

УДК 532.52.013.4: 551.513

© 2007 г. М.В. КАЛАШНИК

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В рамках линейного приближения исследована устойчивость течений вращающейся жидкости с горизонтальными сдвигами. Проведено разделение возмущений в сдвиговом потоке на три класса (симметричные, двумерные, пространственные) и для каждого класса получены достаточные условия устойчивости. Описана динамика возмущений в потоке с постоянным горизонтальным сдвигом, обнаружена алгебраическая неустойчивость потока относительно пространственных возмущений. Показано, что симметричные возмущения могут быть локализованы (захвачены) внутри слоя сдвига. Задача о нахождении инкрементов нарастания и частот захваченных волн сведена к квантово-механическому уравнению Шредингера. Получены точные решения для “треугольной” струи и гиперболического сдвига.

Ключевые слова: вращающаяся жидкость, сдвиговые течения, гидродинамическая неустойчивость, захваченные волны, уравнение Шредингера, дискретный и непрерывный спектры.

Устойчивость вращающихся сдвиговых течений – одна из центральных проблем геофизической гидродинамики. Соответствующая теория развита менее полно, чем классическая теория сдвиговой неустойчивости [1–3]. При исследовании устойчивости вращающихся течений нельзя ограничиться рассмотрением только двумерных возмущений, поскольку нет аналога теоремы Сквайра. Устойчивость вращающихся течений существенно зависит от взаимной ориентации сдвига и направления вращения [3, 4]. Еще одна важная особенность состоит в том, что во вращающейся жидкости в поле силы тяжести существуют собственные волновые движения – инерционно-гравитационные волны [5]. В устойчивых сдвиговых течениях эти волны могут быть захвачены (локализованы) внутри слоя сдвига [6]. В неустойчивом случае возможен временный экспоненциальный (алгебраический) рост волновых возмущений на фоне медленной эволюции других гидродинамических мод [7].

подавляющее большинство исследований устойчивости вращающихся сдвиговых течений выполнено в рамках упрощенных моделей, использующих квазигеострофическое приближение [8, 9]. Это приближение фильтрует быстрые волновые движения и пригодно лишь для течений с малыми значениями числа Россби (слабыми сдвигами). В настоящей работе устойчивость исследуется в рамках полной линеаризованной системы уравнений динамики.

1. Постановка задачи и уравнения для возмущений. Рассмотрим идеальную однородную жидкость, вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\Omega = \Omega \mathbf{k}$, $\Omega > 0$ вокруг вертикальной оси z . Во вращающейся системе координат движения жидкости описываются системой уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор скорости с компонентами u , v , w вдоль осей x , y , z соответственно, $f = 2\Omega$ – параметр Кориолиса, \mathbf{k} – вертикальный орт, p – редуцированное давление, включающее центробежную силу и потенциал массовых сил [10]. Систему (1.1) рассматриваем в области $-\infty < x < \infty$, $0 < z < H$, $-b < y < b$ (неограниченный канал прямоугольного

сечения) с условиями непротекания $w = 0$, $v = 0$ соответственно на горизонтальных $z = 0$, H и вертикальных $y = \pm b$ границах.

Исследуем устойчивость по линейному приближению точного решения системы (1.1)

$$\mathbf{u}_* = (U(y), 0, 0), \quad p = P(y), \quad fU = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (1.2)$$

описывающего направленное вдоль оси x сдвиговое течение, вызванное приложенным градиентом давления. Полагая в (1.1) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \mathbf{u}'$, $p = P + p'$, линейризованную систему уравнений динамики для возмущений запишем в покомпонентном виде (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + (U'(y) - f)v &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и далее штрихами обозначаем производные U по y .

В системе (1.3) относительное влияние горизонтального сдвига и вращения удобно характеризовать безразмерным параметром

$$R(y) = U'(y)/f \quad (1.4)$$

Этот параметр представляет собой отношение величины завихренности сдвигового течения $\text{rot} \mathbf{u}_* = -U'(y)\mathbf{k}$ к величине фоновой завихренности от вращения системы как целого $f\mathbf{k}$. Если $U'(y) < 0$ (циклонический сдвиг), фоновая и сдвиговая завихренности параллельны, если $U'(y) > 0$ (антициклонический сдвиг) – антипараллельны. Не только величина, но и знак $R(y)$ играют принципиальную роль в теории устойчивости вращающихся течений.

Систему (1.3) можно свести к одному уравнению для поперечной к потоку компоненты скорости v , используя вытекающее из (1.3) соотношение для давления

$$\Delta p = f\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2U'(y)\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.5)$$

где Δ – оператор Лапласа, а также уравнение для вертикальной компоненты завихренности

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (U'(y) - f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + U''(y)v \quad (1.6)$$

Действуя на второе уравнение (1.3) оператором Лапласа, получим уравнение

$$\frac{D}{Dt}\Delta v + f\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - U''(y)\frac{\partial v}{\partial x} + f\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = 0 \quad (1.7)$$

связывающее компоненты скорости u и v . Применяя далее к (1.7) оператор D/Dt и используя (1.6), после алгебраических преобразований получим основное уравнение теории устойчивости

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{D}{Dt}\Delta v - U''(y)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + f^2[1 - R(y)]\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8), по-видимому, впервые было получено Джонсоном [11], который рассматривал также другие оси вращения. В отсутствие сдвиговых течений оно сводится к уравнению Соболева

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta v + f^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

описывающему малые колебания вращающейся жидкости.

2. Классификация возмущений и критерии устойчивости. Тот факт, что коэффициенты уравнения (1.8) не зависят от координат x, z (однородных координат), позволяет разделить возмущения в сдвиговом потоке на три класса.

Возмущения, не зависящие от вертикальной координаты z , или двумерные возмущения. Для таких возмущений (1.8) сводится к уравнению

$$\frac{D}{Dt} \Delta_{\perp} v - U''(y) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

где Δ_{\perp} – оператор Лапласа по горизонтальным координатам. Это уравнение легко также вывести из соответствующего двумерного варианта системы (1.3). Функция тока $v = \partial \psi / \partial x$, $u = -\partial \psi / \partial y$ также удовлетворяет (2.1). Важная особенность следует из соотношения (1.5) для давления

$$\Delta_{\perp} p = f \left(\Delta_{\perp} \psi - 2R(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (2.2)$$

При $|R(y)| \ll 1$, из (2.2) имеем $p \sim f\psi$, соответственно $f\mathbf{u} \sim \mathbf{k} \times \nabla_{\perp} p$. Таким образом, при слабых сдвигах для двумерных возмущений имеет место баланс между силой Кориолиса и градиентом давления, т.е. они геострофические.

Отметим также, что общее решение системы (1.3) можно представить в виде разложения по вертикальным модам

$$(u, v, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, v_n, p_n) \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi}{H} z$$

Двумерным возмущениям в этом разложении отвечает мода с $n = 0$.

Возмущения, не зависящие от координаты x вдоль потока, или симметричные возмущения. Для симметричных возмущений $D/Dt \equiv \partial/\partial t$, и уравнение (1.8) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f^2 [1 - R(y)] \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнению (2.3) также удовлетворяет функция тока $v = -\partial \psi / \partial z$, $w = \partial \psi / \partial y$ в плоскости (y, z) . Отметим, что в симметричных возмущениях отличны от нуля все три компоненты скорости.

Пространственные или трехмерные возмущения. В этот, наиболее общий, класс включаются возмущения, зависящие от всех трех пространственных координат. Их поведение описывается уравнением (1.8).

В рамках предложенной классификации можно получить достаточные критерии устойчивости сдвигового потока относительно возмущений из каждого класса.

Рассмотрим вначале устойчивость относительно двумерных возмущений. Нетрудно видеть, что уравнение (2.1) совпадает с уравнением Рэлея классической теории устойчи-

востии сдвиговых неврашаающих течений [3] (под уравнением Рэля часто понимают спектральную форму (2.1)). Отсюда следует, что относительно двумерных возмущений поток устойчив, если отсутствуют точки перегиба: $U''(y) \neq 0$.

Рассмотрим теперь симметричные возмущения. Умножая уравнение (2.3) на $\partial u/\partial t$ и интегрируя по поперечному сечению канала $D = \{0 \leq z \leq H, -b \leq y \leq b\}$, получим закон сохранения "энергии"

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad E = \frac{1}{2} \iint_D [(v_{yt})^2 + (v_{zt})^2 + f^2(1 - R(y))(v_z)^2] dydz \quad (2.4)$$

где буквенными индексами обозначены производные по соответствующим координатам (этот закон выполняется также для функции тока ψ). Из (2.4) следует, что относительно симметричных возмущений сдвиговый поток устойчив, если всюду в D

$$R(y) = U'/f < 1 \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что условие (2.5) заведомо выполнено для течений с $U' < 0$ (циклонический сдвиг). Используя прямой метод Ляпунова, можно показать, что (2.5) есть достаточное условие нелинейной симметричной устойчивости (относительно возмущений конечной амплитуды) [12].

Некоторый достаточный критерий устойчивости относительно пространственных возмущений вида $v = \phi(y)\exp ik(x - ct)\cos mz$, $m = \pi n/H$, был получен Джонсоном [11] в рамках спектральной теории (рассматривались только пространственные возмущения)

$$J(y) \equiv \frac{1 - R(y)m^2}{R^2(y)k^2} > \frac{1}{4} \quad (2.6)$$

Критерий (2.6) достаточно груб, поскольку включает горизонтальное k и вертикальное m волновые числа возмущения. Еще один недостаток состоит в том, что спектральный подход не позволяет описать поведение симметричных возмущений с $k = 0$.

Выше были приведены достаточные критерии устойчивости. Аналогично [2, 13, 14] можно показать, что для симметричных и двумерных возмущений они необходимые и достаточные, т.е. нарушение их автоматически влечет неустойчивость.

Таким образом, неустойчивость сдвигового вращающегося течения может быть связана с нарастанием возмущений различных классов. Так, если профиль скорости не содержит точек перегиба, но нарушено условие (2.5), развиваются симметричные возмущения, наоборот; при выполнении (2.5) и наличии точки перегиба растут двумерные возмущения. Возможен также одновременный рост симметричных и двумерных возмущений. Детально описать поведение возмущений всех классов, включая пространственные, можно в случае потока с постоянным горизонтальным сдвигом.

3. Возмущения в потоке с постоянным горизонтальным сдвигом. Исследуем поведение возмущений в неограниченном потоке с постоянным горизонтальным сдвигом

$$U = Ay, \quad R = A/f = \text{const}$$

Рассмотрим вначале двумерные возмущения. Функция тока ψ этих возмущений удовлетворяет уравнению

$$\frac{D}{Dt} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + Ay \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.1)$$

решение которого с начальным условием $\psi = \psi_0 \sin(kx + ly)$, $t = 0$ имеет вид

$$\psi = \frac{\psi_0(k^2 + l^2)}{k^2 + (l - Akt)^2} \sin(kx + (l - Akt)y) \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что при $t \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 0$, т.е. относительно двумерных возмущений поток с постоянным горизонтальным сдвигом всегда устойчив.

Рассмотрим симметричные возмущения. Отыскивая решение уравнения (2.3) в виде $v = \exp(\kappa t)\cos(l y)\cos(m z)$, $m = \pi n/H$, для инкремента нарастания κ получим

$$\kappa^2 = \frac{f^2 m^2}{m^2 + l^2}(R - 1) \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что относительно симметричных возмущений поток неустойчив, если $R > 1$. Этот результат согласуется с общим анализом из раздела 2.

Перейдем теперь к рассмотрению пространственных возмущений, поведение которых описывается уравнением

$$\frac{D^2}{Dt^2}\Delta v + f^2(1 - R)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4)$$

Для построения решений этого уравнения используем так называемый немодальный подход [2, 15], основанный на переходе в уравнении к полулагранжевой системе координат, связанной в каждой точке с потоком

$$t_1 = t, \quad x_1 = x - Ayt, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \quad (3.5)$$

В новых переменных уравнение (3.4) записывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - At_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 v \right] + f^2(1 - R)\frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} = 0 \quad (3.6)$$

Поскольку коэффициенты (3.6) зависят только от времени, его решение ищем в виде

$$v = v(t_1)\cos(kx_1 + ly_1)\cos(mz_1) \quad (3.7)$$

После подстановки (3.7) в (3.6) для амплитуды $v(t)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение (время обозначаем через t)

$$\frac{d^2}{dt^2} [k^2 + m^2 + (l - Akt)^2] v(t) + f^2(1 - R)m^2 v(t) = 0 \quad (3.8)$$

Решения для компонент скорости u , w ищем в аналогичной форме

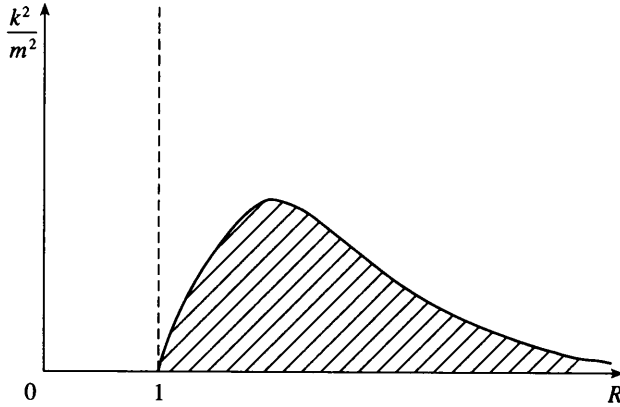
$$u = u(t)\cos(kx_1 + ly_1)\cos(mz_1) \quad w = w(t)\sin(kx_1 + ly_1)\sin(mz_1) \quad (3.9)$$

Из уравнения (1.7) и уравнения неразрывности, записанных в новых переменных, найдем связь между амплитудами

$$u(t) = -\frac{1}{f(k^2 + m^2)} \left[\frac{d}{dt} a^2(t) v(t) + fk(l - Akt)v(t) \right] \quad (3.10)$$

$$w(t) = \frac{1}{m} [ku(t) + (l - Akt)v(t)]$$

где для краткости обозначено $a^2(t) = k^2 + m^2 + (l - Akt)^2$. Отметим, что в физических переменных каждое из выражений (3.7), (3.9) описывает гармоническое возмущение с переменной амплитудой и фазой $\theta = kx + (l - Akt)y$, например $v = v(t)\cos[kx + (l - Akt)y]\cos(mz)$. С течением времени линии равной фазы вращаются вокруг оси x , занимая при $t \rightarrow \infty$ положение, параллельное потоку.



Фиг. 1. Область неустойчивости $R > 1$ на плоскости параметров (k^2, R) . Внутри заштрихованной подобласти, задаваемой неравенством (3.14), растут все три компоненты скорости

Исследуем поведение решения уравнения (3.8) на больших временах. При $t \rightarrow \infty$ в коэффициенте (3.8) можно пренебречь константами по сравнению с членами, пропорциональными t

$$\frac{d^2}{dt^2} t^2 v(t) + J v(t) = 0, \quad J = \frac{1 - Rm^2}{R^2 k^2} \quad (3.11)$$

Решение (3.11) записывается в виде $u(t) = C_1 t^{\zeta_1} + C_2 t^{\zeta_2}$, где $\zeta_{1,2}$ – корни уравнения

$$\zeta^2 + 3\zeta + J + 2 = 0 \quad (3.12)$$

Эти корни действительны при $J < 1/4$, комплексны при $J > 1/4$. Если $R < 1 (J > 0)$, действительные части корней ζ_1, ζ_2 отрицательны, и все решения затухают (осциллируя при $J > 1/4$, монотонно при $J < 1/4$). В случае $R > 1 (J < 0)$ максимальный из действительных корней $\zeta_1 = (-3 + \sqrt{1 - 4J})/2 > 0$ при $J < -2$. Амплитуда $u(t)$ при этом растет степенным образом $u(t) \sim t^{\zeta_1}$, т.е. имеет место неустойчивость. Неравенство $J < -2$ можно записать в виде

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2 < \frac{R-1}{2R^2} \quad (3.13)$$

При фиксированном m оно задает область на плоскости параметров (k^2, R) , внутри которой $u(t)$ растет (фиг. 1). На первый взгляд кажется, что граница этой области – кривая нейтральной устойчивости. В действительности это не так: из выражений (3.10) следует, что при $t \rightarrow \infty u(t), w(t) \sim t^{\zeta_1 + 1}$. Легко проверить, что $\zeta_1 + 1 > 0$ при $R > 1$. Таким образом, неустойчивость имеет место для всех $R > 1$. Внутри заштрихованной области на фиг. 1 растут все три компоненты скорости, выше нее компоненты u, w растут, а v затухает. Подчеркнем, что в отличие от симметричных возмущений при $R > 1$ пространственные возмущения нарастают степенным образом. Неустойчивость относительно пространственных возмущений носит алгебраический характер.

4. Вырождение возмущений при слабых сдвигах. Выше исследовано поведение пространственных возмущений в асимптотике на больших временах. Асимптотические решения, справедливые и на конечных временных промежутках, можно построить в случае $|R| \ll 1$, характерном для гладких геофизических течений синоптического масштаба (см. ниже). В этом случае пространственные и двумерные возмущения затухают; предвостяет интерес сравнение характерных скоростей затухания.

Для построения решений уравнения (3.8) в случае $|R| \ll 1$ используем метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [16]. Перейдем в (3.8) к независимой переменной $\tau = |A|t$ (медленное время) и определим новую зависимую переменную $q(\tau) = [k^2 + m^2 + (l - \delta k\tau)^2]u(\tau)$, $\delta = \text{sign} A$. Для функции $q(\tau)$ получим уравнение с большим параметром

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \lambda^2 \omega^2(\tau)q = 0 \tag{4.1}$$

$$\omega^2(\tau) = \frac{m^2}{k^2 + m^2 + (l - \delta k\tau)^2}, \quad \lambda^2 = \frac{1 - R}{R^2} \gg 1$$

В первом приближении общее решение (4.1) записывается в виде

$$q(\tau) = \frac{C}{\sqrt{\omega(\tau)}} \cos \theta(\tau), \quad \theta(\tau) = \lambda \int_0^\tau \omega(s) ds + \theta_0 \tag{4.2}$$

где $C > 0$, θ_0 – начальные амплитуда и фаза. Из (4.2) для амплитуды $u(\tau)$ найдем

$$u(\tau) = Cm^{-2} \omega^{3/2}(\tau) \cos \theta(\tau) \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в соотношения (3.10), найдем соответствующие амплитуды $u(\tau)$, $w(\tau)$. С точностью до слагаемых $O(R)$

$$u(\tau) = \frac{C\sqrt{\omega(\tau)} \sin \theta(\tau) - k(l - \delta k\tau)u(\tau)}{k^2 + m^2} \tag{4.4}$$

$$w(\tau) = \frac{Ck\sqrt{\omega(\tau)} \sin \theta(\tau) + m^2(l - \delta k\tau)u(\tau)}{m(k^2 + m^2)}$$

Используя (4.3), (4.4), получим выражение для кинетической энергии пространственных возмущений

$$E = \frac{1}{2} \{u^2 + v^2 + w^2\} = \frac{1}{8} (u^2(\tau) + v^2(\tau) + w^2(\tau))$$

(фигурные скобки здесь означают осреднение по длине волны и толщине слоя). Поскольку в (4.3), (4.4) входит быстро осциллирующий компонент, наибольший интерес представляет не сама энергия, а ее осредненное значение $\langle E \rangle$, где угловые скобки означают осреднение по периоду быстрых временных осцилляций. Имеем $\langle u(\tau) \rangle^2 = C^2 \omega(\tau)^3 / 2m^4$. Вычисляя отдельно $\langle u^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$ и складывая, для осредненной энергии получаем простое выражение

$$\langle E \rangle = C_1 \omega(\tau), \quad C_1 = \frac{C^2}{8m^2(k^2 + m^2)} \tag{4.5}$$

показывающее, что при $|R| \ll 1$ величина $\langle E \rangle$ – адиабатический инвариант: $\langle E \rangle / \omega(\tau) = \text{const}$. Из (4.5) следует, что на больших временах осредненная энергия пространственных возмущений затухает как t^{-1} .

Для сравнения приведем выражение для энергии двумерных возмущений $E = 0.5 \{ \psi_x^2 + \psi_y^2 \}$. С использованием явного выражения (3.2) для функции тока, найдем

$$E = \frac{E_0(k^2 + l^2)}{k^2 + (l - Akt)^2} \quad (4.6)$$

где E_0 – начальная энергия. Из (4.6) следует, что E затухает как t^{-2} , т.е. быстрее, чем энергия пространственных возмущений. Таким образом, при $|R| \ll 1$ в сдвиговом потоке выживают лишь симметричные возмущения, представляющие собой модифицированные сдвигом инерционные волны (дисперсионное соотношение для них получается заменой k на $i\omega$ в (3.3)). Их энергия постоянна.

В завершение этого раздела приведем характерные значения абсолютной величины параметра $R = A/f$ для атмосферных и океанических течений в средних широтах ($f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$). Для гладких атмосферных течений синоптического масштаба $L = 10^3 \text{ км}$ с характерной скоростью $U = 10 \text{ м/с}$ горизонтальный сдвиг $A = U/L = 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, соответственно $R = 0.1$. Значение R может быть существенно выше в районе струйных течений, связанных с фронтами, где характерный скачок скорости $U = 30 \text{ м/с}$ достигается на масштабах $L = 100 \text{ км}$ [8]. В этом случае $A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, соответственно $R = 3$. Аналогично для синоптических вихрей в океане ($L = 50 \text{ км}$, $U = 5 \text{ см/с}$) $R = 10^{-2}$; это значение может быть существенно выше в районе струйных течений. Из приведенных оценок, в частности, следует, что как в океане, так и в атмосфере могут наблюдаться ситуации, благоприятные для развития симметричной неустойчивости.

5. Симметричные возмущения в геострофической струе и свободном слое сдвига.

В данном разделе рассматриваются неограниченные течения, описывающие свободный слой сдвига и геострофическую струю. Показано, что симметричные возмущения в этих течениях могут быть захвачены (локализованы) внутри слоя сдвига. В неустойчивых течениях эти возмущения экспоненциально нарастают, в устойчивых течениях (при выполнении условия (2.5)) – осциллируют с постоянной частотой и представляют собой так называемые захваченные волны [6]. Существование захваченных волн – один из наиболее ярких феноменов, не имеющих аналога в невращающейся жидкости.

Далее в этом разделе будем представлять сдвиговое течение в виде $U = U_0 V(x/L)$, где U_0 – амплитуда, L – горизонтальный масштаб течения. При этом $R(y) = \text{Ro} V'(y/L)$, где $\text{Ro} = U_0/fL$ – обычное число Россби [8]. Для описания симметричных возмущений используем безразмерную форму уравнения (2.3), принимая в качестве масштабов t , y , z соответственно f^{-1} , L , H

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\frac{H}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + [1 - \text{Ro} V'(y)] \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

безразмерные переменные обозначаем теми же символами.

Рассмотрим вначале свободный слой сдвига – течение, описывающее гладкий монотонный переход между двумя постоянными предельными значениями скорости на $\pm\infty$. Для этого течения $V(\pm\infty) = 0$, без ограничения общности можно считать, что $V'(y)$ – четная функция с максимальным по модулю значением $\max|V'| = |V'(0)| = 1$. В анализе вращающегося слоя сдвига следует различать два случая: антициклонический сдвиг $V' > 0$ и циклонический сдвиг $V' < 0$. Антициклонический сдвиг симметрично неустойчив, если $\text{Ro} V'(0) \equiv \text{Ro} > 1$. Полагая в (5.1) $v = \exp(\kappa t) \cos(\pi m z) \phi(y)$, $m = 1, 2, \dots$ – номер вертикальной моды, для $\phi(y)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} [\text{Ro} V' - 1 - \kappa^2] \phi = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\pi m L}{H} \right)^2 \quad (5.2)$$

которое вместе с краевыми условиями $\phi(\pm\infty) = 0$ определяет спектральную задачу для нахождения инкремента нарастания κ .

Если $Ro V'(0) < 1$, что всегда выполняется для циклонического сдвига, экспоненциально нарастающих решений не существует. В этом случае решение (5.1) можно искать в форме $v = \exp(i\omega t)\cos(\pi m z)\varphi(y)$, описывающей волновые возмущения, осциллирующие с частотой ω . Уравнение для $\varphi(y)$ получается из (5.2) заменой k на $i\omega$

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{\omega^2}[-Ro V' + 1 - \omega^2]\varphi = 0 \tag{5.3}$$

В отличие от (5.2) для уравнения (5.3) на бесконечности ставится условие ограниченности решения.

Оба уравнения (5.2), (5.3) можно записать в форме уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{1}{h}[E - U(y)]\varphi = 0 \tag{5.4}$$

описывающего движение частицы в поле с потенциалом $U(y)$ (ниже через $U(y)$ обозначается только потенциал). При этом для неустойчивых возмущений $h = \kappa^2/\lambda^2$, $E = -\kappa^2$, $U(y) = 1 - Ro V'(y)$. Для волновых возмущений $h = \omega^2/\lambda^2$, $E = -\omega^2$, $U(y) = Ro V'(y) - 1$. В качестве спектрального параметра выступают k или частота ω . Характерная особенность уравнения Шредингера – наличие точек поворота y_1, y_2 , при переходе через которые коэффициент при φ меняет знак. Эти точки находятся из уравнения $U(y) = E$. Если потенциал $U(y)$ имеет минимум, решения (5.4) осциллируют во внутренней области $E - U(y) > 0$ и экспоненциально затухают в области $E - U(y) < 0$. Подобные решения, захваченные слоем сдвига, аналогичны связанным состояниям в квантовой механике; им отвечает дискретный спектр уравнения Шредингера. График потенциала $U(y)$ для неустойчивых возмущений в случае антициклонического сдвига $V' > 0$ приведен на фиг. 2, а. Видно, что при $Ro > 1$ инкременты нарастания возмущений лежат в интервале $0 < \kappa < \sqrt{Ro - 1}$. Легко проверить, что для волновых возмущений потенциал $U(y)$ имеет максимум, т.е. в случае антициклонического сдвига захваченных волн нет. Из соответствующего графика на фиг. 2, б следует, что в случае циклонического сдвига $V' < 0$ возможны захваченные волны, причем их частоты, принадлежащие дискретному спектру, лежат в интервале $1 < \omega < \sqrt{Ro + 1}$. Обратим внимание, что в размерных единицах частоты захваченных волн превосходят инерционную частоту f . Помимо дискретного спектра в этом случае у уравнения Шредингера существует и непрерывный спектр, образованный значениями $\omega < 1$. Каждое такое значение дважды вырожденное – ему отвечают два решения (5.3), описывающие волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

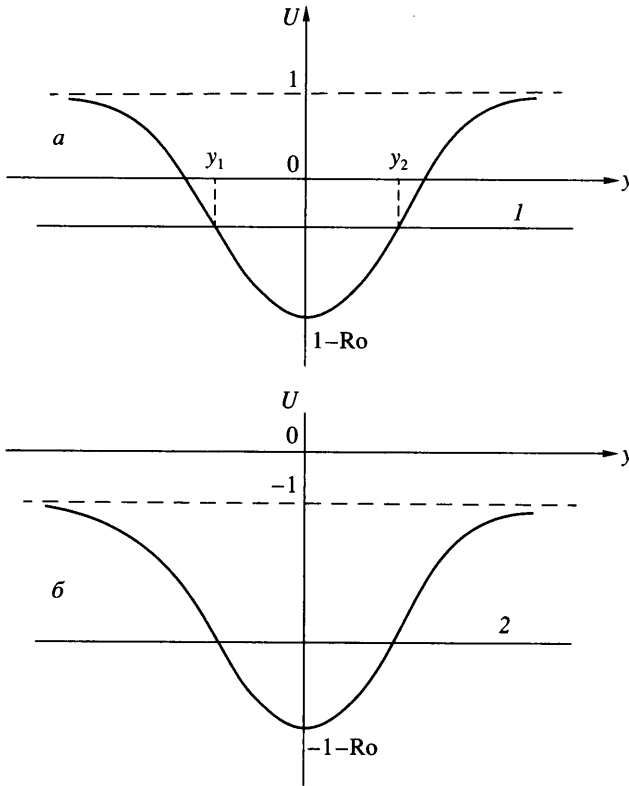
В случае $\lambda^2 \gg 1$ (горизонтальный масштаб течения много больше толщины слоя) для нахождения дискретного спектра уравнения Шредингера можно использовать квазиклассическое приближение [17]. В этом приближении инкременты неустойчивых возмущений находятся из уравнения

$$\lambda \int_{y_1(\kappa)}^{y_2(\kappa)} \sqrt{Ro V' - 1 - \kappa^2} dy = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \kappa \tag{5.5}$$

справедливого при $\lambda \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \lambda/n \rightarrow \text{const}$. Уравнение (5.5) – аналог правила квантования Бора–Зоммерфельда. При конечных λ и малых инкрементах $\kappa \rightarrow 0$ имеет место более простая явная формула

$$\kappa = \lambda \pi^{-1} (n + 0.5)^{-1} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{Ro V' - 1} dy$$

где z_1, z_2 – корни $Ro V' = 1, n \rightarrow \infty$.



Фиг. 2. Графики потенциалов $U(y)$: a – для неустойчивых возмущений в случае антициклонического сдвига, b – для волновых возмущений (захваченных волн) в случае циклонического сдвига; горизонтальные прямые $1, 2 - E = -\kappa^2, E = -\omega^2$

Частоты захваченных волн находятся из аналогичного уравнения

$$\lambda \int_{y_1(\omega)}^{y_2(\omega)} \sqrt{-\text{Ro} V' + 1 - \omega^2} dy = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (5.6)$$

В силу ограничения $\omega > 1$ существует лишь конечное число N собственных частот. Из (5.6) следует, что это число (число связанных состояний) удовлетворяет неравенству

$$N \leq \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-\text{Ro} V' dy} - \frac{1}{2}$$

Как и в задачах квантовой механики, можно построить точные решения уравнения Шредингера (5.4) для некоторых потенциалов $U(y)$. В качестве примера рассмотрим антициклонический сдвиг

$$V(y) = \text{th} y$$

Уравнение (5.2) принимает вид

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} \left[\frac{\text{Ro}}{\text{ch}^2 y} - 1 - \kappa^2 \right] \phi = 0 \quad (5.7)$$

Замена переменных

$$s = \operatorname{th} y, \quad \varphi = (1 - s^2)^{\beta/2} q \quad (5.8)$$

приводит (5.7) к гипергеометрическому уравнению

$$(1 - s^2) \frac{d^2 q}{ds^2} - 2(\beta + 1)s \frac{dq}{ds} + (\gamma^2 - \beta^2 - \beta)q = 0 \quad (5.9)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\kappa^2} + \lambda^2}, \quad \gamma^2 = \operatorname{Ro} \frac{\lambda^2}{\kappa^2}$$

Ограниченные при $s = \pm 1$ решения (5.9) (в виде полиномов) существуют, если выполнено соотношение [18]

$$\gamma^2 - \beta^2 - \beta = 2n(1 + \beta) + n(n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

из которого находятся значения инкрементов. С учетом $\gamma^2 = \operatorname{Ro}(\beta^2 - \lambda^2)$ соотношение (5.10) сводится к квадратному уравнению

$$(\operatorname{Ro} - 1)\beta^2 - (2n + 1)\beta - [\operatorname{Ro}\lambda^2 + n(n + 1)] = 0 \quad (5.11)$$

Для любого $\operatorname{Ro} > 1$ уравнение (5.11) имеет неотрицательный корень

$$\beta = \frac{n + 1/2 + \sqrt{D}}{\operatorname{Ro} - 1}, \quad D = (n + 1/2)^2 + (\operatorname{Ro} - 1)[\operatorname{Ro}\lambda^2 + n(n + 1)] \quad (5.12)$$

Поскольку $\kappa^2 = \lambda^2/(\beta^2 - \lambda^2)$, для инкрементов κ отсюда найдем

$$\kappa = \kappa_n = \frac{\lambda(\operatorname{Ro} - 1)}{\sqrt{(n + 1/2 + \sqrt{D})^2 - \lambda^2(\operatorname{Ro} - 1)^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Максимальное значение κ отвечает $n = 0$

$$\kappa_{\max} = \frac{\lambda(\operatorname{Ro} - 1)}{\sqrt{(1/2 + \sqrt{1/4 + \operatorname{Ro}(\operatorname{Ro} - 1)\lambda^2})^2 - \lambda^2(\operatorname{Ro} - 1)^2}} \quad (5.14)$$

При $\lambda \gg 1$ из (5.14) следует $\kappa_{\max} \sim \sqrt{\operatorname{Ro} - 1}$.

Собственные функции, отвечающие собственным значениям (5.13), выражаются через полиномы Якоби $P_n^{(\beta, \beta)}(s)$ [18]. С точностью до множителя

$$\varphi_n(y) = (1 - s^2)^{\beta/2} P_n^{(\beta, \beta)}(s)$$

$$\beta = \beta_n = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\kappa_n^2} + \lambda^2}, \quad s = \operatorname{th} y \quad (5.15)$$

$$P_n^{(\beta, \beta)}(s) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - s^2)^{-\beta} \frac{d^n}{ds^n} [(1 - s^2)^{n + \beta}]$$

Наиболее быстро растущему возмущению ($n = 0$) отвечает четная собственная функция, не имеющая нулей: $\varphi_0(y) = 1/\operatorname{ch}^{\beta_0} y$ (при $\lambda \gg 1$ $\beta_0 \sim \lambda \sqrt{\operatorname{Ro}/(\operatorname{Ro} - 1)}$). Значению $n = 1$

соответствует нечетная собственная функция $\varphi_1(y) = \text{th } y / \text{ch}^{\beta_1} y$ с нулем при $y = 0$. Собственная функция $\varphi_n(y)$ имеет ровно n нулей на числовой прямой.

Аналогичным образом находятся частоты захваченных волн в случае циклонического сдвига $V(y) = -\text{th } y$. Уравнение (5.3) записывается в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{\omega^2} \left[\frac{\text{Ro}}{\text{ch}^2 y} + 1 - \omega^2 \right] \varphi = 0 \quad (5.16)$$

Замена переменных (5.8) приводит (5.16) к гипергеометрическому уравнению (5.9), где теперь

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}}, \quad \gamma^2 = \text{Ro} \frac{\lambda^2}{\omega^2}$$

С учетом $\gamma^2 = \text{Ro}(\lambda^2 - \beta^2)$ соотношение (5.10), определяющее значения ω , сводится к квадратному уравнению

$$(\text{Ro} + 1)\beta^2 + (2n + 1)\beta + [n(n + 1) - \text{Ro}\lambda^2] = 0$$

с максимальным корнем

$$\beta = \frac{\sqrt{D} - (n + 1/2)}{\text{Ro} + 1}, \quad D = (n + 1/2)^2 - (\text{Ro} + 1)[n(n + 1) - \text{Ro}\lambda^2] \quad (5.17)$$

Этот корень неотрицателен, если $n(n + 1) - \text{Ro}\lambda^2 < 0$ или

$$n < \sqrt{\text{Ro}\lambda^2 + 1/4} - 1/2$$

Таким образом, возможно лишь конечное число собственных значений ω (число связанных состояний). Поскольку $\omega^2 = \lambda^2/(\lambda^2 - \beta^2)$, из (5.17) найдем

$$\omega = \omega_n = \frac{\lambda(\text{Ro} + 1)}{\sqrt{\lambda^2(\text{Ro} + 1)^2 - (\sqrt{D} - n - 1/2)^2}} \quad (5.18)$$

Значения (5.18) удовлетворяют неравенству $1 < \omega < \sqrt{\text{Ro} + 1}$. При $\lambda \gg 1$ максимальное значение $\omega_{\text{max}} = \omega_0 \sim \sqrt{1 + \text{Ro}}$. Собственные функции, описывающие структуру захваченных волн, определяются выражениями (5.15) с соответствующими значениями β . Подчеркнем, что захваченные волны существуют лишь в случае циклонического сдвига, причем их частота превосходит (в размерных переменных) инерционную частоту $f(\omega > 1)$.

Помимо свободного слоя сдвига большой интерес в связи с геофизическими приложениями представляют струйные течения. Течение в симметричной струе интересно также тем, что в нем одновременно существуют области с циклоническим и антициклоническим сдвигами. Из результатов анализа свободного слоя сдвига следует, что в неустойчивой струе (при нарушении условия (2.6)) растущие возмущения будут захвачены (локализованы) в области с антициклоническим сдвигом $V' > 0$; наоборот, в устойчивой струе возможно существование захваченных волн в области с циклоническим сдвигом $V' < 0$. В качестве простого примера рассмотрим "треугольную" струю

$$V = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| \geq 1 \end{cases}$$

которая симметрично неустойчива при $\text{Ro} > 1$ и устойчива при $\text{Ro} < 1$. Рассмотрим вначале неустойчивый случай $\text{Ro} > 1$. Для треугольной струи уравнение (5.2) сводится к

уравнениям с постоянными коэффициентами в каждой из четырех областей: I) $y \geq 1$, II) $0 \leq y \leq 1$ (область циклонического сдвига), III) $-1 \leq y \leq 0$, (область антициклонического сдвига), IV) $y \leq -1$. Обозначим

$$\alpha = \sqrt{r^2 + \lambda^2}, \quad \beta = \sqrt{(Ro + 1)r^2 + \lambda^2}, \quad \gamma = \sqrt{(Ro - 1)r^2 - \lambda^2}, \quad r = \lambda^2/\kappa^2$$

Решение (5.2) ищем в виде $\varphi = C_1 \exp(-\alpha y)$ в области I, $\varphi = C_2 \operatorname{ch} \beta y + C_3 \operatorname{sh} \beta y$ в области II, $\varphi = C_4 \cos \gamma y + C_5 \sin \gamma y$ в области III, $\varphi = C_6 \exp(\alpha y)$ в области IV. С использованием (1.5) показывается, что для симметричных возмущений условие непрерывности давления при переходе через границу указанных областей сводится к условиям непрерывности $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$. Выписывая соответствующие условия, получим систему однородных уравнений относительно констант C_i . Условие совместности этой системы приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\gamma(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{th} \beta + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha(\gamma^2 - \beta^2) \operatorname{th} \beta + \beta(\gamma^2 - \alpha^2)} \quad (5.19)$$

из которого находятся инкременты κ . Выражая α , β через γ , уравнение (5.19) можно записать в виде $\operatorname{tg} \gamma = \Phi(\gamma)$. Графический анализ этого уравнения показывает, что оно имеет счетное число корней $\gamma_n > 0$, которым отвечают инкременты $\kappa_n^2 = (Ro - 1)\lambda^2/(\lambda^2 + \gamma_n^2)$.

В устойчивом случае $Ro < 1$ решение уравнения (5.3) для захваченных волн ищется аналогично. Обозначая

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 - r}, \quad \beta = \sqrt{(Ro + 1)r - \lambda^2}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 - (1 - Ro)r}, \quad r = \lambda^2/\omega^2$$

полагаем $\varphi = C_1 \exp(-\alpha y)$ в области I, $\varphi = C_2 \cos \beta y + C_3 \sin \beta y$ в области II, $\varphi = C_4 \operatorname{ch} \gamma y + C_5 \operatorname{sh} \gamma y$ в области III, $\varphi = C_6 \exp(\alpha y)$ в области IV. Из условий непрерывности $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$ на границах областей, получим уравнение

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\beta(\gamma^2 + \alpha^2) \operatorname{th} \gamma + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha(\beta^2 - \gamma^2) \operatorname{th} \gamma + \gamma(\beta^2 - \alpha^2)}$$

которое можно записать в виде $\operatorname{tg} \beta = \Phi(\beta)$, выразив α , γ через β . Поскольку $\omega^2 = (Ro + 1)\lambda^2/(\lambda^2 + \beta^2)$ и $\omega^2 > 1$, параметр β должен удовлетворять неравенству $0 < \beta < \lambda\sqrt{Ro}$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число корней β , т.е. конечное число частот ω . Обратим внимание, что в случае $Ro > 1$ решение имеет осциллирующий характер в области III (антициклонический сдвиг), в случае $Ro < 1$ – в области II (циклонический сдвиг).

Отметим следующее важное обстоятельство. В невращающейся жидкости и треугольная струя, и свободный слой сдвига неустойчивы относительно двумерных возмущений [1, 3]. Отсюда следует, что во вращающейся жидкости они неустойчивы относительно возмущений, не зависящих от координаты z . Как показано выше, развитие этой неустойчивости сопровождается либо развитием симметричной неустойчивости (при $R(y) > 1$), либо формированием захваченных симметричных волн (в рамках линейной теории симметричные и двумерные возмущения не взаимодействуют). Вопрос о финальной стадии подобного комбинированного процесса остается открытым; видимо, здесь необходимы численные нелинейные исследования.

Заключение. В рамках линейного приближения исследована устойчивость течений вращающейся жидкости с горизонтальными сдвигами. Проведено разделение возмуще-

ний в сдвиговом потоке на три класса (симметричные, двумерные, пространственные), для каждого класса получены достаточные условия устойчивости. Показано, что течения с постоянным циклоническим сдвигом всегда устойчивы; в течении с антициклоническим сдвигом симметричные возмущения нарастают экспоненциально, а пространственные – алгебраически. Исследована структура неустойчивых симметричных возмущений и захваченных волн в течениях, описывающих геострофическую струю и свободный слой сдвига. Задача о нахождении инкрементов нарастания и частот захваченных волн сведена к квантово-механическому уравнению Шредингера. Получены точные решения для треугольной струи и гиперболического сдвига.

Автор признателен проф. В. Цейтлину (V. Zeitlin) за возможность ознакомления с работой [6], Л.Х. Ингелло – за помощь в работе. Работа выполнена при поддержке МНТЦ (проект G-1217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
2. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 107 с.
3. Schmid P.J., Henningson D.S. Stability and Transition in Shear Flows. N.Y.: Springer, 2001. 556 p.
4. Tritton D.J., Davies P.A. Instabilities in geophysical hydrodynamics // Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence / Ed. Swinney H.L., Gollub J.P. Berlin etc.: Springer, 1981 = Триттон Д.Дж., Дэвис П.А. Неустойчивости в геофизической гидродинамике. В сб. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Суинни Х., Голлаба Дж. М.: Мир, 1984. С. 271–316.
5. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
6. Plougonven R., Zeitlin V. Lagrangian approach to geostrophic adjustment of frontal anomalies in a stratified fluid // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 2005. V. 99. P. 101–135.
7. Калашник М.В., Мамацашвили Г.Р., Чагелишвили Г.Д., Ломинадзе Д.Г. Динамика несимметричных возмущений в геострофическом потоке с постоянным горизонтальным сдвигом // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 5. С. 687–692.
8. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. N.Y. etc.: Springer, 1987. = Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 2. М.: Мир, 1984. 811 с.
9. Дымников В.П., Филатов А.Н. Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 235 с.
10. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 304 с.
11. Johnson J.A. The stability of shearing motion in a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. Pt 3. P. 337–352.
12. Калашник М.В., Свиркунов П.Н. О симметричной устойчивости состояний циклоклострофического и геострофического баланса в стратифицированной среде // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 811–813.
13. Ooyama K. On the stability of the baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 1. P. 43–53.
14. Свиркунов П.Н. Об условиях симметричной неустойчивости вихревых движений идеальной стратифицированной жидкости // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 996–1001.
15. Калашник М. В., Ломинадзе Д.Г., Чагелишвили Г. Д. Линейная динамика возмущений в течениях с постоянным горизонтальным сдвигом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 6. С. 25–37.
16. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1987. 400 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
18. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.