодельных переменных представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\eta \chi_k}{2} [\rho_m] + \left[ \kappa \frac{dP}{d\xi} \right] &= 0 \\ \frac{\eta \chi_k}{2} [\rho e_m] + \left[ \chi \frac{dP}{d\xi} \right] + \left[ \lambda_m \frac{dF}{d\xi} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\eta$  – автомодельная координата фронта. Квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на разрыве.

Процессы фазового перехода протекают только в тех областях, где температура среды равна температуре кипения ( $F = 0$ ), т.е. в областях фильтрации пароводяной смеси и на разрывах.

Давление и температуру обезразмерим к их характерным значениям в пласте:  $P = P/P_0$ ,  $\Theta = T/T_0$ .

**2. О системе уравнений в пароводяной смеси.** Рассмотрим особенности поведения интегральных кривых системы (1.4), соответствующих зонам фильтрации пароводяной смеси ( $F = 0$ ). Запишем (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\xi \chi_k}{2} \left( (\rho_m)'_P \frac{dP}{d\xi} + (\rho_m)'_s \frac{ds}{d\xi} \right) + \kappa'_P \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^2 + \kappa'_s \frac{ds dP}{d\xi d\xi} + \kappa \frac{d^2 P}{d\xi^2} &= 0 \\ \frac{\xi \chi_k}{2} \left( (\rho e_m)'_P \frac{dP}{d\xi} + (\rho e_m)'_s \frac{ds}{d\xi} \right) + \chi'_P \left( \frac{dP}{d\xi} \right)^2 + \chi'_s \frac{ds dP}{d\xi d\xi} + \chi \frac{d^2 P}{d\xi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система (2.1) есть система линейных алгебраических уравнений относительно  $d^2 P/d\xi^2$  и  $ds/d\xi$  с определителем

$$\begin{aligned} \Psi \chi_k X, \quad X &= \frac{\xi}{2} + \frac{1}{\chi_k} \frac{\partial H}{\partial s} \Psi \frac{dP}{d\xi} \\ \Psi(P, s) &= (\rho_m)'_s \chi - (\rho e_m)'_s \kappa, \quad H(P, s) = \frac{1}{(\rho_m)'_s} \kappa \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{Y}{X}, \quad Y = Y\left(\xi, P, s, \frac{dP}{d\xi}\right)$$

Для рассматриваемой модели (1.1), (1.2) неравенство  $\psi > 0$  – условие диссипативности системы (1.1) при  $F = 0$  выполнено [1], поэтому определитель (2.2) равен нулю, если и только если  $X = 0$ . Функция  $H(P, s)$  задает ударную адиабату разрыва. Скорость гиперболического малого возмущения в смеси равна

$$C = -\frac{\partial H}{\partial s} \psi \frac{\partial P}{\partial x}$$

Рассмотрим разрыв, с одной стороны от которого находится область пароводяной смеси. Разность скорости разрыва  $W$  и скорости гиперболического малого возмущения  $C$  запишем так:

$$C - W = -\left(\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial s} \psi \frac{\partial P}{\partial x}\right) = -\sqrt{\frac{\chi_k}{t}} X(\xi) \quad (2.3)$$

Таким образом, значение  $X$  на разрыве пропорционально с отрицательным коэффициентом скорости гиперболического малого возмущения относительно разрыва.

Пусть ось  $x$  направлена направо. Так как гиперболические малые возмущения не уходят от фазового разрыва [1], то на фронте со стороны пароводяной смеси  $X \leq 0$  или  $X \geq 0$ , если область смеси расположена слева или справа от фронта соответственно, причем при  $X = 0$  разрыв будет фронтом Жуге ( $W = C$ ).

Из (2.2) следует, что в автомодельных решениях в точках пласта, где  $Y \neq 0$ , а  $X = 0$ , в частности на фронте Жуге,  $d^2P/d\xi^2 \rightarrow \infty$ ,  $ds/d\xi \rightarrow \infty$ ,  $a dP/d\xi$  и  $s$  конечны. При  $Y \neq 0$  равенство  $X = 0$  может достигаться только на фазовых разрывах, ограничивающих область смеси, но не внутри нее, так как, если  $X = 0$  при  $Y \neq 0$  внутри области, то в общем случае решение системы (1.4) нельзя будет продолжить за точку  $X = 0$ .

Равенство  $X = 0$  может выполняться внутри области смеси только совместно с  $Y = 0$ ; при этом  $d^2P/d\xi^2$  и  $ds/d\xi$  конечны, а  $dP/d\xi$  и  $s$  непрерывны.

Можно показать, что при  $X = 0$ ,  $Y = 0$

$$\frac{dX}{d\xi} = \frac{1}{2} + g(\Pi, s) \left(\frac{d\Pi}{d\xi}\right)^2 \quad (2.4)$$

При рассмотренных значениях физических параметров среды и пласта из непосредственных вычислений  $g(\Pi, s)$  следует, что при  $\Pi \in [1, 100]$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $g(\Pi, s) > -0.002$ , поэтому, согласно (2.4), при  $|d\Pi/d\xi| < 15$  производная  $dX/d\xi > 0$ . Считаем, что начальные параметры задачи о распаде таковы, что приведенная для  $d\Pi/d\xi$  оценка выполняется, поэтому ниже полагаем, что при  $X = 0$ ,  $Y = 0$  справедливо неравенство  $dX/d\xi > 0$ .

Так как  $X \rightarrow \pm\infty$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , в непрерывном решении задачи о распаде, из-за непрерывности  $X$ , равенства  $X = 0$  и  $Y = 0$  достигаются совместно и накладывают ограничения на возможные распределения в пласте. Из анализа размерностей пучков траекторий системы (1.4) следует, что в четырехмерном пространстве начальных параметров задачи  $(P_{\pm}, s_{\pm})$  непрерывному решению соответствует двухмерное многообразие, поэтому ниже, не ограничивая общности, считаем, что решение задачи обязательно содержит разрывы.

Пусть имеется область конечной протяженности пароводяной смеси, которая ограничена фазовыми фронтами. Из условия эволюционности разрывов [1] следует, что  $X \geq 0$  и  $X \leq 0$  на границах области слева и справа соответственно, поэтому для непрерывной  $X$  равенство  $X = 0$  обязательно достигается либо внутри области, либо на ее границах. Так как  $dX/d\xi > 0$  при  $X = 0$ ,  $Y = 0$ , то  $X = 0$  выполняется внутри, только если оба разрыва, ограничивающие зону смеси, будут фронтами Жуге. С этими условиями из анализа размерностей пучков траекторий системы (1.4) следует, что в пространстве параметров задачи  $(P_{\pm}, s_{\pm})$  решению с областью смеси, внутри которой выполняется  $X = 0$ , соответ-

ствует двухмерное многообразие – множество малой размерности. Ниже, не ограничивая общности, полагаем, что  $X \neq 0$  внутри области смеси, поэтому равенство  $X = 0$  обязательно достигается на ее границе, причем в общем случае один раз. Таким образом, один и только один из разрывов, ограничивающих внутреннюю область пароводяной смеси, будет фронтом Жуге.

Не существует решения задачи о распаде с более чем одним разрывом только в пароводяной смеси (решение не содержит внутренних областей воды или пара). Действительно, если присутствуют два и более фронта смесь–смесь, то также имеется и внутренняя область смеси (ограниченная фазовыми разрывами) с непрерывным распределением параметров в ней, причем в силу эволюционности конечных разрывов смесь–смесь,  $X > 0$  и  $X < 0$  на границах области слева и справа соответственно. Следовательно, внутри области смеси равенства  $X = 0$ ,  $Y = 0$  в общем случае будут выполняться совместно с  $dX/d\xi < 0$ , что невозможно.

**3. Однофронтное решение.** Для различных начальных значений давления и водонасыщенности  $P_{\pm}$ ,  $s_{\pm}$  задача о распаде произвольного разрыва смесь–смесь имеет качественно различные решения: однофронтное с разрывом смесь–смесь или различные многофронтные решения с внутренними однофазными областями фильтрации воды или пара.

Предположим, что параметры задачи  $P_{\pm}$ ,  $s_{\pm}$  таковы, что изначально расположенный в пористом резервуаре разрыв смесь–смесь не распался на несколько фронтов, а распространяется в пласте по закону  $x = \eta \sqrt{\chi_k t}$ .

Решение строим обратным методом. Зададим четыре параметра на разрыве, например водонасыщенность слева и справа  $s_{\pm}^*$ , давление и градиент давления слева от фронта –  $dP/d\xi|_{-}$  так, чтобы условие эволюционности разрыва смесь–смесь выполнялось [1]:

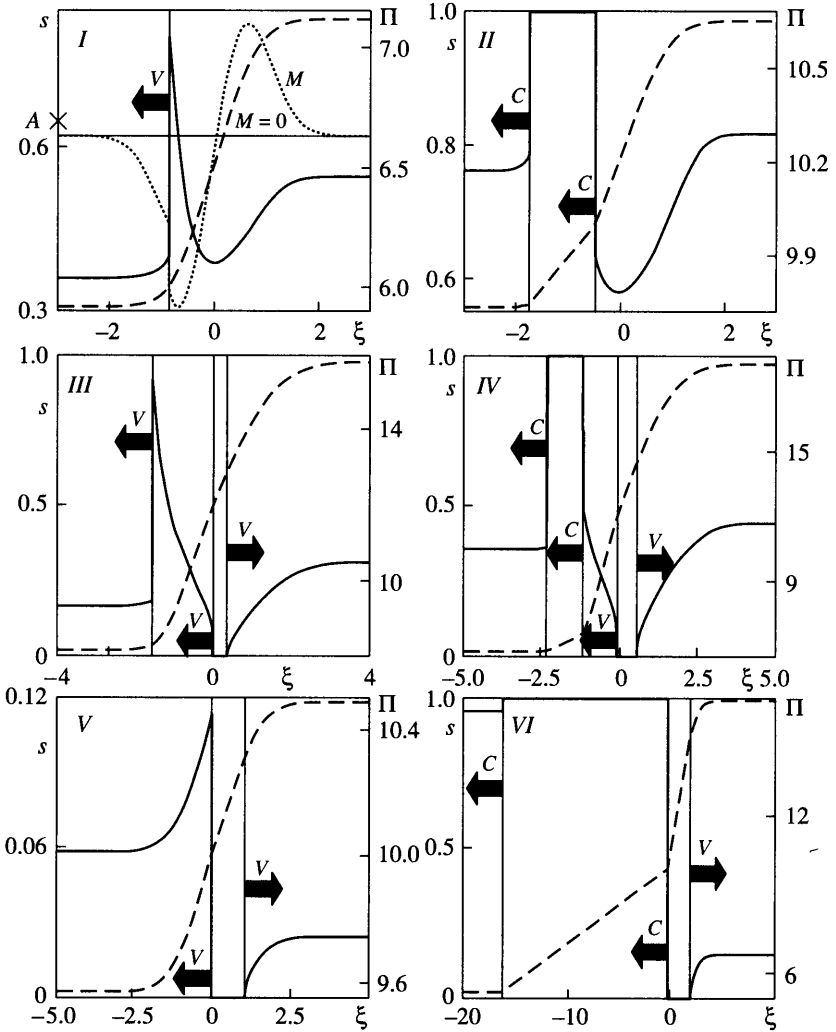
$$(s_+^* - s_-^*) \frac{dP}{d\xi} \Big|_{-} > 0 \quad (3.1)$$

Так как в областях слева и справа от разрыва  $F = 0$ , в (1.5) имеем два неизвестных параметра:  $\eta$  и  $dP/d\xi|_{\pm}$ . Решив (1.5), определим все параметры на разрыве, которых достаточно для того, чтобы корректно поставить и решить две задачи Коши системы (1.4) слева ( $\xi < \eta$ ) и справа ( $\xi > \eta$ ) от разрыва. Решив (1.4), определим распределения в пласте, а также начальные параметры задачи о распаде  $P_{\pm}$ ,  $s_{\pm}$ , для которых построено решение.

Для следующих начальных параметров задачи  $P_- = 5.927$ ,  $s_- = 0.363$ ,  $P_+ = 6.321$ ,  $s_+ = 0.749$  ее решение будет однофронтным (фиг. 1,  $L$ ). Согласно закону фильтрации Дарси, жидкость движется в область пониженного давления, поэтому течение смеси происходит справа налево. В ту же сторону движется фронт, который, в силу (3.1), есть фронт испарения [1]. В естественной неподвижной системе координат  $x$  давление в пласте постоянно при  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $\xi \rightarrow \pm\infty$ ) и при  $x = 0$  ( $\xi = 0$ ). При  $x > 0$  ( $\xi > 0$ ) давление, а следовательно, и температура в каждой точке пласта падают со временем ( $\xi \sim 1/\sqrt{t}$ ), а при  $x < 0$  ( $\xi < 0$ ) растут.

Пусть  $M$  – безразмерная масса образующегося (конденсирующегося) пара (фиг.1,  $L$ ). При  $\xi \rightarrow \pm\infty$   $M \rightarrow 0$ . При  $M > 0$  в пласте имеет место испарение, а при  $M < 0$  – конденсация. Чем больше абсолютное значение  $M$ , тем процессы фазового перехода протекают интенсивнее. Площадь единичного основания ординаты  $t$ .  $A$  (фиг. 1,  $L$ ) есть безразмерная масса образующегося на разрыве пара.

Важную роль в протекающих в пласте процессах играет скелет пористой породы, так как он занимает основной объем пространства ( $m \ll 1$ ), и, следовательно, большая часть тепловой энергии сосредоточена именно в скелете. Так как температура при  $x > 0$  падает, внутренняя энергия пористой породы уменьшается. Согласно закону сохранения



Фиг. 1. Типы решения задачи о распаде; сплошная линия – распределение водонасыщенности –  $s$ , штриховая – давления –  $P$ ,  $v$  и  $c$  – фронты испарения и конденсации;  $M$  – интенсивность процессов фазового перехода

энергии, образуется отток тепла от породы: часть тепла уносится кондуктивно, вследствие процессов теплопроводности, часть конвективно, в результате нагрева фильтрующегося флюида, но существенная часть уходит на испарение воды. Таким образом, при  $x > 0$  ( $\xi > 0$ ) в пласте имеет место испарение, которое наиболее интенсивно в областях с наибольшим оттоком тепла от скелета породы, т.е. в зонах наиболее быстрого падения температуры. Аналогично при  $x < 0$  ( $\xi < 0$ ) имеет место конденсация пара.

Распределение водонасыщенности имеет минимум в окрестности начального положения разрыва ( $x = 0$ ) и максимум на фронте. Причем величина максимума больше начальных значений водонасыщенности  $s_{\pm}$  в пласте. Такой немонотонный вид распределения имеет следующее объяснение. При  $x > 0$  имеет место испарение воды, движущейся в отрицательном направлении оси  $x(\xi)$ , поэтому с уменьшением  $x(\xi)$  водонасыщенность

убывает. Образующийся пар, как более подвижная, т.е. менее вязкая фаза, инжестируется в область  $x < 0$ . При  $x < 0$  пар конденсируется, поэтому в области  $x < 0$  количество воды увеличивается и с уменьшением  $x(\xi)$  водонасыщенность возрастает. Максимум  $s$  на фронте образуется из-за интенсивных процессов конденсации пара при  $x < 0$ .

**4. Многофронтные решения.** Однофронтное решение задачи о распаде существует только для относительно малых начальных перепадов давления  $P_+ - P_-$ . При фиксированных  $s_{\pm}$  с непрерывным увеличением  $P_+ - P_-$  интенсивность процессов фазового перехода в пласте увеличивается, и по достижении некоторого значения испарение при  $x > 0$  или конденсация при  $x < 0$  протекают столь интенсивно, что образующийся в пласте пар или вода соответственно в некоторой области пористой среды полностью вытесняет воду или пар: образуются однофазные зоны фильтрации пара и воды, отделенные от областей смеси фазовыми разрывами, поэтому при больших начальных перепадах давления решение задачи о распаде будет многофронтным.

Возможны шесть качественно различных решений задачи (фиг. 1): *I* – однофронтное решение, *II* – двухфронтное с водяной пробкой, *III* – трехфронтное с разрывом смесь–смесь и паровой пробкой, *IV* – четырехфронтное с областями воды и пара, *V* – двухфронтное с паровой пробкой, *VI* – трехфронтное с разрывом вода–пар.

Многофронтные решения строились обратным методом. Четыре параметра на разрывах задавались так, чтобы, решая (1.4) и (1.5), можно было последовательно найти распределения в каждой из зон между фронтами и, таким образом, полностью определить распределения в пласте и начальные параметры задачи о распаде  $P_{\pm}, s_{\pm}$ .

Пусть  $P_+, s_{\pm}$  соответствуют решению *I*. При увеличении  $P_+ - P_-$  внутренняя водяная пробка образуется в том случае, если водонасыщенность на разрыве достигнет значения  $s = 1$  (вода полностью вытеснит пар), тогда решение *I* перейдет в *II* с узкой зоной воды. При дальнейшем увеличении перепада давления зона воды будет непрерывно расширяться. Таким образом, при непрерывном увеличении  $P_+ - P_-$  решение *I* может непрерывным образом перейти в *II*.

При увеличении  $P_+ - P_-$  в *I* паровая пробка образуется в том случае, если на интегральной кривой системы (1.4), соответствующей области справа от разрыва смесь–смесь (фиг. 1), появится точка Жуге ( $X = 0$ ), тогда *I* перейдет в *III* с узкой зоной фильтрации пара, а на разрыве смесь–пар будет выполнено равенство  $X = 0$ . При дальнейшем увеличении перепада давления зона пара будет непрерывно расширяться. Таким образом, при непрерывном увеличении  $P_+ - P_-$  решение *I* может непрерывным образом перейти в *III*.

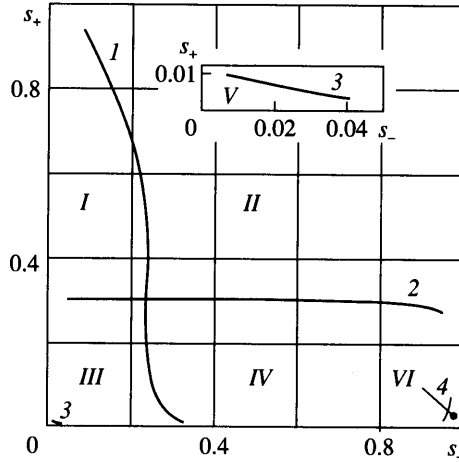
Зафиксируем  $P_{\pm}$  и будем менять  $s_{\pm}$ , тогда тип решения задачи о распаде также может измениться. В плоскости  $(s_-, s_+)$  каждой точке соответствует некоторое решение и на фиг. 2 указан его тип. Пусть параметрам  $s_{\pm}$  соответствует решение типа *I(III)*. Будем увеличивать  $s_-$ , т.е. начальное содержание воды в области  $x < 0$ , тогда для образования однофазной области воды при  $x < 0$  будет необходима все меньшая интенсивность процессов конденсации пара и, если точка, соответствующая паре  $s_{\pm}$ , пересечет линию *1* (фиг. 2), то водяная пробка появится при данных  $P_{\pm}$ , а тип решения сменится на *II(IV)*.

Пусть при  $s_{\pm}$  решение задачи о распаде имеет тип *I(II)*. Будем уменьшать  $s_+$  – начальное содержание воды в области  $x > 0$ , тогда для образования однофазной области пара при  $x > 0$  будет необходима все меньшая интенсивность процессов испарения воды; и, если точка, соответствующая паре  $s_{\pm}$ , пересечет в плоскости  $(s_-, s_+)$  линию 2, то в пласте появится паровая пробка, а тип решения сменится на *III(IV)*.

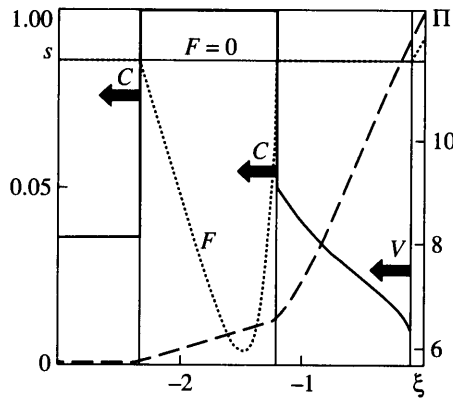
Пусть значениям  $s_{\pm}$  соответствует решение типа *III(IV)*. Будем уменьшать  $s_{\pm}$  (увеличивать  $s_-$  и уменьшать  $s_+$ ), тогда ширина внутренней зоны смеси будет уменьшаться, пока не станет равной нулю. В этот момент точка, соответствующая паре  $s_{\pm}$ , пересечет в плоскости  $(s_-, s_+)$  линию 3 (4) (фиг. 2) и тип решения станет *V(VI)*.

В решениях *III* и *IV* присутствует внутренняя область пароводяной смеси, поэтому один из ограничивающих ее разрывов будет фронтом Жуге. В *III* это, очевидно, разрыв





Фиг. 2. Диаграмма решений на плоскости  $(s_-, s_+)$  при  $\Pi_- = 8, \Pi_+ = 14$



Фиг. 3. Инжекция пара в полубесконечный, насыщенный пароводяной смесью пласт, пунктирная линия – распределение  $F$

смесь-пар. В IV фронтом Жуге также будет разрыв смесь-пар (случай фронта Жуге вода-смесь для рассмотренных параметров среды и пласта не реализовывался).

Непрерывному решению задачи о распаде в плоскости  $(s_-, s_+)$  соответствует конечное число точек.

Для начальных параметров  $\Pi_- = 5.757, s_- = 0.359, \Pi_+ = 19.133, s_+ = 0.445$  решение задачи о распаде имеет тип IV (фиг. 1). Рассмотрим распределения в области  $\xi < 0$ , которые соответствуют решению задачи об инжекции пара с параметрами  $\Pi(0) = 12.433, \Theta(0) = 1.539$  в полубесконечный, насыщенный пароводяной смесью с параметрами  $\Pi_-, s_-$ , пласт (фиг. 3). Температура закачиваемого пара больше начальной температуры смеси, однако перед областью пара ( $F > 0$ ) внутри резервуара распространяются области воды ( $F < 0$ ) и пароводяной смеси ( $F = 0$ ). Таким образом, если в пласт закачивается горячий пар, то перед ним возможно образование области воды, отделенной от зоны пара областью смеси.

Без требования существования структуры разрывов [1] решение задачи о распаде не единственно. Так, для начальных значений  $\Pi_- = 8.380, s_- = 0.891, \Pi_+ = 13.063, s_+ = 0.065$

существуют разные решения типов *IV* и *VI*, в которых каждый фронт априорно эволюционен: число уходящих от разрыва малых возмущений на единицу меньше числа заданных на нем условий. Однако в *VI* разрыв между областями воды и пара не имеет структуры, поэтому для рассматриваемых  $\Pi_{\pm}$ ,  $s_{\pm}$  решение *VI* можно отбросить как решение с разрывами без структуры.

Области в плоскости  $(s_{-}, s_{+})$ , соответствующие разным типам решения, с требованием существования структуры разрывов не пересекаются и полностью, без дыр и областей двузначности, покрывают пространство параметров задачи  $(s_{-}, s_{+}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Следовательно, при рассмотренных значениях  $\Pi_{\pm}$  (фиг. 2), для каждой пары  $(s_{-}, s_{+}) \in [0, 1] \times [0, 1]$  существует единственное решение задачи о распаде произвольного разрыва смесь–смесь. Без учета структуры разрывов области, соответствующие разным типам решения задачи, в частности *IV* и *VI*, пересекались бы: имелись бы области двузначности.

**Заключение.** В случае общего положения решение задачи о распаде произвольного разрыва смесь–смесь содержит разрывы – до четырех фронтов фазового раздела, разделяющих как двухфазные области пароводяной смеси, так и однофазные области воды или пара (водяные или паровые пробки). Для разных начальных параметров задачи ее решения качественно различны: существует шесть разных типов решения. С требованием существования структуры разрывов решение задачи о распаде при рассмотренных параметрах существует и единственно.

В частном случае задачи о распаде: в задаче о закачке горячего пара в пароводяную смесь с меньшей температурой перед паром возможно образование распространяющейся внутрь пласта зоны воды, отделенной от зоны пара областью пароводяной смеси.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев А.А., Бармин А.А. О фазовых разрывах в фильтрационных течениях воды // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 101–111.
2. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
3. Кондрашев А.В., Цыпкин Г.Г. О режимах инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 86–91.
4. Бармин А.А., Кондрашев А.В. Двухфронтная математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 105–112.
5. Насырова Л.А., Рахматуллин И.Р., Шагапов В.Ш. Гидродинамические и тепловые поля в пористой среде при инжекции перегретого пара // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 113–126.
6. Куликовский А.Г. О фронтах испарения и конденсации в пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 85–92.
7. Куликовский А.Г. О фазовых переходах при фильтрации в теплопроводном скелете // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 85–90.

Москва

Поступила в редакцию  
9.XI.2006