

УДК 532.529:519.62

© 2007 г. Е.С. АСМОЛОВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСАЖДЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОЙ СУСПЕНЗИИ В КОНТЕЙНЕРЕ

Рассмотрена эволюция крупномасштабных возмущений скорости в однородной суспензии, осаждающейся в контейнере в виде прямоугольного параллелепипеда с твердыми горизонтальными стенками и периодическими граничными условиями на вертикальных границах. На основе численного моделирования движения точечных частиц показано, что флуктуации плотности и скорости убывают со временем. Затухание возмущений обусловлено изменением формы фронта осаждения и нелинейным взаимодействием различных мод.

Ключевые слова: суспензия, частицы, осаждение, флуктуации.

При осаждении дисперсных частиц в жидкости под действием силы тяжести при малых числах Рейнольдса возникают крупномасштабные случайные возмущения концентрации и скорости. Флуктуации скорости в однородной суспензии со случайным распределением частиц растут линейно с размером контейнера [1]. Их расходимость для бесконечной системы обусловлена медленным затуханием (обратно пропорционально расстоянию) возмущений скорости от отдельной частицы. Ранее рассмотрена эволюция возмущений скорости в бесконечном контейнере с периодическими граничными условиями и плотностью, неоднородной в вертикальном направлении, и получено решение линеаризованного нестационарного уравнения неразрывности для концентрации и уравнений Стокса для поля скорости [2]. В результате флуктуации скорости оказались конечны.

Крупномасштабные вихревые структуры в осаждающейся суспензии наблюдались во многих экспериментах [3–7]. Пространственный масштаб таких структур при малых концентрациях сравним с размером контейнера в начальный момент и убывает со временем [5]. Тем не менее остается неясным, достигает ли система стационарного состояния. Численное моделирование суспензии осуществлялось также на основе модели решеточного газа [8, 9]. Показано, что флуктуации скорости пропорциональны размеру контейнера при периодических граничных условиях, но в контейнере, ограниченном горизонтальными стенками, они стремятся к конечному значению.

Влияние нижней стенки контейнера и изменений положения фронта осаждения на затухание флуктуаций исследовалось также в [10]. Аналитическое решение для линейных возмущений концентрации и скорости в зависимости от времени и вертикальной координаты получено на основе модели сплошной среды. Линейная теория, однако, не учитывает эффекты нелинейного взаимодействия различных мод возмущений плотности.

В настоящей работе рассматривается эволюция крупномасштабных возмущений скорости в однородной осаждающейся суспензии на основе численного моделирования движения точечных частиц, что позволяет учесть нелинейные эффекты. Контейнер ограничен твердыми стенками в вертикальном направлении, в горизонтальных направлениях приняты периодические граничные условия.

1. Постановка задачи. Движение одинаковых точечных частиц, осаждающихся в прямоугольном контейнере, описывается методом прямого численного моделирования. Гидродинамическое взаимодействие близких частиц и броуновская диффузия не учитываются. Оси x и y лабораторной системы координат направлены горизонтально, ось z –

вертикально вверх, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – соответствующие единичные векторы. Основные размерные величины, с помощью которых обезразмериваются уравнения движения и уравнения Навье–Стокса, – скорость осаждения U_S изолированной частицы под действием силы тяжести и высота контейнера L .

Скорость частицы в разбавленной суспензии равна сумме скоростей осаждения U_S и несущей жидкости \mathbf{u} , и безразмерное уравнение движения частицы p может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_p), \quad p = 1, \dots, N^0 \quad (1.1)$$

где N^0 начальное число частиц в ячейке.

Крупномасштабное течение жидкости при малом числе Рейнольдса, вычисляемом по размеру системы L , описывается безразмерными уравнениями Стокса

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla p - \nabla^2 \mathbf{u} = -6\pi a \mathbf{e}_3 \sum_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (1.2)$$

Влияние частиц на течение жидкости учитывается здесь точечными силами, действующими на частицы [11]. Безразмерный радиус частиц связан с другими безразмерными параметрами соотношением $a = (3\phi L_1 L_2 / 4\pi N^0)^{1/3}$, где ϕ – объемное содержание частиц в суспензии, которое предполагается малым, но конечным, L_1 и L_2 – размеры контейнера в двух горизонтальных направлениях.

При малых ϕ объем образующегося на нижней стенке осадка также мал, т.е. можно считать, что частицы покидают суспензию, если их вертикальная координата $z_p < 0$. Такие частицы не передают импульс жидкости и не учитываются в уравнении импульса (1.2), и уравнение движения (1.1) для них не интегрируется по времени.

Поскольку граничные условия на вертикальных стенках контейнера периодичны, решение для возмущений плотности и скорости жидкости ищется в виде рядов Фурье по горизонтальным координатам

$$n(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_\perp} n^* \exp[i(k_1 x_p + k_2 y_p)]$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}_\perp} \mathbf{u}^* \exp[i(k_1 x_p + k_2 y_p)]$$

$$n^* = \frac{1}{L_1 L_2} \sum_{z_p > 0}^N \exp[-i(k_1 x_p + k_2 y_p)] \delta(z - z_p)$$

$$k_{1,2} = m_{1,2} 2\pi L_{1,2}^{-1}, \quad m_l = 0, \pm 1, \dots$$

Уравнения для фурье-коэффициентов с учетом (1.2) и граничные условия запишутся в виде

$$i(k_1 u_1^* + k_2 u_2^*) + \frac{du_3^*}{dz} = 0$$

$$L u_l^* + i k_l p^* = 0, \quad l = 1; 2$$

$$L u_3^* + \frac{dp^*}{dz} = -6\pi a n^* \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}^* = 0, \quad z = 0; 1$$

$$L = k_\perp^2 - \frac{d^2}{dz^2}, \quad k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2 \neq 0$$

Последовательно исключая переменные p^* , u_1^* , u_2^* , можно преобразовать линейную систему (1.3) в обыкновенное дифференциальное уравнение для фурье-коэффициента вертикальной компоненты скорости

$$\begin{aligned} L^2 u_3^* &= -6\pi a k_{\perp}^2 n^* \\ u_3^* &= \frac{du_3^*}{dz} = 0, \quad z = 0; 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение полученного уравнения четвертого порядка представляется в виде

$$\begin{aligned} u_3^* &= v_3 + \sum_{j=1}^4 a_3^j \varphi_j \\ \varphi_{1,2} &= \exp(\pm k_{\perp} z), \quad \varphi_{3,4} = z \exp(\pm k_{\perp} z) \end{aligned}$$

где v_3 – частное решение неоднородного уравнения (1.4) и φ_j – общие решения однородного уравнения. Функции n^* и v_3 можно также разложить в ряд Фурье по вертикальной координате

$$\begin{aligned} n^* &= \sum_{k_3} n^+(t, \mathbf{k}) \exp(ik_3 z), \quad v_3 = \sum_{k_3} u_3^+(t, \mathbf{k}) \exp(ik_3 z) \\ n^+ &= \frac{1}{2L_1 L_2} \sum_{z_p > 0}^N \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Множитель 2 в знаменателе уравнения (1.5) связан с выбором длины волны основной моды в вертикальном направлении. Он принят равным удвоенной высоте контейнера. Верхняя половина расчетной области считается свободной от частиц в начальный момент времени. Такой выбор позволяет лучше аппроксимировать течение жидкости при конечном числе членов ряда Фурье. Подставляя (1.5) в (1.4), имеем

$$u_3^+ = -\frac{3\pi a k_{\perp}^2}{L_1 L_2 k^4} \sum_{z_p > 0}^N \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p) \quad (1.6)$$

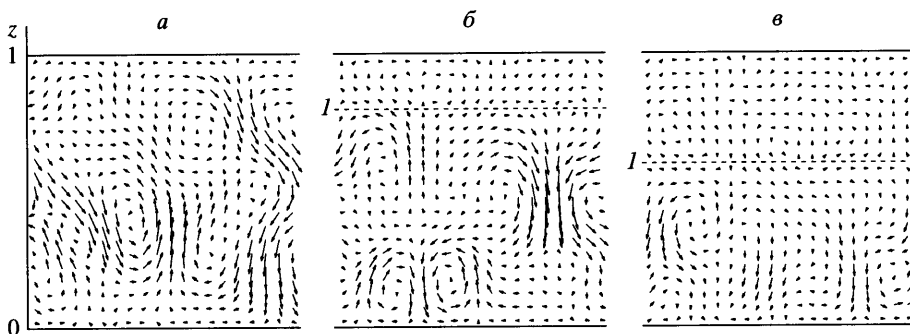
Четыре граничных условия (1.4) позволяют однозначно найти четыре коэффициента a_3^j при решениях однородного уравнения φ_j .

Уравнения, описывающие фурье-коэффициенты горизонтальных компонент скорости, и граничные условия также могут быть получены с учетом (1.3), (1.4)

$$\begin{aligned} L u_i^* &= -k_i \left[6\pi a \sum_{k_3} \frac{k_3}{k^2} n^+(t, \mathbf{k}) \exp(ik_3 z) + 2i(a_3^3 \varphi_1 + a_3^4 \varphi_2) \right], \quad i = 1, 2 \\ u_i^* &= 0, \quad z = 0; 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Общее решение уравнения (1.7) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_i^* &= k_i \left[\frac{3\pi a}{L_1 L_2} \sum_{k_3} \left[\frac{k_3}{k^4} \sum_{z_p > 0}^N \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_p) \right] + \frac{i}{k_{\perp}} (a_3^3 \varphi_3 - a_3^4 \varphi_4) \right] + a_i^1 \varphi_1 + a_i^2 \varphi_2, \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$



Фиг. 1. Поле скорости в среднем сечении контейнера, индуцированное случайным начальным распределением частиц, в различные моменты времени a – v – $t = 0, 0.2, 0.4$: l – среднее положение фронта осаждения

В начальный момент положение частиц в контейнере задается случайным образом. Уравнение их движения (1.1) интегрируются численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом по времени $\Delta t = 0.01$.

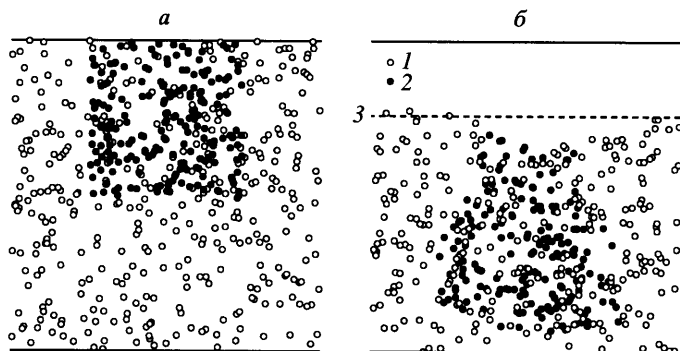
Периодические граничные условия в горизонтальных направлениях означают, что все параметры, усредненные по ансамблю, не зависят от x, y . Вертикальные и горизонтальные флуктуации скорости жидкости выражаются через фурье-коэффициенты скорости следующим образом

$$\langle u_3^2 \rangle = \left\langle \sum_{k_1, k_2} u_3^* \bar{u}_3^* \right\rangle, \quad \langle u_1^2 \rangle = \left\langle \sum_{k_1, k_2} u_1^* \bar{u}_1^* + u_2^* \bar{u}_2^* \right\rangle \quad (1.8)$$

Здесь горизонтальная черта сверху обозначает комплексно сопряженные величины. Как следует из (1.6), функции u_3^* первоначально, когда распределение частиц случайно, пропорциональны k^{-2} , т.е. квадрату длины волны. В результате флуктуации скорости формируются за счет возмущений с длиной волны порядка размера контейнера.

2. Численные результаты. Численные расчеты проводились в основном для кубического контейнера, $L_1 = L_2 = 1$, с начальным числом частиц $N^0 = 5 \cdot 10^3$, объемным содержанием $\phi = 0.01$. При вычислении сумм Фурье учитывались все моды с $|m_i| \leq m_{\max} = 4$. Флуктуации рассчитывались на основе усреднения по 100 реализациям со случайным распределением частиц в контейнере. Эволюция скорости жидкости проиллюстрирована на фиг. 1, где показано поле скорости в срединном сечении, $x = 0.5$, в различные моменты времени ($t = 0, 0.2, 0.4$), индуцированное случайным начальным распределением частиц. Можно видеть вихревые структуры, аналогичные наблюдаемым в экспериментах. Возмущения скорости в суспензии затухают со временем. В чистой жидкости (область над линией 1) они малы.

Начальную неоднородность плотности частиц можно увеличить искусственно. Для этого часть частиц распределяется случайным образом в меньшем объеме: 250 частиц (5% общего числа) были случайно распределены в кубе меньшего размера, $0.25 \leq x, y \leq 0.75, 0.5 \leq z \leq 1$, а остальные 4750 частиц – во всем объеме контейнера. В результате можно проиллюстрировать различные механизмы затухания возмущений. На фиг. 2 показано осаждение такой искусственной неоднородности при $\phi = 0.001$. Неоднородность с повышенной плотностью частиц индуцирует два симметричных вихря, которые приводят к более быстрому ее осаждению. В результате фронт осаждения над ней при $t > 0$ оказывается ниже среднего положения (фиг. 2, б), и суммарное возмущение плотности



Фиг. 2. Положение случайно распределенных (1) и частиц искусственной неоднородности (2) в срединном сечении контейнера: а, б – $t = 0, 0,24$; 3 – среднее положение фронта осаждения

уменьшается. Кроме того, когда неоднородность приближается к нижней стенке, вихри переносят ее в горизонтальном направлении, что также уменьшает возмущение плотности.

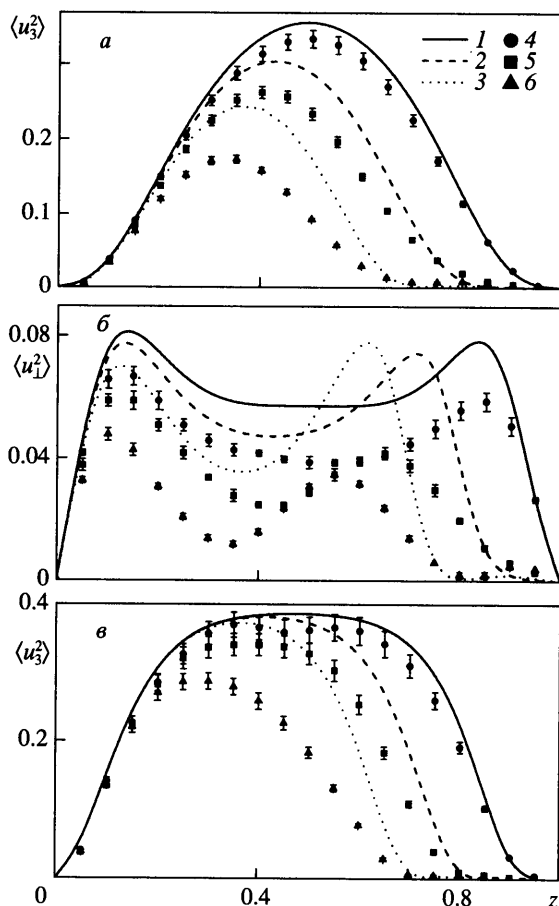
Результаты расчетов для кубического контейнера профилей флуктуаций вертикальной и горизонтальной компонент скорости жидкости для разных моментов времени приведены на фиг. 3 а, б. Для сравнения линиями показаны результаты, полученные на основе линейной теории [10]. В начальный момент профили совпадают в пределах статистической погрешности, поскольку распределения частиц случайны. При $t > 0$ значения, полученные на основе численного моделирования, всегда меньше, и их отличия от результатов линейной теории возрастают со временем. Причина – нелинейные эффекты, роль которых в затухании флуктуаций значительна даже при сравнительно небольшом числе частиц. Возмущения скорости всегда малы в чистой жидкости и на фронте осаждения. Максимумы профилей вертикальных флуктуаций находятся примерно посередине слоя суспензии, в то время как горизонтальные флуктуации максимальны вблизи нижней стенки и фронта осаждения.

Флуктуации вертикальной составляющей скорости для вытянутого контейнера с отношением сторон 1 : 1 : 2 приведены на фиг. 3, в. В этом случае профиль имеет плато в средней части, ширина которого со временем уменьшается. Нелинейные эффекты, так же как и в кубическом контейнере, приводят к затуханию флуктуаций.

Для того чтобы выяснить, становится ли со временем распределение частиц более упорядоченным, рассмотрена эволюция фурье-коэффициентов концентрации частиц. Ранее она изучалась [12] для суммы коэффициентов со сравнимыми длинами волн, и показано, что быстрее затухают возмущения с максимальными длинами волн. В данной работе возмущения классифицируются не только по модулю волнового вектора, но и по его направлению. При расчете статистических характеристик отдельных гармоник необходимо учитывать тот факт, что объем, занимаемый суспензией, и число частиц в ней уменьшаются со временем

$$V(t) = L_1 \times L_2 \times z_i(t), \quad N = N^0 z_i(t)$$

где $z_i = 1 - t$ положение фронта осаждения для разреженной суспензии. Рассчитанные распределения частиц следует сравнивать со случайным распределением, соответствующим текущему числу частиц и объему. Для этого вводятся новые фурье-векторы,



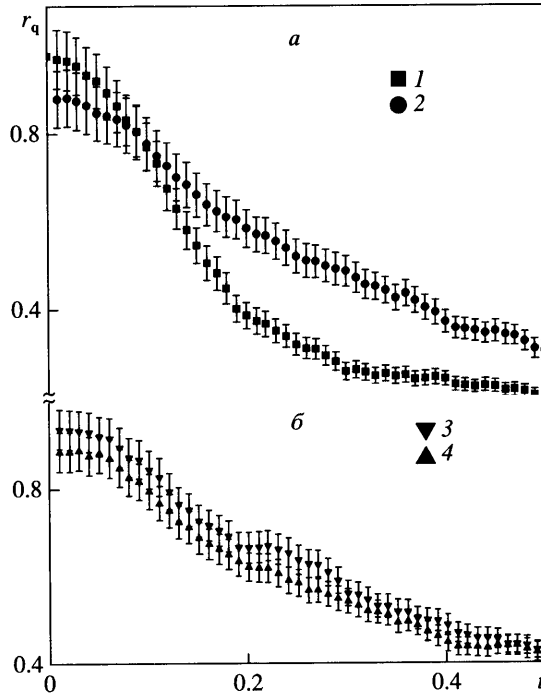
Фиг. 3. Флуктуации вертикальной $\langle u_3^2 \rangle$ (а) и горизонтальной $\langle u_1^2 \rangle$ (б) компонент скорости жидкости в зависимости от z в кубическом контейнере: для $t = 0.1, 0.2, 0.3$ (4–6) в сравнении с результатами, полученными на основе линейной теории (1–3); в – флуктуации вертикальной скорости для вытянутого контейнера с отношением сторон 1 : 1 : 2

$\mathbf{q} = (m_1 2\pi/L_1, m_2 2\pi/L_2, m_3 \pi/z_i)$, соответствующие высоте z_i , и вычисляются новые фурье-коэффициенты концентрации

$$n_{\mathbf{q}}^+ = \frac{1}{2V} \sum_{z_p > 0}^N \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_p)$$

Следует заметить, что векторы \mathbf{k} и \mathbf{q} и соответствующие фурье-коэффициенты совпадают для горизонтальных мод, т.е. для $m_3 = 0$. Распределения концентрации случайные, если отношения дисперсии фурье-коэффициентов плотности $\langle n_{\mathbf{q}}^+ \overline{n_{\mathbf{q}}^+} \rangle$ к соответствующим значениям для случайных распределений

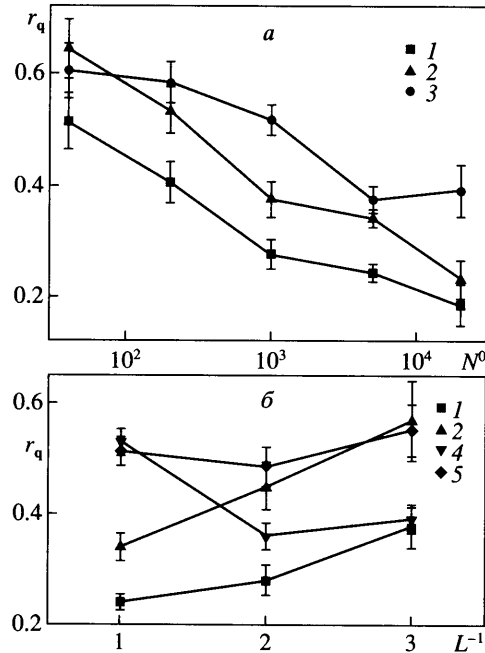
$$r_{\mathbf{q}}(t) = \frac{\langle n_{\mathbf{q}}^+ \overline{n_{\mathbf{q}}^+} \rangle}{\langle n_{\mathbf{q},r}^+ \overline{n_{\mathbf{q},r}^+} \rangle}, \quad \langle n_{\mathbf{q},r}^+ \overline{n_{\mathbf{q},r}^+} \rangle = \frac{N}{4V^2}$$



Фиг. 4. Отношения r_q дисперсии фурье-коэффициентов плотности в кубическом контейнере к соответствующим значениям для случайных распределений для длинноволновых горизонтальных (а): 1 – $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 2 – $(2, 0, 0)$; и наклонных (б) гармоник: 3 – $(1, 0, 1)$, 4 – $(2, 0, 1)$, в зависимости от времени

близки к 1. Зависимости $r_q(t)$, рассчитанные для нескольких длинноволновых мод, показаны на фиг. 4. Для всех мод отношение меньше 1, т.е. распределение частиц в суспензии становится более упорядоченным. Быстрее всего затухают возмущения с горизонтальным волновым вектором и наибольшей длиной волны (фиг. 4, а $\mathbf{m} \equiv (m_1, m_2, m_3) = (1, 0, 0)$). Длинноволновые возмущения, соответствующие косым волнам, затухают медленнее. Отношения для коротких волн с $m_i > 2$ близки к 1, т.е. статистика для таких мод остается случайной. Быстрое затухание горизонтальных мод означает, что происходит конвективный перенос частиц в горизонтальном направлении в области пониженной концентрации, который проиллюстрирован на фиг. 2. Этот механизм затухания связан с нелинейными эффектами, так как уравнения, описывающие линейную эволюцию возмущений концентрации [10], не содержат горизонтальных компонент скорости жидкости. Затухающие длинноволновые возмущения плотности дают основной вклад во флуктуации скорости, так как $u_3^* \sim k^{-2}$. В результате флуктуации и их пространственный масштаб также уменьшаются со временем.

Начальные флуктуации скорости пропорциональны размеру контейнера. Поэтому можно ожидать, что в экспериментах, где количество частиц больше, чем в приведенных расчетах, скорость затухания, связанная с нелинейными эффектами, будет выше. Показанные на фиг. 5, а значения отношений r_q рассчитаны для длинноволновых горизонтальных гармоник в зависимости от начального числа частиц в контейнере. Для больших контейнеров скорость затухания выше. В результате аналогичных вычислений для концентраций $\phi = 0.001$ получены меньшие скорости затухания. Это объясняет



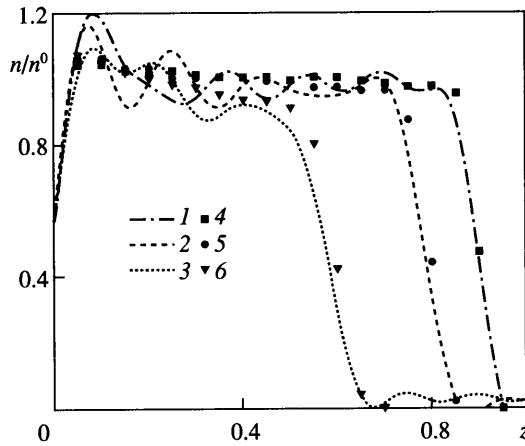
Фиг. 5. Отношение r_q для длинноволновых гармоник: 1 – $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$, 2 – $(1, 1, 0)$, 3 – $(2, 0, 0)$, 4 – $(1, 0, 1)$, 5 – $(1, 1, 1)$ при $t = 0.4$ в зависимости (а) от начального числа частиц в контейнере и (б) от безразмерной ширины контейнера L

ся тем, что начальные флуктуации пропорциональны ϕ , и, следовательно, нелинейное взаимодействие мод уменьшается при низких концентрациях.

Зависимости $r_q(t)$ для различных значений безразмерной ширины контейнера $L_1 = L_2 = L$ (фиг. 5, б) демонстрируют, что для высоких контейнеров основной вклад в возмущения скорости обусловлен не только длинноволновыми горизонтальными модами, но также модами с небольшими значениями $|m_3|$. Такие наклонные моды с $|k_1| \sim |k_2| \sim |k_3|$ соответствуют возмущениям плотности со сравнимыми размерами во всех направлениях. Они затухают примерно с той же скоростью или даже быстрее горизонтальных возмущений, что и обеспечивает суммарное уменьшение флуктуаций скорости.

Роль фронта осаждения в демпфировании первоначальных возмущений изучалась ранее на основе численного моделирования в приближении точечных частиц в [12, 13]. Получено значительное расширение фронта в процессе осаждения монодисперсных частиц. Стратификация плотности частиц рассматривалась в качестве возможной причины затухания возмущений [13]. Однако, в экспериментах [12] диффузия фронта была связана в основном с полидисперсностью суспензии. Можно предположить, что уширение, полученное численно, связано с влиянием частиц осадка и мнимых “отрицательных” образов, которые вводились для того, чтобы удержать на месте осадок. Поскольку были установлены периодические граничные условия в вертикальном направлении, такие мнимые частицы располагаются не только вблизи нижней, но и верхней стенки, поэтому они могут существенно влиять на скорость реальных частиц вблизи фронта.

В настоящей работе, в отличие от [12, 13], частицы осадка, т.е. частицы, имеющие вертикальную координату $z_p < 0$, не учитываются при расчете поля скорости жидкости. В результате получен сравнительно малый рост толщины фронта осаждения. Усред-



Фиг. 6. Плотности частиц в разные моменты времени в зависимости от z , рассчитанные по формуле (2.1) для случайной реализации при $t = 0.1, 0.2, 0.3$ (1–3), в сравнении с усредненными по ансамблю значениями (4–6), полученными непосредственным подсчетом числа частиц, находящихся в слоях ($z - \Delta z, z + \Delta z$), $\Delta z = 0.025$

ненное в горизонтальной x плоскости распределение концентрации рассчитывается через обратное преобразование Фурье

$$n(t, z) = \sum_{k_3} n^+(t, 0, k_3) \exp(ik_3 z) \quad (2.1)$$

Таким образом, стратификация обусловлена только модами плотности, неоднородными в вертикальном направлении, не индуцирующими движение жидкости. Она не оказывает прямого воздействия на горизонтальные моды, ответственные за затухание возмущений, поскольку вертикальное расположение частиц несущественно для таких мод. Следовательно, стратификация не может вызывать затухание возмущений непосредственно, а только через нелинейное взаимодействие мод.

Зависимости плотности частиц от вертикальной координаты, рассчитанные по формуле (2.1) для случайной реализации в разные моменты времени, показаны кривыми на фиг. 6. Для сравнения нанесены также усредненные по ансамблю значения, полученные непосредственно подсчетом числа частиц в слоях высоты 0.05. Оба подхода дают близкие распределения плотности. Можно видеть, что фронт незначительно расширяется со временем.

Заключение. Рассмотрена эволюция крупномасштабных флуктуаций плотности частиц и скорости жидкости в осаждающей суспензии. Флуктуации плотности и скорости убывают со временем. Один из механизмов затухания возмущений – изменение формы фронта осадения. Неоднородности с повышенной концентрацией частиц движутся вниз быстрее. Через некоторое время фронт осадения над такими неоднородностями оказывается ниже среднего положения, что приводит к уменьшению суммарного возмущения плотности.

Другой механизм затухания возмущений связан с нелинейным взаимодействием различных мод. Быстрее всего затухают возмущения с горизонтальным волновым вектором. Причина – конвективный перенос частиц в горизонтальном направлении в области пониженной концентрации.

Автор выражает благодарность А.Н. Осипцову за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00847 и № НШ-4272.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caflisch R.E., Luke J.H.C.* Variance in the sedimentation speed of a suspension // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. № 3. P. 759–760.
2. *Luke J.H.C.* Decay of velocity fluctuations in a stably stratified suspension // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. № 6. P. 1619–1621.
3. *Segrè P.N., Herbolzheimer E., Chaikin P.M.* Long ranged correlations in sedimentation // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. № 13. P. 2574–2577.
4. *Lei X., Ackerson B.J., Tong P.* Settling statistics of hard sphere particles // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. № 15. P. 3300–3303.
5. *Guazzelli E.* Evolution of particle-velocity correlations in sedimentation // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 6. P. 1537–1540.
6. *Bernard-Michel G., Monavon A., Lhuillier D., Abdo D., Simon H.* Particle velocity fluctuations and correlation lengths in dilute sedimenting suspensions // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 7. P. 2339–2349.
7. *Tee Y., Mucha P.J., Cipolletti L., Manley S., Brenner M.P., Segrè P.N., Weitz D.A.* Nonuniversal velocity fluctuations of sedimenting particles // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. № 5. 054501. 4 p.
8. *Ladd A.J.C.* Effects of container walls on the velocity fluctuations of sedimenting spheres // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. № 4. 048301. 4 p.
9. *Nguyen N.-Q., Ladd A.J.C.* Sedimentation of hard-sphere suspensions at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 525. P. 73–104.
10. *Asmolov E.S.* Evolution of fluctuations in a suspension sedimenting in a container bounded by horizontal walls // *Phys. Fluids*. 2004. V. 16. № 8. P. 3086–3093.
11. *Saffman P.G.* On the settling speed of free and fixed suspensions // *Stud. Appl. Math.* 1973. V. 52. № 2. P. 115–127.
12. *Bergougnoux L., Chicinin S., Guazzelli E., Hinch E.J.* Spreading fronts and fluctuations in sedimentation // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15. № 7. P. 1875–1887.
13. *Mucha P.J., Tee S.-Y., Weitz D.A., Shraiman B.J., Brenner M.P.* A model for velocity fluctuations in sedimentation // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 501. P. 71–104.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.2006