

УДК 532.529.2+532.59:551.466.81

© 2007 г. Р.Н. БАРДАКОВ, А.Ю. ВАСИЛЬЕВ, Ю.Д. ЧАШЕЧКИН

**РАСЧЕТ И ИЗМЕРЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ ПУЧКОВ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВЕРТИКАЛЬНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОРШНЕМ**

Численными методами проанализирована структура волнового поля, задаваемого точным решением линеаризованной задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн, в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости. Волны излучаются поршнем – диском, лежащим на неподвижной горизонтальной плоскости и осциллирующим в вертикальном направлении. Проведено сравнение полей течений и волновых смещений с данными теневой визуализации и измерениями амплитуд волн контактным датчиком. Рассчитанные и наблюдаемые картины волн согласуются удовлетворительно, распределения смещений совпадают с точностью до величины подгоночного коэффициента  $0.7 < K < 1.1$ , характеризующего роль нелинейных эффектов и других факторов, которые не учитывались в данной модели.

*Ключевые слова:* вязкая стратифицированная жидкость, диффузия, периодические внутренние волны, пограничные слои, точные решения.

Прямое сравнение результатов аналитических [1], численных [2] и экспериментальных исследований внутренних волн в лабораторных [3] и природных условиях [4] достаточно затруднительно вследствие различия подходов и методов представления результатов. Расчет параметров внутренних волн обычно производится асимптотическими методами с учетом несоответствия симметрий уравнений и граничных условий. Степень адекватности распространенного метода источников и стоков, позволяющего рассчитывать волновые поля с точностью до эмпирических постоянных в приближении вязкой [5, 6] и идеальной жидкости [1], остается неизвестной.

Методика построения точного решения линеаризованных задач излучения двух- и трехмерных внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости компактными источниками, совершающими периодические движения, развита в [6]. Симметрии граничных условий и уравнений согласуются наиболее полно, если источником волн служит поршень – диск, лежащий на горизонтальной твердой поверхности [7]. Полное решение задачи позволяет изучить свойства как регулярных (по вязкости) элементов течений, описывающих внутренние волны, так и сингулярных, в число которых входят вязкие пограничные слои. Стратификация реальной жидкости создается соответствующими распределениями солёности или температуры, которые формируют молекулярные потоки соответствующих переменных. Учет эффектов диффузии приводит к повышению порядка определяющей системы уравнений и усложнению задачи.

Цель данной работы – построение полного решения линеаризованной задачи излучения волн горизонтальным поршнем (излучатели такого типа достаточно эффективные и широко используются в лабораторных экспериментах [5]), анализ его свойств и сравнение с результатами измерений пучков внутренних волн в лабораторном бассейне. Задача излучения периодических волн в такой постановке рассмотрена только в одном частном случае, когда источник волн – осциллирующая часть цилиндрической поверхности [8].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается устойчиво стратифицированная по солёности  $S_0$  среда, плотность которой  $\rho_0$  – функция высоты  $z$ , ориентированной против ускорения силы тяжести  $g$

$$\rho_0(z) = \rho_{00} \left( 1 - \frac{z}{\Lambda} + S_0 \right)$$

Стратификация характеризуется масштабом  $\Lambda$ , частотой  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  и периодом  $T_b = 2\pi/N$  плавучести, который используется для нормировки времени  $t$ .

Линеаризованная система уравнений движения стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla P + \rho_0 \nu \Delta \mathbf{v} - g S \mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{v_z}{\Lambda} = \kappa_S \Delta S, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ ,  $P$  и  $S$  – возмущения скорости, давления и солёности жидкости,  $\kappa_S$  – коэффициент диффузии,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Источником возмущений служит лежащий на твердой горизонтальной поверхности диск радиуса  $R$ , совершающий вертикальные колебания с постоянной частотой  $\omega$  и амплитудой скорости  $u_0$ . Рассматриваются установившиеся движения, зависимость всех величин от времени носит гармонический характер  $\exp(-i\omega t)$ . Этот множитель, который для краткости опускается во всех аналитических выражениях, учитывается при проведении анализа решения. Рассмотрение ведется в верхнем полупространстве ( $z > 0$ ).

Граничные условия прилипания для скорости и непротекания для вещества выполняются на всей подстилающей поверхности (плоскости  $z = 0$ , включая ее подвижные и неподвижные части)

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \\ v_z &= \begin{cases} u_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

На бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) все возмущения затухают.

Тождественность симметрий задачи и граничных условий позволяет предположить отсутствие азимутальной компоненты скорости  $v_\varphi = 0$  и понизить порядок уравнений. В общем случае, когда радиусы диска и амплитуды его движений достаточно велики, данное условие может нарушаться.

**2. Масштабный анализ задачи.** Рассматриваемая задача характеризуется большим числом линейных масштабов, к которым для удобства анализа приводятся все размерные параметры. Внешние геометрические параметры – масштаб плавучести  $\Lambda$  и размер источника (радиус диска  $R$ ). В слабой стратификации вариации плотности на масштабах  $z \sim R$  невелики  $\rho_0/\Delta\rho \gg 1$ , следовательно,  $\Lambda/R \gg 1$ .

В силу специфики дисперсионного уравнения внутренних волн в глубокой жидкости параметрами задачи служит длина волны  $\lambda$  или характерная ширина пучка внутренних волн, значения которых определяются размерами излучателя, свойствами среды и положением точки наблюдения [1]. С учетом эффектов диффузии модальная структура пучка определяется отношением размера источника к вязкому волновому масштабу  $L_{\nu D} = (\nu + \kappa_S)^{1/3} g^{1/3} / N$  [10].

Поперечные размеры сингулярных элементов течения характеризуются универсальным микромасштабом  $\delta_N = \sqrt{v/N}$ , входящим в определения толщин скоростных пограничных слоев [10], и масштабом  $\delta_p = \sqrt{\kappa_S/N}$  для плотностного пограничного слоя.

Отношения масштабов задачи задают традиционные безразмерные комбинации – числа Рейнольдса, Фруда, Пекле и другие, которые не будут использоваться в дальнейшем анализе.

Условия пренебрежения нелинейными членами системы уравнений (1.1)  $(v, \nabla)v$  и  $(v, \nabla)S$  по сравнению с вязкими  $(v\Delta v)$  традиционные –  $u_0 l/v \sim u_0/\sqrt{vN} \ll 1$ ,  $u_0 l/\kappa_S \sim u_0/\sqrt{\kappa_S N} \ll 1$ , при этом число Рейнольдса  $Re = R/\delta_u = u_0 R/v$  может быть достаточно большим. Вдали от источника  $r/R \gg 1$  и вблизи него  $r/\delta_N \ll 1$ ,  $r/\delta_p \ll 1$  используются различные методы анализа решения. Условия линеаризации могут нарушаться вблизи кромок источника ( $l \sim \delta_N$ ) и вдали от него, в области конвергенции внутренних границ волновых пучков, положение которой определяется размером излучателя и относительной частотой колебаний  $\omega/N$ .

**3. Построение полного аналитического решения.** С учетом условия несжимаемости, аксиальной симметрии и приближения Буссинеска система (1.1) преобразуется в уравнения для солёности  $S$  и скалярной функции  $\Psi$ , которая определяет компоненты скорости  $v$  в цилиндрической системе координат, связанной с центром диска, соотношениями  $v_r = \partial\Psi/\partial z$ ,  $v_z = -\partial\Psi/\partial r - \Psi/r$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_S L_r \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - v L_r^2 \right) L_r + N^2 L_\perp \right] \Psi &= 0 \\ \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \kappa_S L_r \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - v L_r^2 \right) L_r + N^2 L_\perp \right] S &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

При этом граничные условия (1.2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} \right) &= -u_0 \vartheta(R-r) \\ L_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}, \quad L_\perp = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $\vartheta(R-r)$  – функция Хевисайда.

Условия затухания решений (3.1) на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) определяют выбор корней дисперсионного уравнения.

Аксиальная симметрия источника и волнового поля позволяет искать решения уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2) в виде разложения Фурье–Бесселя

$$\Psi = \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty A_j e^{ik_j z} J_1(kr) dk \tag{3.3}$$

Вертикальная и радиальная компоненты скорости с использованием правил дифференцирования цилиндрических функций [11] есть

$$v_z = - \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty k A_j e^{ik_j z} J_0(kr) dk, \quad v_r = i \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty k_j A_j e^{ik_j z} J_1(kr) dk \tag{3.4}$$

Второе уравнение системы (3.1) и полученное представление вертикальной компоненты скорости (3.4) позволяют искать соленость в виде разложения

$$S = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{A_j e^{ik_j z}}{i\omega - \kappa_S(k_j^2 + k^2)} J_0(kr) k dk \quad (3.5)$$

где  $J_n(kr)$  – функция Бесселя  $I$  рода.

Волновые числа  $k_j$  в выражениях (3.3)–(3.5) определяются решениями дисперсионного уравнения, отражающего условие совместности системы при подстановке (3.3) в (3.1)

$$\kappa_S v (k^2 + k_j^2)^3 - i\omega(v + \kappa_S)(k^2 + k_j^2)^2 - \omega^2(k^2 + k_j^2) + N^2 k^2 = 0 \quad (3.6)$$

Алгебраическое сингулярно возмущенное уравнение шестого порядка (3.6) имеет шесть комплексных корней. Два из них регулярны по диссипативным факторам (вязкости и диффузии)  $\text{Im} k_j \sim (v + \kappa_S)^\alpha$ , а четыре других – сингулярны  $\text{Im} k_j \sim v^{-\alpha}$ ,  $\kappa_S^{-\alpha}$ . В дальнейшем анализе учитываются все корни  $k_j$ , как регулярные, так и сингулярные [6–8].

Решение (3.6) находится стандартными методами теории возмущений [12] в предположении малости коэффициентов вязкости и диффузии, которое для данной задачи принимает вид  $\delta_v, \delta_S \ll \lambda \sim R$ . Такие условия выполняются для большинства течений в лабораторных и природных условиях.

Регулярные корни описывают структуру пучка конических внутренних волн и имеют аналог в идеальной жидкости [1]. В данной задаче регулярный корень  $k_1$  совпадает с полученным в [6]

$$k_1 \approx -k \text{ctg} \theta + \frac{i(v + \kappa_S)k^3}{2\omega \sin^3 \theta \cos \theta} \quad (3.7)$$

с точностью до замены коэффициента кинематической вязкости на сумму диссипативных коэффициентов,  $\theta = \arcsin(\omega/N)$  – угол наклона волнового конуса к горизонту (так же как и направление групповой скорости волн).

Сингулярные решения  $k_2$  и  $k_3$  имеют различную природу. Одно из них зависит только от коэффициента кинематической вязкости и определяет скоростной пограничный слой толщиной  $\delta_v = \sqrt{2\nu/\omega}$ .

$$k_2 \approx \frac{1+i}{\delta_v} \quad (3.8)$$

Следствие принятого предположения  $v_\phi = 0$  – понижение порядка дисперсионного уравнения (3.6) и исключение одного решения, описывающего изопикнический (стоксов) пограничный слой [6–8]. В данной геометрии внутренний по своей природе пограничный слой преобразуется к виду стоксова периодического течения [13], поскольку только на горизонтально расположенном источнике движения в пограничном слое изопикнические.

В общем случае, когда излучающая плоскость наклонена под произвольным углом к горизонту, определяющее дисперсионное уравнение имеет более высокий (восьмой) порядок. Его корни описывают большее число сингулярных элементов течения, которые включают внутренние, стоксовы скоростные и диффузионный пограничные слои. Их параметры зависят от характеристик среды ( $v, \kappa_S, N$ ), частоты волны  $\omega$  и геометрии задачи [8].

Следующий корень уравнения (3.6)

$$k_3 \approx \frac{1+i}{\delta_S} \tag{3.9}$$

задает диффузионный пограничный слой, толщина которого  $\delta_S = \sqrt{2\kappa_S/\omega}$  определяется коэффициентом диффузии и частотой волны. Таким образом, вязкий и диффузионный пограничные слои в данной задаче полностью расщепляются.

Мнимые части корней (3.7) – (3.9) уравнения (3.6) выбраны из условия затухания возмущений в верхнем полупространстве  $\text{Im}k_j > 0$ .

Подстановка разложений (3.3) в граничные условия (3.2) определяет спектральные коэффициенты  $A_j$

$$A_1 = \frac{UD_{23}}{D_1}, \quad A_2 = \frac{UD_{13}}{D_1}, \quad A_3 = \frac{UD_{12}}{D_1} \tag{3.10}$$

$$U = \frac{u_0 R}{k} J_1(kR), \quad D_1 = \frac{k_2 k_3}{\gamma_2 \gamma_3} (\gamma_3 - \gamma_2) + \frac{k_1 k_3}{\gamma_1 \gamma_3} (\gamma_1 - \gamma_3) + \frac{k_1 k_2}{\gamma_1 \gamma_2} (\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$D_{12} = \frac{k_1 k_2}{\gamma_1 \gamma_2} (\gamma_2 - \gamma_1), \quad D_{13} = \frac{k_1 k_3}{\gamma_1 \gamma_3} (\gamma_1 - \gamma_3), \quad D_{23} = \frac{k_2 k_3}{\gamma_2 \gamma_3} (\gamma_3 - \gamma_2) \tag{3.11}$$

$$\gamma_j = i\omega - \kappa_S(k_j^2 + k^2)$$

Дальнейший анализ решения (3.4), (3.5) с учетом выражений (3.10), (3.11) проводится асимптотическими и численными методами.

Построенное решение имеет наиболее простой вид в сопутствующей системе координат  $(p, q)$ , ось  $q$  которой ориентирована в направлении распространения пучка волн, а ось  $p$  – вдоль фазовой скорости  $p = r \sin\theta - z \cos\theta, q = r \cos\theta + z \sin\theta$ .

Регулярная компонента решения на больших расстояниях от источника волн ( $r \gg R$ ) имеет канонический вид [1]

$$v_z \sim \int_0^\infty dk B(k, u_0) \exp\left(ikp - \frac{(v + \kappa_S)k^3}{2N \cos\theta \sin^4\theta} q\right) \tag{3.12}$$

(с точностью до замены кинематической вязкости на сумму диссипативных коэффициентов).

При больших числах Шмидта ( $Sc = v/\kappa_S = 1$ ), характерных для большинства водных растворов солей и морской воды, выражения (3.4) значительно упрощаются

$$v_z = u_0 R \int_0^{+\infty} \frac{k_2 e^{ik_1 z} - k_1 e^{ik_2 z}}{k_2 - k_1} J_1(kR) J_0(kr) dk$$

$$v_r = -iu_0 R \int_0^{+\infty} \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} \frac{e^{ik_1 z} - e^{ik_2 z}}{k} J_1(kR) J_1(kr) dk \tag{3.13}$$

и в пределе  $D \rightarrow 0$  равномерно переходят в решение [14].

Амплитуды возмущений плотности и давления в волновом пучке равны

$$\rho(r, z) = -\frac{i\rho_0 v_z}{\omega\Lambda} = -\frac{i\rho_0 u_0 R}{\omega\Lambda} \int_0^\infty \frac{dk}{k_2 - k_1} J_0(kr) J_1(kR) (k_2 e^{ik_1 z} - k_1 e^{ik_2 z}) \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 P &= -\rho_0(i\omega + \nu\Delta) \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{A_j}{k} e^{ik_j z} J_1(kr) dk \approx \\
 &\approx i\rho_0 u_0 R \int_0^{\infty} \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} \frac{J_1(kR) J_1(kr)}{k} [(i\omega - \nu k^2)(e^{ik_1 z} - e^{ik_2 z}) - \\
 &- \nu(k_1^2 e^{ik_1 z} - k_2^2 e^{ik_2 z})] dk
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

а на поверхности диска ( $z = 0$ )

$$\rho = -\frac{\rho_0 u_0 R}{\omega \Lambda}$$

Возмущение давления (3.15) при условии ( $\lambda \gg \delta_v$ ) имеет особенность на кромках диска ( $r = R$ ), обусловленную приближенным характером вычислений (в расчетах учитывается только главный член разложения (3.15))

$$P = \rho_0 u_0 N \cos \theta \left[ K\left(\frac{R}{r}\right) - E\left(\frac{R}{r}\right) \right]$$

где  $K(R/r)$ ,  $E(R/r)$  – полные эллиптические интегралы I и II рода [11]. В распределениях скорости на кромках диска особенностей нет.

Компоненты тензора вязких напряжений в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -P + 2\rho_0 \nu \frac{\partial v_r}{\partial r} = \\
 &= -P - 2i\rho_0 u_0 \nu R \int_0^{+\infty} \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} (e^{ik_1 z} - e^{ik_2 z}) J_1(kR) \left( J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right) dk \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= -P \\
 \sigma_{zz} &= -P + 2\rho_0 \nu \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
 &= -P - 2i\rho_0 u_0 \nu R \int_0^{+\infty} \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} J_1(kR) J_0(kr) (e^{ik_1 z} - e^{ik_2 z}) dk \\
 \sigma_{rz} &= \rho_0 \nu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \rho_0 \nu u_0 R \int_0^{+\infty} \frac{k J_1(kR) J_0(kr)}{k_2 - k_1} (k_2 e^{ik_1 z} - k_1 e^{ik_2 z}) dk - \\
 &- \rho_0 \nu u_0 R \int_0^{+\infty} \frac{k_1 k_2 J_1(kR) J_1(kr) k_2 e^{ik_1 z} - k_1 e^{ik_2 z}}{k (k_2 - k_1)} dk
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Пробные вычисления показали, что картина течения, задаваемого выражениями (3.4)–(3.5), с коэффициентами (3.15) довольно сложная, и для ее анализа недостаточное проведение одних асимптотических оценок [4]. Дальнейший анализ решений проводится численными методами в пренебрежении эффектами диффузии.

**4. Численный анализ и визуализация решения.** При расчете полей течений выражения (3.4) интегрировались численно методом Симпсона [15] с использованием результатов асимптотического анализа. Неравномерный шаг интегрирования выбирался с учетом структуры решения вблизи источника и на больших удалениях от него. Оценка верхнего предела интеграла проводится асимптотически методом перевала [16].

Поскольку амплитуды осциллирующих функций и реальная часть экспоненциальной функции в (3.4) монотонно затухают с ростом параметра интегрирования, для контроля точности использовалось сравнение результатов интегрирования при уменьшении шага в 2 раза. Разбиение прекращалось, когда значение относительной погрешности при очередном умении шага не превышало 0.1%. Количество расчетных точек выбиралось из условия визуализации элементов течения с разрешением от 0.01 до 0.002 см. Особое внимание уделялось контролю точности вычислений в нескольких областях пространства: у кромок диска, на краях пучков, где происходит сближение фазовых поверхностей [1, 6], и в зонах конвергенции оболочек волновых пакетов [14], которым в теории идеальной жидкости соответствуют области сближения и пересечения характеристик.

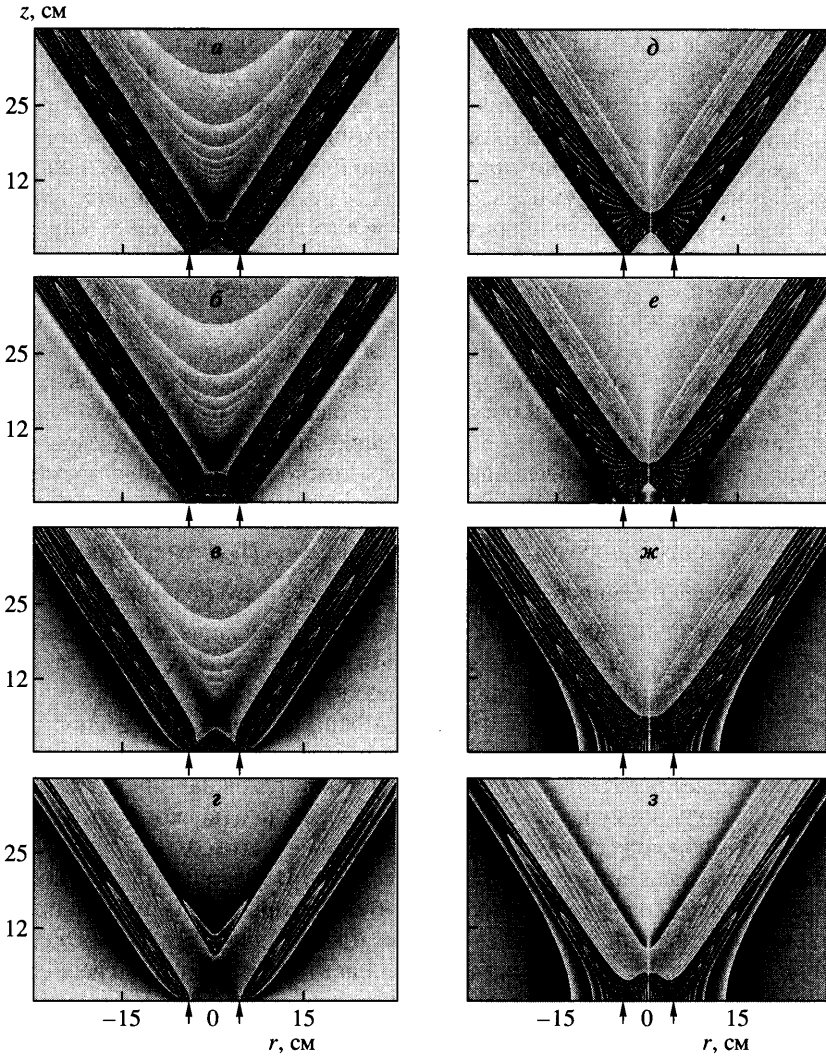
При выводе изображений обеспечивалась возможность выделения элементов течений с масштабом скоростного пограничного слоя порядка  $\delta_N = \sqrt{v/N} \sim 0.1$  см при условиях, соответствующих лабораторным экспериментам [17]. Неоднородности с масштабом плотностного пограничного слоя ( $\delta_p = \sqrt{\kappa_s/N} \cdot 4 \cdot 10^{-3}$  см) не разрешались, чтобы не перегружать изображение излишними деталями. Визуализация полученных массивов численных данных, построение изображений полей и изолиний осуществлялись с помощью оригинальной программы, написанной в оболочке [18].

Выборки из видеофильмов первой четверти периода колебаний иллюстрируют характер изменчивости пространственной структуры пучка волн (фиг. 1). Дальше процесс циклически повторяется с точностью до замены максимумов на минимумы. В левой колонке приведено поле возмущений вертикальной компоненты скорости, в правой – поле радиальной компоненты скорости. Изолинии даны с шагом 0.02  $u_0$ .

Высокая чувствительность метода позволяет заметить, что периодические возмущения выражены не только внутри волнового конуса, который выделяется и при асимптотических вычислениях [1, 5], но и заполняют все пространство. Групповые скорости, показывающие направления переноса энергии, ориентированы вдоль гребней и впадин волн, которым на фиг. 1 соответствуют границы между темными и светлыми областями. Фазовые поверхности перемещаются по нормали к направлениям радиус-векторов или волновых лучей; вертикальная компонента фазовой скорости в каждом из пучков направлена к плоскости излучателя. Собственно движения изолиний следуют направлениям фазовых скоростей – луч формируется вблизи оси  $z$  и затем разворачивается к плоскости источника (фиг. 1,  $a-z$ ).

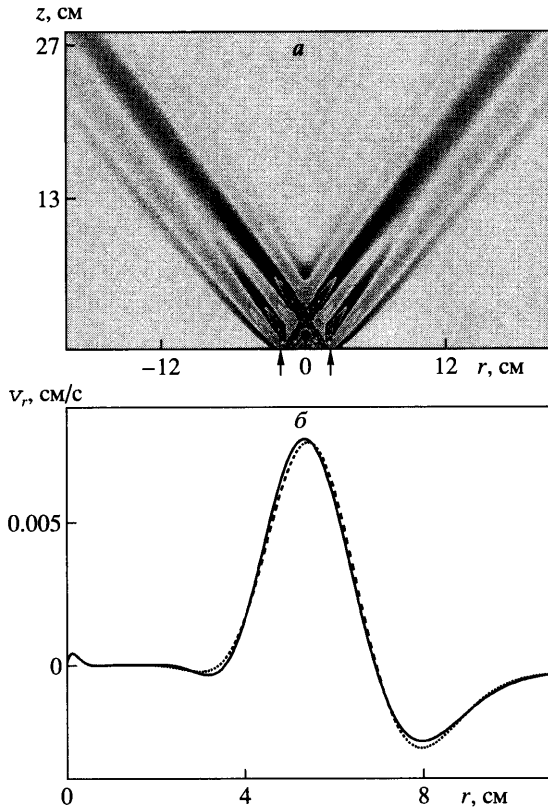
По мере распространения фазовые поверхности отходят от оси и разворачиваются в конические волновые пучки, при этом амплитуда волны нарастает, ее максимальное значение наблюдается в центре волнового конуса. По мере продвижения фазовых поверхностей к наружному краю пучка амплитуды волн убывают. Визуально волны формируются на внутренней поверхности конуса и практически полностью исчезают на его внешней поверхности. Однако периодическое возмущение не обращается тождественно в нуль вне конического пучка, о чем свидетельствуют изменения на всех границах картины течения.

В некоторых фазах процесса к кромкам волнового конуса примыкают тонкие полоски, в которых частицы жидкости смещаются в обратном направлении. Эти полоски располагаются на характеристиках, контактирующих с внешней кромкой излучателя, отмеченной стрелками на фиг. 1.



Фиг. 1. Эволюция пучков внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим диском (кромки отмечены стрелками) в непрерывно стратифицированной жидкости  $T_b = 5.2$  с,  $\omega = 1$  с $^{-1}$ ,  $R = 4$  см,  $u_0 = 0.25$  см/с,  $\nu = 0.01$  см $^2$ /с: а-г – поле вертикальной компоненты скорости, д-з – радиальной компоненты скорости, изолинии с шагом  $0.02u_0$ ;  $\tau = t/T_b = 0; 0.04; 0.125; 0.25$

В соответствии с дисперсионным уравнением характеристики из каждой точки кромки исходят в двух направлениях под углом  $\theta = \pm \arcsin(\omega/N)$ . В некоторых фазах процесса тонкоструктурные элементы выражены в распределениях и вертикальной, и горизонтальной компонент скорости на внешней стороне волнового конуса (фиг. 1, а, б, д, е), в других – на внутренней стороне (фиг. 1, в, г, ж, з). Продолжительность существования каждого из таких элементов составляет всего несколько процентов от периода осцилляций и определяется отношением собственного поперечного масштаба ( $\delta_N$ ) к magnitude скорости ( $u_0$ ). Появление и исчезновение таких тонкоструктурных элементов приводит



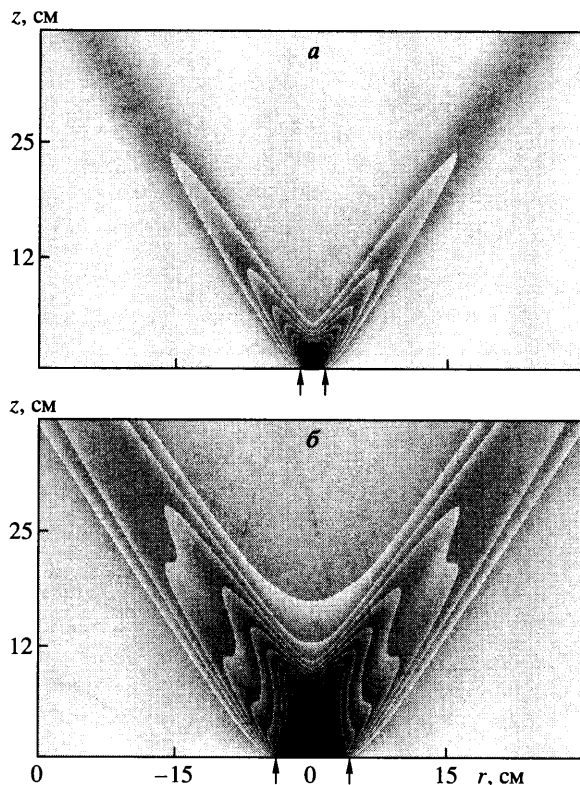
Фиг. 2. Расчет значений численной и асимптотической оценок решения: *a* – поле разностей, *б* – горизонтальные профили (1 – точное решение, 2 – асимптотика),  $z_0 = 4.0$  см,  $T_b = 5.2$  с,  $\omega = 1$  с $^{-1}$ ,  $R = 4$  см,  $u_0 = 0.25$  см/с,  $\nu = 0.01$  см $^2$ /с

к изменению интегральной яркости изображения, качественно характеризующей энергию осцилляторного движения.

Непосредственно над диском располагается область конвергенции внутренних оболочек волновых пучков – область пересечения характеристик от кромок диска – особенно ярко выраженная на фиг. 1, *г*. На оси симметрии, где частицы движутся строго вертикально, их смещения максимальны. Таким образом, можно ожидать, что нелинейные эффекты будут выражены не только вблизи кромок диска, но и в области конвергенции высокоградиентных оболочек, в окрестности оси симметрии излучателя, в области максимальных возмущений, включающих и регулярную и сингулярную компоненты.

Пограничный слой более выражен в распределениях горизонтальной компоненты скорости (фиг. 1, *д–е*), его внешние кромки, следуя за фазовыми поверхностями волн, переходят с диска на подстилающую поверхность. Процесс формирования и исчезновения пограничного слоя на излучателе периодический, определяемый характером его движения (периодом колебаний).

Традиционно в теории волн решения отыскиваются асимптотическими методами [1, 6, 19], в которых волновые пучки и пограничные слои рассчитываются независимо [20]. В данной модели они сосуществуют и рассчитываются совместно. Для иллюстрации



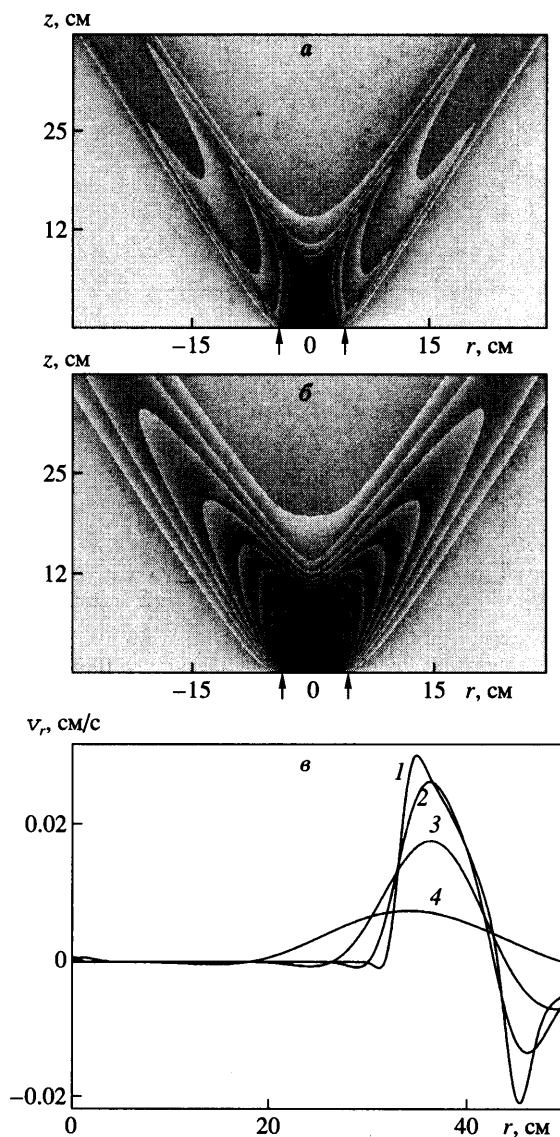
Фиг. 3. Модальная структура пучков, излучаемых дисками различного радиуса  $R$  в жидкости с параметрами  $N = 1.2 \text{ c}^{-1}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{c}$ ,  $\omega = 0.998 \text{ c}^{-1}$ ,  $u_0 = 0.25 \text{ cm/c}$ ;  $a$  – одно-модальный пучок,  $R = 1.7 \text{ cm}$ ,  $b$  – бимодальный пучок,  $R = 4.0 \text{ cm}$

точности такого подхода на фиг. 2,  $a$  приведено поле разности между более точным численным и приближенным асимптотическим решениями для вертикальной компоненты скорости. Решения не совпадают везде, наибольшие различия наблюдаются на характеристиках пучка около излучателя. Другая выделенная область больших различий – зона конвергенции внутренних оболочек волнового конуса непосредственно над излучателем.

Из сравнения вертикальных профилей волновых возмущений в пучке (фиг. 2,  $b$ ) видно, что различия в абсолютных значениях скорости невелики и достигают максимума на внешних и внутренних оболочках пучка. Оба метода выделяют сингулярные компоненты на краях пучка, однако асимптотические методы дают более сглаженную картину течения.

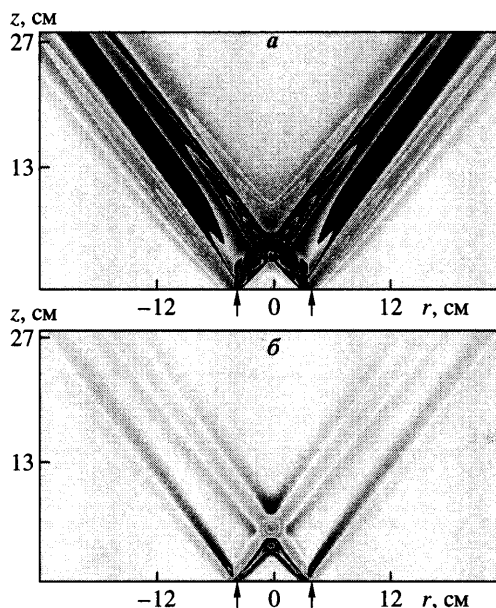
Модальная структура пучка определяется отношением его радиуса к вязкому волновому масштабу  $L_\nu$ . Малый диск ( $R < L_\nu$ ) порождает одномодальный пучок, интенсивность которого меняется во времени (фиг. 3,  $a$ ). С уменьшением радиуса диска ширина пучка волн убывает, ее минимальное значение определяется универсальным вязким микро-масштабом  $R \sim \delta_\nu$ . Излучаемый пучок становится бимодальным (фиг. 3,  $b$ ), когда радиус диска превышает вязкий волновой масштаб ( $R > L_\nu$ ). С удалением от источника бимодальный пучок перестраивается в одномодальный.

Практический интерес представляет исследование влияния вязкости на структуру пучка (фиг. 4). В маловязкой жидкости выражены сингулярные оболочки пучка



Фиг. 4. Пучки гармонических волн в средах с различным значением вязкости – поле модуля вертикальной компоненты скорости  $N = 1.2 \text{ с}^{-1}$ ,  $R = 4 \text{ см}$ ,  $u_0 = 0.25 \text{ см/с}$ ,  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ : а, б –  $\nu = 0.001$ ;  $0.04 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $Re = 1000, 25$ ; в – вертикальное сечение пучка на расстоянии 26 см от центра диска – сечение поля горизонтальной компоненты скорости; 1–4 –  $\nu = 1$ ;  $0.1$ ;  $0.01$ ;  $0.001 \text{ см}^2/\text{с}$

(фиг. 4, а). С увеличением вязкости происходит перестройка модальной структуры пучка и убывание контрастности высокоградиентных оболочек. С увеличением вязкости также падает максимальная амплитуда колебаний в пучке и заметно растет его ширина (фиг. 4, б). При этом сингулярная оболочка отдалется от области заметных волновых возмущений (фиг 4, в).



Фиг. 5. Поля производных радиальной компоненты скорости в центральном сечении конического пучка для  $N = 1.2 \text{ c}^{-1}$ ;  $\omega = 1.0 \text{ c}^{-1}$ ;  $R = 4.0 \text{ см} > L_v = 1.8 \text{ см}$ ;  $u_0 = 0.25 \text{ см/с}$ ,  $t = 0$ : а –  $\partial v_r / \partial z$ ; б –  $\partial^2 v_r / \partial z^2$

Тонкая структура картины возмущений более наглядно проявляется при использовании “дифференциальных анализаторов” – программ построения полей сдвигов скорости и производных более высоких порядков. Такие алгоритмы аналогичны действию визуализирующей диафрагмы в теновом приборе. В картине распределения производной  $\partial v_r / \partial z$ , построенной методом изолиний (фиг. 5, а), достаточно контрастно выражены внешние и внутренние оболочки волновых пучков с толщиной порядка  $\delta_N$ , которые контактируют с кромкой диска (полное число изолиний в картине – 25, шаг между ними  $1/26$  от максимального значения модуля первой производной, равного  $2.41 \text{ c}^{-1}$ , в точке пересечения внутренних оболочек пучков).

С кромкой диска связаны две системы возмущений, лежащие на характеристиках  $z = \pm(r - R) \tan \theta$ , которые и формируют оболочки волнового конуса. Со временем локализация областей с повышенным значением завихренности  $\Omega = \text{rot } v$  и скорости диссипации механической энергии  $\epsilon = (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)^2 / 2$  [21] изменяются, они располагаются внутри волнового пучка. Степень их контрастности и толщина тонкоструктурных элементов меняются во времени существенно быстрее, чем эволюционирует вся картина волн.

Тонкоструктурные оболочки пучков еще более заметно выражены в картине второй производной скорости  $\partial^2 v_r / \partial z^2$  (фиг. 5, б число изолиний – 25, шаг  $1/26$  от максимального значения модуля второй производной, равного  $22.7 \text{ см}^{-1} \text{ c}^{-1}$ , которое достигается у кромок диска). Значения сдвига скорости на периферии пучка достаточно медленно убывают с расстоянием.

Для регистрации сингулярных элементов с масштабом порядка  $\delta_N$  в картине крупномасштабных внутренних волн необходимо использовать приборы, обладающие высоким пространственным разрешением. Данному критерию удовлетворяют только быстродействующие чувствительные инструменты с высокой пространственной разрешаю-

щей способностью и с большим полем зрения, что достигается при использовании совершенных теневых инструментов типа ИАБ-451, 458 [22].

**5. Методика эксперимента.** Опыты по изучению генерации и распространения гармонических внутренних волн выполнены в лабораторном волновом канале длиной 9 м и сечением  $0.6 \times 0.6 \text{ м}^2$ , в боковые стенки которого вклеены оптические иллюминаторы. Корпус бассейна состоит из шести полутораметровых секций, соединенных встык между собой. В зависимости от целей в опытах может использоваться как весь бассейн, так и его отдельная часть, отделенная водонепроницаемыми перегородками. Сверху на специальных направляющих располагаются механизм перемещения датчиков и приводы волнопродукторов.

Заполнение бассейна стратифицированной жидкостью производится методом последовательного вытеснения снизу по традиционной схеме, включающей два накопительных бака, смеситель и соединительные шланги с запорной регулирующей арматурой.

Для визуализации волновых процессов применяется интерференционный теневой прибор ИАБ-451 с диаметром поля зрения 230 мм. Каждая из его секций установлена на специальные подставки, позволяющие независимо регулировать пространственное и угловое положение осветительного луча. Для поворота луча используются два плоских зеркала, снабженных тремя регулировочными винтами. Осветителем служила вертикальная щель регулируемой ширины, светоделительным элементом – вертикальный нож Фуко или вертикальная нить. Ширина осветительной щели выбиралась с учетом условий опыта в диапазоне 0.05–0.5 мм. Нож или нить толщиной 0.02 мм располагались в центре щели.

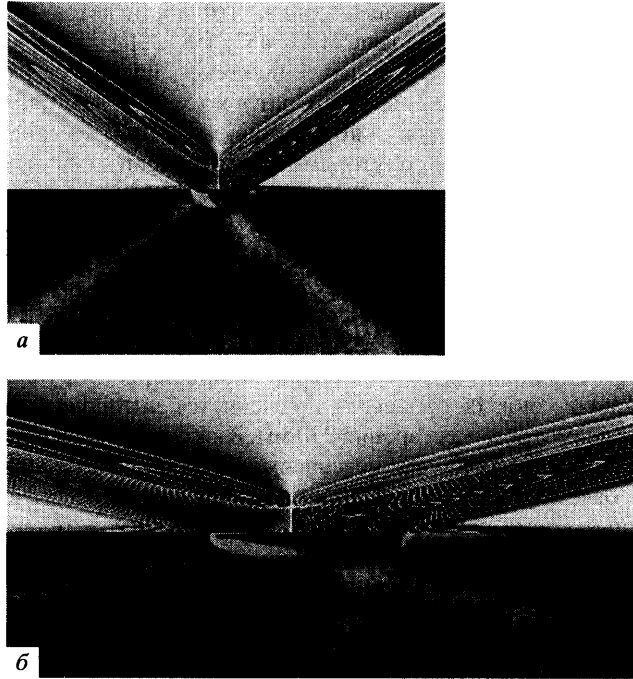
Измерение амплитуд внутренних волн осуществлялось контактным датчиком удельной электропроводности. Датчик закреплялся в специальном устройстве с подвижным элементом, позволяющим производить поточечные измерения возмущений, вызванных движением жидких частиц, по вертикали с шагом 3.3 мм или снимать непрерывно профиль плотности в невозмущенном бассейне. Регистрация выходного сигнала датчика велась на самописце Н3031/3 или компьютере.

После заполнения бассейн отстаивался в течение суток для сглаживания неоднородностей профиля плотности, возникших при создании стратификации. Перед началом опытов датчиком снимался разрез плотности, и методом плотностной метки определялось значение частоты плавучести на горизонте измерений [17]. Перед каждой серией опытов проводилась тарировка датчика методом “подъем-погружение” на глубину 0.5 см, которая использовалась при расчете амплитуд волн.

Трехмерные внутренние волны возбуждались диском радиусом  $R = 1.75, 4.0$ , который приводился в движение синхронным двигателем, управляемым генератором переменной частоты, через кривошипно-шатунный механизм с дискретной регулировкой амплитуды смещений. После затухания всех возмущений включался генератор, и велось наблюдение установления картины течения. Регистрация картины волновых движений и измерения смещений жидких частиц проводились после окончания всех переходных процессов. Во всех случаях, даже при продолжительных измерениях, картина течения была устойчивой; в поле зрения теневого прибора не наблюдались волны, отраженные от боковых стенок, дна и свободной поверхности бассейна.

**6. Сравнение расчетов и измерений.** Совмещенные изображения конических пучков трехмерных внутренних волн представлены на фиг. 6. В верхней половине фигур помещена рассчитанная картина горизонтальной компоненты скорости, в нижней части – цветное теневое изображение, полученное методом “вертикальная щель – вертикальный нож Фуко”. Возможность такого сравнения обоснована подобием фазовой структуры решений (3.13), (3.14).

Четкость теневого изображения конического пучка волн обусловлена осесимметричностью картины течения. Вследствие взаимной компенсации отклонений лучей в обла-



Фиг. 6. Совмещенные изображения картин периодических внутренних волн, образующихся при колебаниях горизонтального диска, сверху – расчет радиальной компоненты пучка, снизу – визуализация поля градиента плотности методом “ножа Фуко”:  $a - T_b = 6.6$  с,  $N = 0.95$  с<sup>-1</sup>,  $\omega = 0.56$  с<sup>-1</sup>,  $R = 2$  см,  $\nu = 0.01$ ;  $б - T_b = 7.12$  с,  $N = 0.88$  с<sup>-1</sup>,  $\omega = 0.17$  с<sup>-1</sup>,  $R = 5$  см,  $\nu = 0.01$

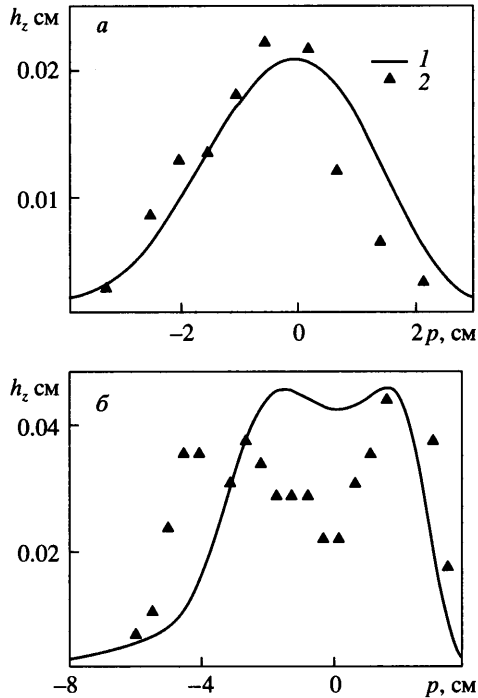
сти возмущений данный метод визуализирует структуру течения в центральном сечении пучка, где касательные к фазовым поверхностям параллельны лучу зрения.

Расчитанные и наблюдаемые изображения согласуются между собой. Для диска малого радиуса ( $R < L_v$ ) ширина пучка составляет 3.2 см, угол наклона к горизонту –  $\theta_e = 53^\circ$  (расчетное значение по дисперсионному соотношению –  $\theta_i = 54.9^\circ$ ); пучок волн одномодален даже вблизи диска.

Диск большого радиуса ( $R = 4$  см;  $L_v = 24$  см;  $R > L_v$ ), осциллирующий с частотой  $\omega = 0.7$  с<sup>-1</sup> ( $\omega < N = 0.9$  с<sup>-1</sup>), возбуждает бимодальный пучок шириной 5 см, распространяющийся под углом  $\theta_e = 49^\circ$  к горизонту (расчетное значение –  $\theta_i = 51^\circ$ ), что согласуется с общим решением и двумерной [6], и трехмерной задач [7].

Данные расчетов и измерений профилей волновых смещений вдоль вертикальных линий, находящихся на расстоянии  $r_0$  от центра диска, представлены на фиг. 7. Контактные, как и оптические, измерения показывают, что диск малого радиуса ( $R < L_v$ ) возбуждает одномодальный пучок (фиг. 7, а); большого ( $R > L_v$ ) – бимодальный (фиг. 7, б). С увеличением частоты волны пучок становится более компактным и поджимается к вертикальной оси.

Значения подгоночного коэффициента  $K$  (равного отношению рассчитанного  $h_i$  и измеренного  $h_e$  смещений  $K = h_i/h_e$ ) отражают степень влияния сопутствующих эффектов, которые не учитываются в данных вычислениях. К их числу относятся краевые вихри на кромках диска, частичное перемешивание жидкости, приводящее к изменению частоты плаваемости вблизи источника. На больших расстояниях от диска подгоночный



Фиг. 7. Профили огибающих вертикальных смещений частиц в пучке волн (1 – расчет, 2 – эксперимент) на расстоянии  $r_0 = 8.5$  см от центра горизонтального диска радиуса  $R$ , в жидкости с частотой плавуности  $N$ ,  $u_0 = 0.1$  см/с, подгоночный коэффициент  $K = 1.0$ : а –  $R = 1.75$  см;  $\omega = 0.7$  с $^{-1}$ ;  $N = 1.1$  с $^{-1}$ ; б –  $R = 4.0$  см,  $\omega = 0.628$  с $^{-1}$ ,  $N = 0.9$  с $^{-1}$

коэффициент  $K = 1.0$  (фиг. 7, а, б). Наименьшее значение коэффициента  $K = 0.37$  получено при измерениях малых волновых возмущений на пороге чувствительности датчика; наибольшее значение  $K = 1.1$  при осцилляциях диска большого радиуса с максимальной амплитудой. Дополнительная ошибка на больших удалениях от источника обусловлена вкладом фоновых внутренних волн и собственными колебаниями жидкости в бассейнах данной конструкции – сейшами.

В теории также не учитываются нелинейные эффекты. В эксперименте в окрестности диска наблюдаются движения с замкнутыми изолиниями, которые могут быть идентифицированы как компактные краевые вихри, влияющее на амплитуды излучаемых волн.

Наложение и нелинейное усиление градиентов в областях пересечения тонкоструктурных элементов толщиной порядка  $\delta_N$  приводят к образованию разрывов стратификации, которые наблюдались в экспериментах [23, 24].

Проведенные опыты показывают, что в дальнем поле расчеты и измерения пучков трехмерных периодических внутренних волн качественно, а в пределах подгоночного коэффициента и количественно согласуются между собой.

**Закключение.** Построенное точное решение линеаризованной задачи излучения пучков периодических внутренних волн компактным источником, поршнем, осциллирующим в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии, содержит регулярные и сингулярные функции. Структура волнового поля проанализирована численными методами и асимптотическими на больших расстояниях от источника.

Для вычисления интегралов, характеризующих решение задачи излучения периодических волн, и визуализации картин течения разработаны специальные программы. Построены фильмы, иллюстрирующие эволюцию картин полей, определены зависимости характеристик волновых пучков от определяющих параметров задачи (размеров излучателя, частот плавучести и осцилляций источника, кинематической вязкости среды).

Функции, регулярные по диссипативным факторам ( $\nu$ ,  $\kappa_s$ ), характеризуют волновые пучки. Сингулярные функции описывают возмущения как в толще жидкости, так и на поверхности источника. На излучающей поверхности располагаются два типа пограничных слоев – внутренние и изопикнический (стоксов). Диффузионный и скоростной расцепляются, когда источником служит горизонтальный диск.

На границах волновых пучков идентифицированы сингулярные элементы – тонкие прослойки, располагающиеся вдоль лучей, которые характеризуются высоким уровнем завихренности и скорости диссипации энергии. Непродолжительная фаза существования таких элементов в конвергентной форме сменяется более продолжительной дивергентной фазой, в которой прослойки размываются по всему сечению пучка.

С увеличением амплитуды колебаний нелинейные эффекты, обусловленные взаимодействием регулярных и сингулярных элементов течения, должны проявляться в первую очередь в областях конвергенции – пересечения внутренних оболочек пучков волн, располагающихся на вертикальной оси на некотором удалении от излучателя.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российской академии наук (Программа ОЭМПУ РАН ОЭ-14 “Динамика и акустика неоднородных жидкостей, газожидкостных смесей и суспензий”) и РФФИ (№№ 05-05-64090, 05-01-00154).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. Стурова И.В. Колебания кругового цилиндра в слое линейно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 155–164.
3. Sutherland B.R., Dalziel S.B., Hughes G.O., Linden P.F. Visualization and measurement of internal waves by “synthetic schlieren”. P I. Vertically oscillating cylinder // J. Fluid Mech. 1999. V. 390. P.93–126.
4. Коняев К. В., Сабинин К. Д. Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
5. Hurley D.G., Keady G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. P II. Approximate viscous solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 119–138.
6. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 31–40.
7. Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн компактными источниками // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 5. С. 621–625.
8. Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В. Расчет структуры периодических течений в непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 6. С. 776–780.
9. Океанология. Физика океана. Т. 1 / Под ред. В.М. Каменковича, А.С. Моница М.: Наука. 1978. 455 с.
10. Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 442–452.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. N. Y. etc.: Wiley, 1981. = Найфэ. А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
13. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1851. V. 9. Pt. 2. P. 8–106.
14. Чашечкин Ю.Д., Васильев А.Ю., Бардаков Р.Н. Тонкая структура пучков трехмерных периодических внутренних волн // Докл. РАН. 2004. Т. 3. Т. 397. № 3. С. 404–407.

15. <http://www.nr.com>
16. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
17. Смирнов С.А., Чашечкин Ю.Д., Ильиных Ю.С. Высокоточный метод измерения профиля периода плавучести // Измерительная техника. 1998. № 6. С. 15–18.
18. <http://www.codegear.com/tabid/123/Default.aspx>
19. Voisin B. Limit states of internal wave beams // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 243–293.
20. Давыдова М.А., Чашечкин Ю.Д. Структура трехмерных периодических пограничных слоев в непрерывно стратифицированной жидкости // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 437–444.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 2001. 733 с.
22. Васильев Л.А. Теневые методы. М.: Наука. 1968. 400 с.
23. McEwan A.D., Plumb R.A. Off-resonant amplification of finite internal wave packets // Dynamics Atmosph. and Oceans. 1977. V. 2. P. 83–105
24. Teoh S.G., Ivey G.N., Imberger J.J. Laboratory study of the interaction between two internal wave rays // J. Fluid Mech. 1997. V. 336. P. 91–121.

Москва

Поступила в редакцию  
13.II.2006