

УДК 532.133/.135:532.516.5

© 2007 г. С.И. МАРТЫНОВ, А.О. СЫРОМЯСОВ

СИММЕТРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ЧАСТИЦ И ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Рассмотрена суспензия, в которой твердые сферические частицы одинакового радиуса образуют периодическую решетку. Получено общее решение уравнений Стокса, периодическое относительно данной решетки. На примерах течения жидкости через неподвижную решетку и сдвигового потока жидкости с замороженными частицами показано, что учет структуры решетки и симметрии условий на поверхности частиц приводит к значительному упрощению задачи и позволяет полностью определить распределение скорости и давления в жидкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, периодическая решетка сфер, симметрия, точечная группа.

В результате взаимодействия частиц в суспензии могут образоваться структуры, сходные с периодическими, например коллоидные кристаллы; изучение таких суспензий вызывает теоретический и практический интерес [1]. Исследуются процессы образования структур, их динамика в потоке жидкости, зависимость макроскопических характеристик суспензии (эффективной вязкости, проницаемости матрицы) от концентрации частиц и их взаимного расположения.

При моделировании течения вязкой жидкости с периодической решеткой в основном используют метод [2]: частицы взвеси заменяются точечными силами, действующими в узлах решетки, а скорость и давление в жидкости представляются рядами Фурье. Это позволяет обойти проблему расходимости, возникающую при учете многочастичных взаимодействий, но не дает возможности явно учесть краевые условия на поверхности частиц. Вместо этого требуется, чтобы среднее значение скорости по поверхности частицы равнялось нулю. Поскольку метод не учитывает вращения частиц, он может быть применен только для описания фильтрации жидкости через неподвижную решетку. Применение данного подхода в сочетании с другими методами позволяет напрямую использовать краевые условия. Так, в [3, 4] уравнения Стокса сводятся к наборам интегральных уравнений, которые решаются методом Галеркина; в [5] решение [2] используется вместе с общим решением Ламба в сферических координатах. Однако эти модификации метода точечных сил сложны и требуют больших вычислительных затрат.

В ячеечных моделях [6] предполагается, что взаимодействие частиц сводится к экранированию возмущений от каждой частицы на некотором расстоянии от нее; ячейка, в которой заключено возмущение, считается сферической. Взаимное перекрытие ячеек и их деформация в этих моделях не учитываются.

При квази- N -частичном подходе [7] задача на ячейке периодичности решетки решается с помощью преобразования Фурье, при этом скорость и давление раскладываются по сферическим гармоникам и находится матрица подвижности, связывающая скорости частиц и приложенные к ним силы и моменты. В работе указана возможность использования симметрии решетки для упрощения решений, но условия на границе ячейки не приведены. Этот подход также достаточно сложен для реализации.

Применение метода стоксовой динамики позволяет проследить эволюцию частиц в потоке, но при этом бесконечная решетка заменяется конечной и взаимодействия ча-

стиц представляются суммой парных взаимодействий [1], что может приводить к значительным погрешностям.

В настоящей работе развивается аналитический метод решения задачи, отличный от перечисленных выше и явно учитывающий краевые условия и взаимодействие частиц, образующих решетку. В отличие от более ранних работ авторов [8, 9], в данной статье различные виды потоков (фильтрационный и сдвиговой) рассматриваются в рамках единого подхода. Это позволяет описывать обтекание жидкостью решеток произвольной симметрии и находить средние характеристики потока с минимальными вычислительными затратами. Алгоритмы нахождения неизвестных тензорных коэффициентов и эффективной вязкости значительно упрощены. Кроме того, получено общее решение уравнений Стокса для произвольной периодической конфигурации частиц, что позволило описать деформацию решетки в сдвиговом потоке.

1. Постановка проблемы. Рассмотрена вязкая жидкость, в которой взвешена решетка твердых сферических частиц одинакового радиуса a . Внешние силы и моменты на частицы не действуют. Начало координат совпадает с центром одной из сфер, поступательная скорость которой считается равной нулю. Векторы \mathbf{r}_j , $j = 1, 2, 3$ являются периодами трансляции; центр произвольной частицы имеет радиус-вектор $\mathbf{r}^n = n_j \mathbf{r}_j$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. Положение точки относительно начала координат задается вектором \mathbf{x} , а относительно n -й сферы – вектором $\mathbf{x}^n = \mathbf{x} - \mathbf{r}^n$.

Обозначим $r = \min(|\mathbf{r}_1|, |\mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_3|)$, $\varepsilon = a/r$. Параметр $\varepsilon \leq 1/2$, предельное значение достигается при касании сфер.

Пусть число Рейнольдса много меньше единицы, тогда скорость течения \mathbf{u} и давление p связаны уравнениями

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь η – вязкость жидкости. Скорость и давление ищутся в виде

$$\mathbf{u}_i = U_i + v_i, \quad p = P + p' \quad (1.2)$$

Вектор $U_i(\mathbf{x})$ и скаляр $P(\mathbf{x})$ задают характер течения. При этом, если U_i задан, то P есть неизвестная величина. Аналогично, если известно P (например, задан перепад давления в задаче о фильтрации), то U_i подлежит определению.

Возмущения v_i и p' являются периодическими относительно решетки: для любого \mathbf{r}^n

$$v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}^n) = v_i(\mathbf{x}), \quad p'(\mathbf{x} + \mathbf{r}^n) = p'(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

Пусть нулевая частица вращается со скоростью Γ_{ij}

$$U_i + v_i = \Gamma_{ij} x_j, \quad |\mathbf{x}| = a, \quad \Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}, \quad \Gamma_{ij} = \text{const} \quad (1.4)$$

Здесь и далее используется соглашение Эйнштейна: по повторяющимся индексам производится суммирование.

Скорость Γ_{ij} может быть задана заранее (в задаче о фильтрации $\Gamma_{ij} = 0$), а может быть найдена из условия отсутствия внешних моментов (задача о сдвиговом потоке).

Итак, по заданным U_i (или P) требуется отыскать v_i и p' , а также неизвестную функцию P (или U_i), удовлетворяющие уравнениям (1.1)–(1.4) и условию отсутствия внешних сил и моментов. Отметим, что уравнение (1.1) справедливо для u_i и p , но системы величин $\{U_i, P\}$, а также $\{v_i, p'\}$, взятые по отдельности, не обязаны удовлетворять (1.1).

Ниже строится общее решение задачи о периодической решетке произвольной симметрии. На примере кубических решеток показано, как полученные выражения применяются при описании фильтрации жидкости через неподвижную матрицу и поведения решетки в сдвиговом потоке.

2. Общее решение задачи о произвольной решетке. Если число взвешенных частиц конечно, то возмущения скорости и давления удовлетворяют (1.1) и затухают на беско-

нечности. Тогда p' и ηv_i суть линейные комбинации мультиполей $L_{i\dots j}$, $L_{i\dots j}|\mathbf{x}|^2$, M_{ijk} , K_{ij} , где

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\mathbf{x}|}, & L_{i\dots j}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \\ K_{ij}(\mathbf{x}) &= \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3}, & M_{ijk}(\mathbf{x}) &= \frac{x_i x_j x_k}{|\mathbf{x}|^5} \\ K_{ii} &= L_0, & K_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial x_k} K_{ij} = -(\delta_{ik} L_j + \delta_{jk} L_i + 3M_{ijk}) \\ M_{iik} &= -L_k, & M_{ijkl} &= \frac{\partial}{\partial x_l} M_{ijk}, & M_{ijki} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для решения задачи (1.1)–(1.3) следует построить периодические продолжения мультиполей \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{M} . Метод периодизации $L_{i\dots j}$ описан в [10], где продолженные функции представлены абсолютно сходящимися рядами, а суммирование ведется по всем узлам решетки:

$$L_{ij\dots k}^\infty = \sum_n L_{ij\dots k}^n = \sum_n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}^n|} \right)$$

Если число индексов меньше трех, периодическими являются

$$\begin{aligned} L_{ij}^\infty &= L_{ij} + L'_{ij}, & L_i^\infty - \gamma_{ij} x_j &= L_i + L'_i - \gamma_{ij} x_j \\ L_0^\infty - \frac{1}{2} \gamma_{jk} x_j x_k &= L_0 + L'_0 - \frac{1}{2!} \gamma_{jk} x_j x_k, & \gamma_{jk} &= 2L_j^\infty \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}_s \right) \mathbf{R}_{(s)k} \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{R}_{(s)}$ – вектор базиса, взаимного к \mathbf{r}_s . Штрих обозначает сумму по всем узлам решетки, кроме начального:

$$\begin{aligned} L_{ij\dots k}^\infty &= \sum_{n \neq 0} L_{ij\dots k}^n, & L'_{ij} &= \sum_{n \neq 0} [L_{ij}^n - L_{ij}^n(\mathbf{0})] \\ L'_i &= \sum_{n \neq 0} [L_i^n - L_i^n(\mathbf{0}) - L'_{ij}(\mathbf{0}) x_j] \\ L'_0 &= \sum_{n \neq 0} \left[L_0^n - L_0^n(\mathbf{0}) - L_j^n(\mathbf{0}) x_j - \frac{1}{2} L_{jk}^n(\mathbf{0}) x_j x_k \right] \end{aligned}$$

Такие суммы не имеют особенности в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Аналогично [10] строятся периодические продолжения других функций. Вместо $L_{ijkl\dots m}|\mathbf{x}|^2$, $L_{ijkl}|\mathbf{x}|^2$, M_{ijk} , K_{ij} рассматриваются

$$\begin{aligned} \sum_n L_{ijkl\dots m}^n |\mathbf{x}^n|^2, & & L_{ijkl}|\mathbf{x}|^2 &+ \sum_{n \neq 0} [L_{ijkl}^n |\mathbf{x}^n|^2 - (L_{ijkl}^n |\mathbf{x}^n|^2)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}] \\ M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl} x_l &= & M_{ijk} &+ M'_{ijk} - \beta_{ijkl} x_l \\ K_{ij}^\infty - \alpha_{ijkl} x_k x_l &= & K_{ij} &+ K'_{ij} - \alpha_{ijkl} x_k x_l \end{aligned}$$

$$M'_{ijk} = \sum_{n \neq 0} [M^n_{ijk} - M^n_{ijk}(\mathbf{0}) - M^n_{ijkl}(\mathbf{0})x_l]$$

$$K'_{ij} = \sum_{n \neq 0} \left[K^n_{ij} - K^n_{ij}(\mathbf{0}) - K^n_{ijk}(\mathbf{0})x_k - \frac{1}{2}K^n_{ijkl}(\mathbf{0})x_kx_l \right]$$

$$\beta_{ijkl} = 2M^\infty_{ijk} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}_s \right) R_{(s)l}$$

Поскольку $\beta_{ijkl}x_l$ есть линейная поправка к M^∞_{ijk} , тензор β_{ijkl} симметричен по первым трем индексам. В [10] доказано, что γ_{ij} симметричен, и $\gamma_{ii} = -4\pi/|B|$, где $|B|$ – объем элементарной ячейки решетки. Аналогично можно показать, что $\beta_{ijkk} = 4\pi\delta_{ij}/3|B|$. В силу (2.1) справедливы соотношения

$$\beta_{iikl} = -\frac{1}{2}\gamma_{kl}, \quad \alpha_{ijkl} = -\frac{1}{2}(\delta_{ik}\gamma_{jl} + \delta_{jk}\gamma_{il} + 3\beta_{ijkl}) \quad (2.2)$$

Таким образом, p' и ηv_i можно искать в виде

$$\begin{aligned} p' &= H_j(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + F_{jk}L_{jk}^\infty + \dots + W_{jklmstq}L_{jklmstq}^\infty + \dots \\ \eta v_i &= -\frac{1}{2}H_i \left(L_0^\infty - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_jx_k \right) - \frac{1}{2}H_j(K_{ij}^\infty - \alpha_{ijkl}x_kx_l) + \\ &+ B_{ij}(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + \frac{3}{2}F_{jk}(M_{ijk}^\infty - \beta_{ijkl}x_l) - \\ &- \frac{4}{7}G_{ijk}L_{jk}^\infty - \frac{1}{14}G_{jkl} \left\{ L_{ijkl}|\mathbf{x}|^2 + \sum_{n \neq 0} [L^n_{ijkl}|\mathbf{x}|^2 - (L^n_{ijkl}|\mathbf{x}|^2)_{x=0}] \right\} - \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl}^\infty - \\ &- \frac{1}{18}D_{jklm} \sum_n L^n_{ijklm}|\mathbf{x}|^2 - \dots - \frac{8}{15}W_{ijklmst}L_{jklmst}^\infty - \frac{1}{30}W_{jklmstq} \sum_n L^n_{ijklmstq}|\mathbf{x}|^2 - \dots \\ B_{ij} &= -B_{ji} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом $\Delta p' = 0$. Условие $\text{div} \mathbf{v} = 0$ выполняется, если

$$\beta_{ijki}F_{jk} = 0 \quad (2.4)$$

Тензоры $H_i, \dots, W_{ijklmst}, \dots$ не зависят от \mathbf{x} и должны быть найдены из (1.4) численным методом или разложением по неотрицательным степеням параметра ε . В данной работе задача решается с точностью до ε^6 . В силу периодичности решения задачи достаточно изучить поведение жидкости вблизи нулевой частицы, поэтому $\mathbf{K}', \mathbf{L}', \mathbf{M}'$ раскладываются в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. С выбранной точностью

$$\begin{aligned} \eta v_i &= -\frac{1}{2}H_i \left[L_0 + \frac{1}{4!}L'_{ijklm}(\mathbf{0})x_jx_kx_lx_m - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_jx_k \right] - \\ &- \frac{1}{2}H_j \left[K_{ij} + \frac{1}{4!}K'_{ijklms}(\mathbf{0})x_kx_lx_mx_s - \alpha_{ijkl}x_kx_l \right] + B_{ij} \left[L_j + \frac{1}{3!}L'_{jklm}(\mathbf{0})x_kx_lx_m - \gamma_{jk}x_k \right] + \\ &+ \frac{3}{2}F_{jk} \left[M_{ijk} + \frac{1}{3!}M'_{ijklms}(\mathbf{0})x_lx_mx_s - \beta_{ijkl}x_l \right] - \frac{4}{7}G_{ijk} \left[L_{jk} + \frac{1}{2!}L'_{jklm}(\mathbf{0})x_lx_m \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{14}G_{jkl}\left[L_{ijkl}|\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{2}L_{ijklms}^{6,2}x_mx_s + (L_{ijklms}^{5,1} + L_{ijkmsl}^{5,1})x_mx_s + L'_{ijkl}(\mathbf{0})|\mathbf{x}|^2\right] - \\
 & -\frac{5}{9}D_{ijkl}[L_{jkl} + L'_{jklm}(\mathbf{0})x_m] - \frac{1}{18}D_{jklm}[L_{ijklm}|\mathbf{x}|^2 + L_{ijklms}^{6,2}x_s + 2L_{ijkmsl}^{5,1}x_s] - \\
 & -\frac{6}{11}T_{ijklm}[L_{jklm} + L'_{jklm}(\mathbf{0})] - \frac{1}{22}T_{jklms}[L_{ijklms}|\mathbf{x}|^2 + L_{ijkmsl}^{6,2}] - \\
 & -\frac{7}{13}P_{ijklms}L_{jklms} - \frac{1}{26}P_{jklmst}L_{ijklmst}|\mathbf{x}|^2 - \frac{8}{15}W_{ijklmst}L_{jklmst} - \frac{1}{30}W_{jklmstq}L_{ijklmstq}|\mathbf{x}|^2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$L_{ijklms}^{6,2} = \sum_{n \neq 0} [L_{ijklms}^n |\mathbf{x}^n|^2]_{x=0}, \quad L_{ijklms}^{5,1} = \sum_{n \neq 0} [L_{ijklms}^n x_s^n]_{x=0}$$

$$K'_{ijklms}(\mathbf{0}) = \frac{\partial^4}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_s} K'_{ij}(\mathbf{0})$$

$$M'_{ijklms}(\mathbf{0}) = \frac{\partial^3}{\partial x_l \partial x_m \partial x_s} M'_{ijk}(\mathbf{0})$$

Выше учтено, что для мультиполей нечетного порядка $L'_{i\dots j}(\mathbf{0}) = 0$ [10].

Тензоры $\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{K}'(\mathbf{0}), \mathbf{L}'(\mathbf{0}), \mathbf{M}'(\mathbf{0})$ зависят только от конфигурации частиц и потому обладают симметрией решетки. При решении конкретной задачи эти тензоры известны заранее. Напротив, $\mathbf{H}, \dots, \mathbf{W}$ должны быть инвариантны относительно пересечения точечной группы решетки и группы симметрии краевых условий. Выяснив симметрию тензора, его можно представить в виде линейной комбинации небольшого количества базисных тензоров (различных для каждой точечной группы) [11]. После этого остается найти лишь коэффициенты разложения тензоров по базисному набору. Таким образом, учет структуры решетки позволяет резко снизить количество параметров, необходимых для задания тензоров.

На неизвестные $H_i, \dots, W_{ijklmst}$ накладываются и дополнительные ограничения. Во-первых, эти тензоры должны быть симметричны по индексам, по которым происходит их свертывание с мультиполями (т.е. по всем, начиная со второго). Во-вторых, в этих тензорах можно не учитывать слагаемые, дающие нуль при свертке с мультиполями.

Так, бессмысленно в D_{ijkl} учитывать слагаемое $A\delta_{ij}\delta_{kl}$, ибо $\delta_{ij}\delta_{kl}L_{ijkl}^\infty \equiv 0$. Эти два ограничения справедливы для любой задачи, решение которой представлено линейной комбинацией мультиполей.

3. Вид мультиполей для кубических решеток. Существуют три типа кубических решеток: простая (simple cubic, SC), объемноцентрированная (body-centered cubic, BCC) и гранецентрированная (face-centered cubic, FCC), для которых периоды трансляции имеют вид

$$\begin{aligned}
 \text{SC: } & \mathbf{r}_1 = h\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = h\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = h\mathbf{e}_3 \\
 \text{BCC: } & \mathbf{r}_1 = \frac{h}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{r}_2 = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{r}_3 = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \\
 \text{FCC: } & \mathbf{r}_1 = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{r}_2 = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{r}_3 = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортогональный кристаллофизический базис; для простой кубической решетки $h = r$, для объемноцентрированной $h = 2r/\sqrt{3}$, для гранецентрированной $h = r\sqrt{2}$.

Установим структуру $L'_{jklm}(\mathbf{0})$, $L_{ijklms}^{6,2}$, $L_{ijklms}^{5,1}$, $M'_{ijklms}(\mathbf{0})$, γ_{ij} и β_{ijkl} для этих решеток (точечная группа $\bar{6}/4$ по [11], $m3m$ согласно международным обозначениям). Для данной группы базис образуют δ и $\mathbf{O}_h = \mathbf{e}_1^4 + \mathbf{e}_2^4 + \mathbf{e}_3^4$, степень вектора означает его полиадное произведение на себя. \mathbf{O}_h есть обобщенный символ Кронекера: $(\mathbf{O}_h)_{ijkl} = o_{ijkl}$.

Для кубических решеток

$$\gamma_{ij} = -\frac{4\pi}{3|B|} \delta_{ij} = -\frac{f}{r^3} \delta_{ij} \quad (3.2)$$

Для простой кубической решетки $f = 4\pi/3$, для объемоцентрированной $f = \pi\sqrt{3}$, для граничноцентрированной $f = 4\pi\sqrt{2}/3$. Отметим, что $\phi = fe^3$ есть объемная доля частиц в суспензии.

Тензор $L'_{jklm}(\mathbf{0})$ симметричен по своим индексам. Кроме того, L_{jklm} – гармоническая функция, а значит, $L'_{jklm}(\mathbf{0}) = 0$. Следовательно,

$$L'_{jklm}(\mathbf{0}) = p_1 \left[o_{jklm} - \frac{1}{5} \delta_{(jk} \delta_{lm)} \right] \quad (3.3)$$

$$\delta_{(jk} \delta_{lm)} = \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Аналогично устанавливается структура остальных тензоров. Так, $L_{ijklms}^{6,2}$ симметричен, и его свертка по двум любым индексам равна нулю:

$$L_{ijklms}^{6,2} = q^{6,2} \left[\frac{77}{2} o_{ijklms} - 7 \delta_{(ij} o_{klms)} + \delta_{(ij} \delta_{kl} \delta_{ms)} \right] \quad (3.4)$$

В последней формуле произведение $o_{ijkl} o_{ilms}$ заменено на o_{ijklms} .

Тензор $L_{ijklms}^{5,1}$ симметричен по первым пяти индексам и дает нуль при свертке по двум любым из них, следовательно

$$L_{ijklms}^{5,1} = q_1^{5,1} [-7 o_{ijklms} + \delta_{(ij} o_{klms)} - o_{(ijkl} \delta_{ms)}] + q_2^{5,1} [14 o_{ijklms} - 7 o_{(ijkl} \delta_{ms)} + \delta_{(ij} \delta_{kl} \delta_{ms)}] \quad (3.5)$$

Свойства $M'_{ijklms}(\mathbf{0})$ следуют из (2.1): этот тензор симметричен по i, j, k и по l, m, s ; $M'_{ijklmi}(\mathbf{0}) = 0$; $M'_{iiklms}(\mathbf{0}) = -L'_{klms}(\mathbf{0})$, поэтому

$$M'_{ijklms}(\mathbf{0}) = \frac{1}{5} p_1 [(\delta_{lm} o_{ijks} + \delta_{ls} o_{ijkm} + \delta_{ms} o_{ijkl}) - (\delta_{ij} o_{klms} + \delta_{ik} o_{jlms} + \delta_{jk} o_{ilms})] + q_1^M \left[\frac{35}{2} o_{ijklms} - \frac{1}{2} (\delta_{ij} o_{klms} + \delta_{ik} o_{jlms} + \delta_{jk} o_{ilms}) + \frac{1}{2} (\delta_{lm} o_{ijks} + \delta_{ls} o_{ijkm} + \delta_{ms} o_{ijkl}) - \frac{5}{2} (\delta_{il} o_{jklm} + \dots + \delta_{ks} o_{ijlm}) + (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{ks} + \dots + \delta_{is} \delta_{jm} \delta_{kl}) \right] + q_2^M [21 o_{ijklms} - 3(\delta_{ij} o_{klms} + \delta_{ik} o_{jlms} + \delta_{jk} o_{ilms}) - 4(\delta_{lm} o_{ijks} + \delta_{ls} o_{ijkm} + \delta_{ms} o_{ijkl}) - (\delta_{il} o_{jklm} + \dots + \delta_{ks} o_{ijlm}) + (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ms} + \dots + \delta_{jk} \delta_{is} \delta_{lm})] \quad (3.6)$$

Наконец, β_{ijkl} симметричен по первым трем индексам

$$\beta_{ijkl} = \frac{2}{r} [\beta_0 o_{ijkl} + \beta_2 \delta_{(ij} \delta_{kl)}] \quad (3.7)$$

В силу (2.2) и (3.2) $\beta_0 + 5\beta_2 = f/2$.

Параметры p_1, \dots, q_2^M находятся подстановкой конкретных наборов индексов вместо i, j, \dots, s в (3.3)–(3.6) и выражаются через решеточные суммы $\rho_d^{a, b, c}$:

$$\rho_d^{a, b, c} = \sum_{n \neq 0} \frac{(r_1^n)^a (r_2^n)^b (r_3^n)^c}{|r^n|^d}$$

4. Фильтрация жидкости через матрицу. Пусть решетка неподвижна, $\Gamma_{ij} = 0$. Условием фильтрации является перепад давления в жидкости. Далее предполагается, что

$$P = A_j x_j, \quad A_j = \text{const} \quad (4.1)$$

Без ограничения общности $A_1 = A_2 = 0$.

Подстановка (4.1) в (1.1) и (2.3) дает дополнительное условие на A_i

$$-A_i + \eta \Delta U_i = \frac{4\pi}{|B|} H_i$$

С учетом бесконечности решетки и несжимаемости жидкости получаем, что $U_i = \text{const}$. Таким образом

$$-A_i = \frac{4\pi}{|B|} H_i \quad (4.2)$$

В рассматриваемом случае x_3 есть поворотная ось четвертого порядка, $x_1 x_3, x_2 x_3$ – зеркальные плоскости. Напротив, $x_1 x_2$ плоскостью симметрии не является (отражение относительно нее означает изменение направления фильтрации на противоположное). Эти элементы симметрии задают группу $4 \cdot m$ ($4mm$ в международных обозначениях). Для нее базисными являются $\delta, \mathbf{b} = \mathbf{e}_3, \mathbf{O}_h$ [11]; очевидно, $o_{ijkl} b_l = b_i b_j b_k$.

Из симметрии потока следует, что v_i четны по x . Из уравнений Стокса вытекает, что тогда $p'(-\mathbf{x}) = -p'(\mathbf{x})$, то есть четности v_i, p' , с одной стороны, и U_i, P , с другой, совпадают, поэтому p' выражается через мультиполи нечетного, а v_i – четного порядка, и неизвестны коэффициенты $H_i, G_{ijk}, \dots, W_{ijklmst}$. Для группы $4 \cdot m$ искомые тензоры имеют вид

$$\begin{aligned} H_i &= \eta \theta_1 b_i, \quad G_{ijk} = \eta [\lambda_1 b_i b_j b_k + \lambda_2 \delta_{i(j} b_{k)}] \\ T_{ijklm} &= \eta [v_1 b_i b_j b_k b_l b_m + v_{21} \delta_{i(j} b_k b_l b_{m)} + v_{13} b_i o_{jklm} + v_{31} o_{i(jkl} b_{m)}] \\ W_{ijklmst} &= \eta [\psi_1 b_i b_j b_k b_l b_m b_s b_t + \psi_{21} \delta_{i(j} b_k b_l b_m b_s b_{t)} + \psi_{13} b_i b_j b_k o_{lmst} + \\ &+ \psi_{31} o_{i(jkl} b_m b_s b_{t)} + \psi_{213} \delta_{i(j} b_k o_{lmst)} + \psi_{133} b_i o_{jklmst} + \psi_{313} o_{i(jklms} b_{t)}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Параметры $\theta_1, \dots, \psi_{313}$ находятся подстановкой (4.3) и (3.3)–(3.7) в (2.5)

$$\frac{\theta_1}{U_3} = \frac{3a}{2} \left[1 - \frac{f}{2} \epsilon^3 + \left(\frac{f}{2} \epsilon^3 \right)^2 \right]$$

$$\frac{\lambda_1}{U_3} = a^3 \left[\frac{21}{32} (10\beta_2 - f) \left(\epsilon^3 - \frac{f}{2} \epsilon^6 \right) + \frac{175}{48} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \epsilon^5 \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{21}}{U_3} &= -a^3 \left[\frac{7}{32} + \frac{21}{64} (4\beta_2 - f) \left(\epsilon^3 - \frac{f}{2} \epsilon^6 \right) + \frac{35}{48} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \epsilon^5 \right] \\
\frac{v_1}{U_3} &= -\frac{11a^5}{128} (2\rho_5 - 63\rho_9^{2,2} + 231\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5 \\
\frac{v_{21}}{U_3} &= \frac{11a^5}{768} \left[\frac{3}{2} (f - 10\beta_2) \left(\epsilon^3 - \frac{f}{2} \epsilon^6 \right) - (7\rho_5 - 87\rho_9^{2,2} - 126\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5 \right] \\
\frac{v_{13}}{U_3} &= \frac{11a^5}{1152} (-2\rho_5 + 3\rho_9^{2,2} + 189\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5 \\
\frac{v_{31}}{U_3} &= \frac{11a^5}{1152} (2\rho_5 - 57\rho_9^{2,2} + 189\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5 \\
\frac{\Psi_{21}}{U_3} &= \frac{5a^7}{4096} (2\rho_5 - 63\rho_9^{2,2} + 231\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5 \\
\frac{\Psi_{213}}{U_3} &= \frac{a^7}{12288} (-2\rho_5 + 75\rho_9^{2,2} - 315\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Остальные коэффициенты с выбранной точностью равны нулю.

Данную задачу можно рассматривать с двух точек зрения. Если задана U_i , то можно отыскать A_i , и, наоборот, зная A_i , можно найти U_i . Из (4.2) и (4.4) получаем

$$\frac{4\pi}{|B|} \eta \theta_1 U_i = -A_i \tag{4.5}$$

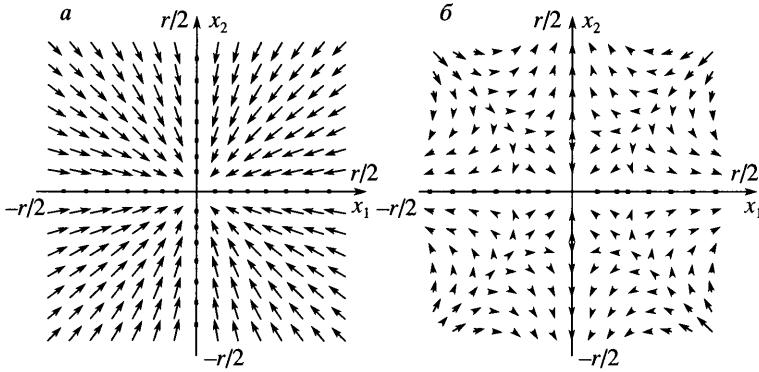
Если U_i задана, то при $\epsilon \rightarrow 0$ из (4.4)–(4.5) следует, что

$$P = \text{const}, \quad H_i = \frac{3}{2} a U_i, \quad G_{ijk} = -\frac{7}{32} a^3 \delta_{i(j} U_{k)}$$

Это соответствует хорошо известному случаю обтекания одиночной частицы однородным потоком жидкости.

Если же задан A_i , то при $\epsilon \rightarrow 0$ $U_i \rightarrow \infty$. Это означает, что вблизи частицы реализуется течение с квадратичным по координатам профилем скорости, на которое накладываются возмущения от других частиц [8], поэтому в этом случае отсутствует предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$ к решению, соответствующему случаю обтекания одиночной частицы однородным потоком вязкой жидкости.

На фиг. 1 показаны проекции поля направлений v_i на плоскость $x_1 x_2$ (“вид сверху”). В случае периодической решетки у поля направлений прослеживаются элементы симметрии группы $4mm$ – ось четвертого порядка и зеркальные плоскости. Решетка “выравнивает” течение, так что возмущение потока, обусловленное частицей, не выходит за границы элементарной ячейки. В отличие от [6] эта ячейка является не сферической, а кубической. В случае произвольной решетки возмущение должно быть ограничено ячейкой Вигнера–Зейтца. Кроме того, наличие ячейки, ограничивающей возмущение потока, является следствием модели, а не ее исходным положением, как в указанном источнике.



Фиг. 1. Проекция поля направлений на плоскость x_1x_2 при фильтрации, $\epsilon = 0.25$, $x_1, x_2 \in [-r/2, r/2]$, $x_3 = r/2$; а – одиночная частица, б – частица в простой кубической решетке

Скорость фильтрации жидкости V_i через матрицу есть среднее значение u_i по объему ячейки периодичности. Вычисление интеграла после ряда преобразований дает

$$V_i = (1 + \xi)U_i \tag{4.6}$$

где величина ξ (после замены $\phi = f\epsilon^3$) определяется таким образом:

$$\xi = Q_1 \phi^{1/3} \left(1 - \frac{\phi}{2} + \frac{\phi^2}{4} \right) + \phi \left[\frac{1}{2} + \phi \left(-\frac{27}{32} + \frac{63\beta_2}{8f} - \frac{315\beta_2^2}{8f^2} \right) \right]$$

$$\left\langle L_0^\infty - \frac{1}{2} \gamma_{jk} x_j x_k \right\rangle = -Q_1 f^{1/3} \epsilon$$

$$Q_1(\text{SC}) = -1.760, \quad Q_1(\text{BCC}) = -1.791, \quad Q_1(\text{FCC}) = -1.791$$

В [2] приведено выражение $\mathbf{F} = 6\pi\eta a V/Q$ для силы, действующей на неподвижную частицу при фильтрации. Можно показать, что $F_i = 4\pi H_i$. Подставляя H_i из (4.3) и учитывая линейную связь между V_i и U_i , получим, что в использованных обозначениях

$$Q = 1 + Q_1 \phi^{1/3} + \frac{\phi + (63\beta_2/8f - 35/32 - 315\beta_2^2/8f^2)\phi^2}{1 - \phi/2 + \phi^2/4} \tag{4.7}$$

Для рассматриваемых типов решеток Q задается выражениями:

$$\text{SC: } Q = 1 - 1.760\phi^{1/3} + \phi - 1.559\phi^2 + \dots$$

$$\text{BCC: } Q = 1 - 1.791\phi^{1/3} + \phi - 0.329\phi^2 + \dots$$

$$\text{FCC: } Q = 1 - 1.791\phi^{1/3} + \phi - 0.302\phi^2 + \dots$$

Эти выражения полностью совпадают с результатами [2], что доказывает корректность выбранного подхода.

Подставляя (4.6) в (4.5), получим

$$V_i = -\frac{K \partial P}{\eta \partial x_i}, \quad K = \frac{|B|(1 + \xi)}{4\pi\theta_1} = \frac{2a^2}{9\phi} Q$$

где Q определяется по формуле (4.7).

5. Сдвиговой поток. В отличие от фильтрационного потока, в данном случае функция U_i линейная и известна заранее: $U_i = C_{ij}x_j$. Чтобы \mathbf{u} , p удовлетворяли (1.1), P должно быть постоянной величиной. Условие (1.4) принимает вид

$$v_i + E_{ij}x_j = \omega_{ij}x_j, \quad |\mathbf{x}| = a$$

Здесь E_{ij} – тензор скоростей деформации, ω_{ij} – относительная скорость вращения частицы:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} + C_{ji}), \quad \omega_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{2}(C_{ij} - C_{ji})$$

Решение данной задачи есть сумма решений двух более простых, обозначенных как α и β . В задаче α решетка заморожена в жидкость

$$v_i + E_{ij}x_j = 0, \quad |\mathbf{x}| = a \quad (5.1)$$

В задаче β частицы вращаются относительно жидкости

$$v_i = \omega_{ij}x_j, \quad |\mathbf{x}| = a \quad (5.2)$$

Отсутствие внешнего момента описывается равенством [9]

$$B_{ij}^\alpha + B_{ij}^\beta = 0 \quad (5.3)$$

Из этого условия должна быть найдена неизвестная ω_{ij} .

Пусть сдвиг происходит в плоскости x_1x_2 вдоль прямой x_1 , тогда

$$C_{12} = \dot{\gamma} = 2E, \quad E_{12} = E_{21} = E, \quad \omega_{12} = -\omega_{21} = \omega$$

Остальные компоненты C_{ij} , E_{ij} , ω_{ij} равны нулю.

Любая решетка как геометрическое место точек имеет центр симметрии. Нечетная функция U_i также инвариантна относительно центральной симметрии. Поэтому вне зависимости от периодической конфигурации частиц условия (5.1), (5.2) инвариантны относительно точечной группы $\bar{2}$, т.е. в сдвиговом потоке v_i – нечетная функция \mathbf{x} , а p' – четная. Четность возмущений v_i и p' и в данном случае совпадает с четностью U_i и P .

Если взвешенные частицы образуют кубическую решетку, то прямая x_3 для крайних условий (5.1) есть ось второго порядка, а плоскости x_1x_2 и $x_1 = \pm x_2$ суть плоскости зеркальной симметрии. Это соответствует группе $m \cdot 2 : m$ (*mmm* в международной системе), которая может быть задана тензорами δ , \mathbf{a}_1^2 , \mathbf{a}_2^2 , \mathbf{e}_3^2 , где $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$.

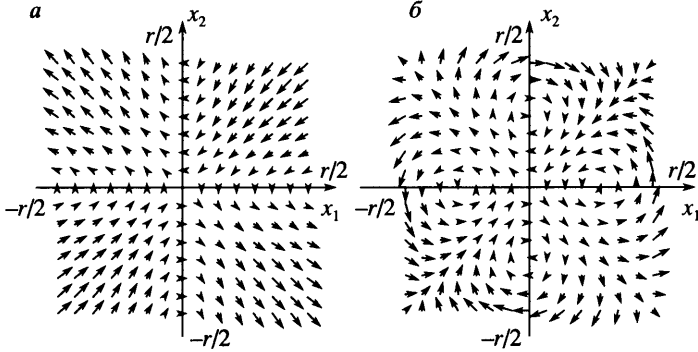
Вычисляя \mathbf{a}_1^2 , \mathbf{a}_2^2 , получим, что в системе координат, где ортами являются \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , базисный набор тензоров имеет вид

$$\delta, \quad \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{b}^2, \quad \mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$$

Свертки этих тензоров друг с другом не выводят за границы указанного набора: так, $b_i b_j I_{jk} = 0$, $I_{ij} I_{jk} = \delta_{ik} - b_i b_k$.

С помощью этого набора нельзя построить антисимметричный тензор второго ранга, т.е. $B_{ij}^\alpha = 0$. Отсюда $B_{ij}^\beta = 0$ и $\omega_{ij} = 0$. Таким образом, для кубических решеток достаточно рассмотреть лишь задачу α .

Из (5.1) следует, что v_1 нечетна по x_2 , а v_2 – по x_1 , поэтому F_{jk} , D_{ijkl} , P_{ijklms} должны содержать \mathbf{I} в нечетных степенях:



Фиг. 2. Проекции поля направлений на плоскость x_1, x_2 при сдвиговом потоке, $\epsilon = 0.25$, $x_1, x_2 \in [-r/2, r/2]$, $x_3 = r/2$; а – одиночная частица, б – частица в простой кубической решетке

$$F_{jk} = \eta \kappa_2 I_{jk}, \quad D_{ijkl} = \eta [\mu_{12} \delta_{i(j} I_{kl)} + \mu_{23} I_{i(j} b_k b_{l)} + \mu_{32} b_i b_{(j} I_{kl)}] \quad (5.4)$$

$$P_{ijklms} = \eta [\chi_{123} \delta_{i(j} I_{kl} b_m b_{s)} + \chi_{222} I_{i(j} I_{kl} I_{ms)} + \chi_{233} I_{i(j} b_k b_l b_m b_{s)} + \chi_{323} b_i b_{(j} I_{kl} b_m b_{s)}]$$

При этом условии (2.4) выполняется автоматически.

Подставляя (5.4) в (5.1), получим

$$\frac{\kappa_2}{E} = -\frac{5}{3} a^3 \left[1 + 10\beta_2 \epsilon^3 + \frac{28}{9} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \epsilon^5 + (10\beta_2 \epsilon^3)^2 \right]$$

$$\frac{\mu_{12}}{E} = \frac{a^5}{10} \left[1 + 10\beta_2 \epsilon^3 + \left(\frac{13}{2} \rho_5 - 105\rho_9^{2,2} + \frac{105}{2} \rho_{11}^{2,2,2} \right) \epsilon^5 + (10\beta_2 \epsilon^3)^2 \right]$$

$$\frac{\mu_{23}}{E} = \frac{21a^5}{4} (\rho_9^{2,2} - 7\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5, \quad \frac{\mu_{32}}{E} = -\frac{7a^5}{12} (\rho_5 - 24\rho_9^{2,2} + 63\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5$$

$$\frac{\chi_{123}}{E} = \frac{13}{2160} a^7 (\rho_5 - 33\rho_9^{2,2} + 126\rho_{11}^{2,2,2}) \epsilon^5$$

Остальные параметры равны нулю.

В случае сдвигового потока возмущение ограничено ячейкой Вигнера–Зейтца (фиг. 2).

Эффективная вязкость определяется как отношение среднего напряжения к скорости деформации в жидкости без частиц:

$$\eta^* = \frac{2\eta E_{12} + S_{12}/|B|}{2E_{12}} \quad (5.5)$$

Здесь S_{12} – компонент силового диполя. После вычислений получаем, что для кубической решетки

$$\eta^* = \eta \left\{ 1 + \frac{5}{2} \Phi \left[1 + 10 \frac{\beta_2}{f} \Phi + \left(10 \frac{\beta_2}{f} \Phi \right)^2 + \frac{14}{3} (\rho_5 - 15\rho_9^{2,2}) \left(\frac{\Phi}{f} \right)^{5/3} \right] \right\}$$

Тем самым обобщен результат, полученный ранее для простой кубической решетки [9].

6. Деформация решетки в сдвиговом потоке. При сдвиге решетка деформируется с течением времени, однако этот факт, как правило, не учитывается. Метод, развиваемый в настоящей работе, позволяет учесть изменение конфигурации частиц.

Пусть в момент времени $t = 0$ частицы образуют кубическую решетку, сдвиг по-прежнему осуществляется в направлении x_1 . Деформируясь, ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходит в базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{e}'_1(q) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2(q) = \mathbf{e}_2 + q\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_3(q) = \mathbf{e}_3, \quad q = \dot{\gamma}t$$

поэтому в выражениях (3.1) для векторов $\mathbf{r}_j(q)\mathbf{e}_j$ заменяются на \mathbf{e}'_j .

При $q \neq 0$ определяющими элементами симметрии решетки являются x_3 (ось второго порядка) и x_1x_2 (плоскость зеркальной симметрии), поэтому группа симметрии решетки $-2 : m$ совпадает с группами симметрии краевых условий (5.1), (5.2). В качестве тензорного базиса могут быть выбраны $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3^2$.

Поскольку деформированная решетка обладает более низкой симметрией, задача решена с меньшей точностью – до ϵ^4 . В этом приближении

$$\begin{aligned} p^i &= F_{jk}L_{jk} + D_{jklm}L_{jklm} \\ \eta v_i &= B_{ij}[L_j - \gamma_{jk}x_k] + \frac{3}{2}F_{jk}[M_{ijk} - \beta_{ijkl}x_l] - \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl} - \frac{1}{18}D_{jklm}L_{ijklm}|\mathbf{x}|^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Разложим тензоры по базису, используя свойства их симметрии и антисимметрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \eta \zeta_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{F} = \eta[\kappa_1\mathbf{e}_1^2 + \kappa_2\mathbf{e}_2^2 + \kappa_3\mathbf{e}_3^2 + \kappa_{12}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)] \\ \mathbf{D} &= \eta[\mu_{1111}\mathbf{e}_1^4 + \mu_{1112}\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^2) + \\ &+ \mu_{1122}\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1) + \dots + \mu_{3333}\mathbf{e}_3^4] \\ \boldsymbol{\gamma} &= \frac{2}{r^3}[\gamma_{11}^*\mathbf{e}_1^2 + \gamma_{22}^*\mathbf{e}_2^2 + \gamma_{33}^*\mathbf{e}_3^2 + \gamma_{12}^*(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)] \quad (6.2) \\ \boldsymbol{\beta} &= \frac{2}{r^3}[\beta_{1111}^*\mathbf{e}_1^4 + \beta_{1211}^*(\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^2)\mathbf{e}_1 + \\ &+ \beta_{2211}^*(\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2)\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_{3333}^*\mathbf{e}_3^4] \end{aligned}$$

Чтобы проследить за течением, необходимо вычислить значения $\gamma_{ij}^*, \beta_{ijkl}^*$ при любом значении q . Для уменьшения количества параметров, подлежащих вычислению, используются соотношения

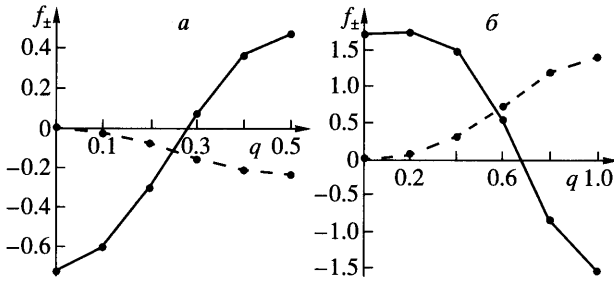
$$\gamma_{ii} = -\frac{4\pi}{|B|}, \quad \beta_{ijkk} = \frac{4\pi}{3|B|}\delta_{ij}$$

Значения $\zeta_{12}, \dots, \mu_{3333}$ в задачах α, β находятся аналогично тому, как это сделано выше. В частности,

$$\zeta_{12}^\alpha = 5a^3 E(\beta_{1122}^* - \beta_{2211}^*)\epsilon^3, \quad \zeta_{12}^\beta = -a^3 \omega[1 - (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*)\epsilon^3] \quad (6.3)$$

Мгновенную относительную скорость вращения можно найти, подставив (6.2) и (6.3) в (5.3)

$$\omega(q) = 5Ef_-(q)\epsilon^3, \quad f_-(q) = \beta_{1122}^* - \beta_{2211}^*$$



Фиг. 3. Графики функций $f_{\pm}(q)$, определяющие зависимости эффективной вязкости η^* и относительной скорости вращения от деформации решетки: простая кубическая (а), объемоцентрированная кубическая (б)

Для вычисления мгновенной эффективной вязкости воспользуемся (5.5) и найдем S_{12} . После упрощений

$$\eta^*(q) = \eta \left[1 + \frac{5}{2} \varphi \left(1 + \frac{5}{f} f_+(q) \varphi \right) \right], \quad f_+(q) = \beta_{1122}^* + \beta_{2211}^*$$

Значения f те же самые, что и для недеформированных решеток, так как при сдвиге объем ячейки V не меняется.

При выбранном направлении сдвига исходная конфигурация частиц периодически восстанавливается: существует такое значение q_0 , при котором $\mathbf{r}_j(q_0)$ выражаются через $\mathbf{r}_j(0)$ с целыми коэффициентами (и наоборот), поэтому достаточно рассмотреть поведение решетки при $q \in [0, q_0]$. Для простой кубической решетки $q_0 = 1$, для двух других решеток $q_0 = 2$.

Симметрия графиков $f_{\pm}(q)$ относительно $q_0/2$ (фиг. 3) объясняется тем, что значение $f_{\pm}(q)$ зависит лишь от конфигурации частиц, а не от направления их движения. Но конфигурации, соответствующие q и $q_0 - q$, получаются друг из друга путем зеркального отражения, что соответствует именно смене направления движения на противоположное, поэтому конфигурации эквивалентны, а графики симметричны.

Так как $f_{\pm}(q)$ может принимать и положительные, и отрицательные значения, мгновенное значение $\eta^*(q)$ может быть как больше вязкости суспензии невзаимодействующих частиц, так и меньше нее.

В качестве эффективной вязкости суспензии будем рассматривать среднее от $\eta^*(q)$ по отрезку $[0, q_0]$

$$\eta_{SC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi - 0.342\varphi^2), \quad \eta_{BCC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi + 1.358\varphi^2)$$

$$\eta_{FCC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi + 1.552\varphi^2)$$

Был рассмотрен также сдвиг кубической решетки в плоскости $x_1 = x_3$ в направлении $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Задача по-прежнему имеет группу симметрии $2 : m$, и в ортонормированном базисе $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$, \mathbf{e}_2 , $\mathbf{a}_3 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$ ее решение имеет вид, аналогичный (6.1), (6.2). Но так как конфигурации частиц отличаются от предыдущего случая, то и средняя эффективная вязкость также будет другой

$$\eta_{SC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi - 0.474\varphi^2), \quad \eta_{BCC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi + 2.157\varphi^2)$$

$$\eta_{FCC}^* \approx \eta(1 + 2.5\varphi + 0.853\varphi^2)$$

Таким образом, вязкость периодической суспензии зависит не только от начальной конфигурации частиц, но и от направления сдвига.

Заключение. Представленный метод решения задач о движении вязкой жидкости с периодической решеткой основан на мультипольном разложении скорости и описывает взаимодействие бесконечного числа частиц. Использование симметрии тензоров сводит число неизвестных к минимуму, поэтому метод не требует больших вычислительных затрат и легко реализуется в любой проблемно ориентированной системе.

Данным методом найдены возмущения скорости и давления в фильтрационном и сдвиговом потоках. Установлено, что эти возмущения не распространяются за границы ячейки Вигнера–Зейтца. Вычислены коэффициент фильтрации и вязкость суспензии с кубической решеткой.

При нахождении вязкости необходимо принимать во внимание периодическую деформацию решетки. Для каждой из трех кубических решеток эффективная вязкость найдена с точностью до квадратичных слагаемых для двух направлений сдвига, соответствующих одной и той же группе симметрии. Учет деформации приводит к тому, что для концентраций порядка 10% вязкость суспензии с простой кубической решеткой увеличивается на 2%, а вязкость суспензии с объемоцентрированной и гранецентрированной решетками – уменьшается на 1–2% по сравнению с недеформированной решеткой. Кроме того, учет деформации приводит к изменению вязкости суспензии при изменении направления сдвига.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 01-01-00435).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gray J.J., Bonnecaze R.T. Rheology and dynamics of sheared arrays of colloidal particles // J. Rheol. 1998. V. 42. № 5. P. 1121–1151.
2. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their applications to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt 2. P. 317–328.
3. Zick A.A., Homsy G.M. Stokes flow through periodic array of spheres // J. Fluid Mech. 1982. V. 115. P. 13–26.
4. Nunan K.C., Keller J.B. Effective viscosity of a periodic suspension // J. Fluid Mech. 1984. V. 142. P. 269–287.
5. Mo G., Sangani A.S. A method for computing Stokes flow interactions among spherical objects and its application to suspensions of drops and porous particles // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 5. P. 1637–1652.
6. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Englewood: Prentice–Hall, 1965 = Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
7. Hofman J.M.A., Clercx H.J.H., Schram P.P.J.M. Hydrodynamic interactions in colloidal crystals (I). General theory for simple and compound lattices // Physica A. 1999. V. 268. № 3–4. P. 326–352.
8. Мартынов С. И. Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 6. С. 48–54.
9. Мартынов С. И., Сыромясов А. О. Вязкость суспензии с кубической решеткой сфер в сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 3–14.
10. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
11. Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: 1976. Т. 1. С. 472–501.