

УДК 532.546:537.363

© 2007 г. В.М. ЕНТОВ, Е.М. ЧЕХОНИН

О РАСЧЕТАХ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО ПРИТОКА К ТРЕЩИНАМ ГИДРОРАЗРЫВА

Рассматривается плоское фильтрационное течение в окрестности трещины гидроразрыва под действием приложенной разности потенциалов между скважиной – стоком и внешним электродом. Решается задача о расчете электрического поля и вызванного им фильтрационного течения с учетом конечности электрического и гидравлического сопротивления трещины. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений для распределения плотностей гидравлических и электрических стоков вдоль трещины, которые решаются численно, после чего легко восстанавливаются все представляющие интерес параметры. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние сопротивления трещины на величину и распределение электроосмотического потока.

Ключевые слова: электроосмос, трещина гидроразрыва, ремедиация грунтов.

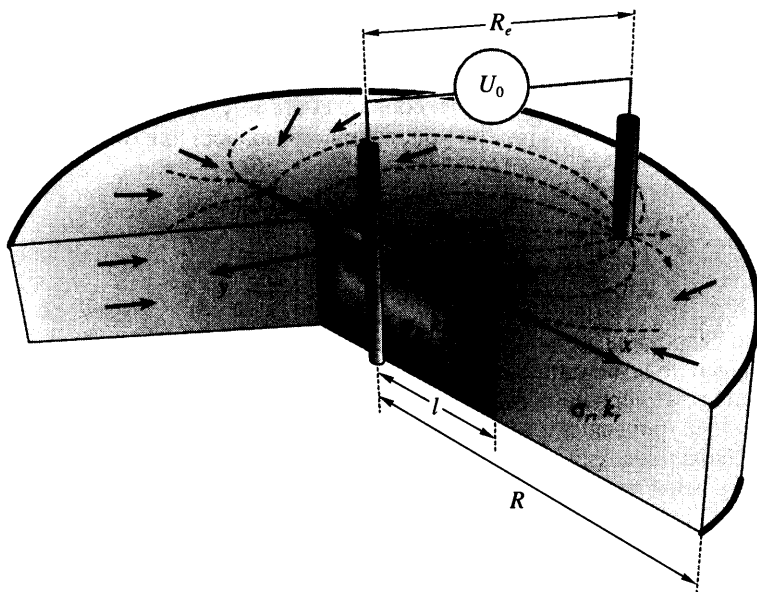
1. Электроосмос и его приложения в задачах осушки грунтов и очистки их от загрязнения. Электроосмос представляет собой течение жидкости через пористую среду под действием приложенной разности потенциалов [1]. Подобно другим электрокинетическим явлениям, электроосмос связан с образованием в растворе электролита вблизи поверхности твердого тела двойного электрического слоя, в котором ионы одного знака преимущественно связаны с твердой поверхностью, и потому неподвижны, а ионы другого знака (противоионы) находятся в жидкости, могут переноситься ею и увлекать ее, если они находятся во внешнем электрическом поле. В этом, собственно, и суть электроосмоса.

Макроскопически течение в пористой среде в присутствии внешнего электрического поля описывается соотношением [1, 2]

$$\mathbf{u} = -\frac{k_r}{\mu_r} \nabla p - \frac{k_{eo}}{\phi} \nabla U$$

являющимся очевидным обобщением закона Дарси. Здесь p – приведенное давление, U – потенциал электрического поля, k_r – проницаемость среды, μ_r – вязкость пластовой жидкости, k_{eo} – электроосмотическая проводимость, ϕ – пористость среды. Величина k_{eo} зависит от специфических свойств поверхности пор и состава насыщающей жидкости и для наиболее важного случая – природных вод – находится для типичных грунтов в диапазоне 10^{-10} – 10^{-9} ($\text{м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$) [2].

Замечательная особенность электроосмоса состоит в том, что электроосмотическая проводимость не зависит от характерного размера пор и проницаемости пористой среды, поэтому, во-первых, при прочих равных условиях роль электроосмоса возрастает с уменьшением проницаемости, и во-вторых, в неоднородной по проницаемости среде электроосмотический поток остается сравнительно однородным. Совокупность этих двух обстоятельств определила все возрастающую роль электроосмоса как средства очистки грунтов от загрязнений слаборастворимыми органическими жидкостями и тяжелыми металлами [3–5]. По тем же причинам в последние годы наблюдается бурный



Фиг. 1. Схема задачи

рост интереса к использованию электроосмоса для управления потоками в миниатюрных устройствах дозирования и автоматизации [6–9].

Естественным следующим шагом развития электроосмотической технологии ремедиации (очистки) грунтов стала комбинация электроосмоса с гидравлическим разрывом пласта с целью выравнивания и интенсификации потока. Соответствующая технология, получившая, по аналогии с популярным слоеным итальянским блюдом, наименование Лазанья (*Lasagna*TM), находит все более широкое применение [10–12]. Анализ этих новых технологий приводит к новым задачам теории фильтрации, которые могут быть исследованы классическими методами.

В данной работе рассматривается одна такая задача: электроосмотический приток к трещине гидроразрыва в однородной пористой среде при фиксированном постоянном давлении на круговом контуре питания в присутствии электрического поля, вызванного разностью потенциалов между отбирающей жидкость скважиной в середине трещины и скважиной-электродом, расположенной на некотором расстоянии от трещины. Задача предполагается плоской, так что все поля зависят только от двух координат: x и y . На этой частной задаче проиллюстрированы некоторые общие свойства проблемы, техника ее решения и факторы, определяющие структуру и свойства электроосмотического потока. Именно эти методические вопросы составляют основное содержание работы.

2. Формулировка задачи. Геометрия и основные уравнения. Рассмотрим плоскую задачу о притоке жидкости к скважине, расположенной в средней точке симметричной трещины гидроразрыва длины $2l$, ориентированной вдоль оси x . Предполагается, что скважина с трещиной находится внутри кругового контура питания радиуса R , на котором поддерживается постоянное давление, принятое в дальнейшем за нуль (фиг. 1).

Внутри контура расположена дополнительная скважина-электрод радиуса r_e , на которой поддерживается заданная разность потенциалов U_0 по отношению к основной скважине. Именно эта разность потенциалов и вызывает движение жидкости вследствие электроосмотического эффекта. Предполагается, что пласт однороден по своим

свойствам, так что проницаемость постоянна внутри контура питания, а электропроводность – во всей плоскости (x, y) . Основными неизвестными задачи являются давление $p(x, y)$, потенциал электрического поля $U(x, y)$, скорость фильтрации \mathbf{u} и вектор плотности электрического тока \mathbf{j} . Они удовлетворяют системе уравнений, состоящей из обобщенных законов Дарси и Ома [1, 2] и уравнений сохранения для объема жидкости и заряда:

$$\mathbf{u} = -\frac{k_f}{\mu_r} \nabla p - \frac{k_{eo}}{\phi} \nabla U, \quad \mathbf{j} = -\frac{k_{eo}}{\phi} \nabla p - S \nabla U$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Специфика гидродинамической теории гидроразрыва в том, что наряду с двумерными неизвестными полями, определенными вне трещины, необходимо рассматривать соответствующие одномерные поля, зависящие от координаты вдоль трещины: давление в трещине P_f , электрический потенциал в трещине U_f , объемный поток жидкости вдоль трещины Q , электрический ток вдоль трещины I . Они также связаны обобщенными уравнениями Дарси–Ома:

$$Q(x) = -\frac{k_f w_f}{\mu_f} \frac{\partial P_f}{\partial x} - \frac{k_{feo} w_f}{\phi_f} \frac{\partial U_f}{\partial x}, \quad I(x) = -\frac{k_{feo} w_f}{\phi_f} \frac{\partial P_f}{\partial x} - w_f S_f \frac{\partial U_f}{\partial x}$$

Давление и потенциал в трещине связаны с соответствующими величинами в пласте условиями непрерывности $P_f(x) = p(x, \pm 0)$, $U_f = U(x, \pm 0)$.

Помимо этих условий непрерывности потоки в трещине удовлетворяют условиям баланса объема жидкости и заряда в трещине:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = -q_L, \quad q_L = q_L^+(x) - q_L^-(x) < 0$$

$$q_L^\pm(x) = u_y(x, \pm 0) = -\frac{k_{eo}}{\phi} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0^\pm} - \frac{k_r}{\mu_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0^\pm}$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -j_L, \quad j_L = j_L^+(x) - j_L^-(x) < 0$$

$$j_L^\pm(x) = j_y(x, \pm 0) = -S_r \frac{\partial U(x, 0^\pm)}{\partial y}$$

$$I(x) = -w_f(x) S_f \frac{\partial U_f}{\partial x}$$

Здесь w_f – раскрытие (ширина) трещины, k_f – проницаемость трещины, S_f – проводимость трещины, k_{feo} – электроосмотическая проводимость трещины, Q , I – объемный поток жидкости и ток через трещину в расчете на единицу ее высоты. С целью упрощения изложения последние два уравнения приведены не в общем виде, а с учетом предположений, сделанных ниже.

Кроме этих условий, специфических для задачи гидроразрыва, давление и потенциал должны удовлетворять обычным граничным условиям на отбирающей скважине в середине трещины, скважине электроде, контуре питания и на бесконечности:

$$p(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2; \quad p(0, 0) = 0$$

$$U(0, 0) = 0; \quad U(x_e, y_e) = U_0, \quad x_e^2 + y_e^2 = R_e^2$$

$$|U(x, y)| \leq M < \infty, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

Скважина-электрод служит источником тока, но не источником (стоком) жидкости, задание давления на контуре питания означает, что поле давления должно рассматриваться только внутри этого контура, а электрическое поле рассматривается во всей плоскости. Принятое граничное условие означает, что нет стока тока на бесконечности, и весь ток от скважины-электрода замыкается на отбирающую скважину через трещину гидроразрыва. Такой выбор граничных условий отвечает одной из возможных конфигураций процесса и очевидным образом должен быть изменен применительно к другим ситуациям.

В приведенной общей постановке гидродинамические и электрические поля взаимно связаны и равноправны. В дальнейшем предполагается, что параметры задачи таковы, что имеет место собственно электроосмос, т.е. электрическое поле влияет на движение жидкости и распределение давления, но движение жидкости не оказывает влияния на электрическое поле. Сделано это, чтобы упростить изложение и отчетливо выявить особенности электроосмоса. Физически это соответствует слабопроницаемым средам. В этом случае также естественно пренебречь вкладом электрокинетических эффектов внутри самой трещины. Поэтому в дальнейшем положено

$$k_{feo} = 0, \quad \frac{k_{eo}}{\phi} |\nabla p| \ll S |\nabla U|$$

Противоположный частный случай – исследование так называемого потенциала течения – также имеет важные практические приложения (см., например, [1, 13, 14]).

3. Сведение к сингулярным интегральным уравнениям. Естественным аппаратом для решения сформулированной задачи, равно как и других задач теории гидроразрыва, служит аппарат сингулярных уравнений. Трещина является стоком для жидкости и для электрического тока, и потому решение задачи может быть явно выписано в терминах неизвестных распределений плотностей гидродинамических и электрических стоков вдоль трещины $q_L(x)$, $j_L(x)$, $-l < x < l$ и суммарного тока скважины-электрода. Прежде всего, электрический потенциал вне трещины дается вещественной частью комплексного электрического потенциала

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_l^{+l} j_L(\xi) \ln(z - \xi) d\xi + \frac{I_e}{2\pi} \ln(z - z_e) + \text{const}_U, \quad I_e > 0$$

причем комплексный ток выражается производной $\Phi'(z)$

$$j \equiv j_x - ij_y = \Phi'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_l^{+l} j_L(\xi) \frac{1}{z - \xi} d\xi + \frac{I_e}{2\pi(z - z_e)} \quad (3.1)$$

Определим гидродинамический потенциал $W(z)$ таким образом, что

$$w \equiv u_x - iu_y = W'(z)$$

$$p(x, y) = -\frac{\mu_r}{k_r} \text{Re} W(z) + \frac{\mu_r k_{eo}}{k_r \phi S_r} \text{Re} \Phi(z) \equiv -\text{Re} \Psi(z) \quad (3.2)$$

$$\Psi(z) = \frac{\mu_r}{k_r} W(z) - \frac{\mu_r k_{eo}}{k_r \phi S_r} \Phi(z)$$

Согласно (3.1), на трещине (здесь и далее особые интегралы понимаются в смысле главного значения [15–17])

$$j_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_l^{+l} j_L(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi + \frac{I_e}{2\pi} \Upsilon(x), \quad \Upsilon(x) = \frac{x - x_e}{(x - x_e)^2 + y_e^2}$$

С другой стороны, используя соотношения закона Ома для пласта на границе с трещиной и для самой трещины, имеем

$$j_x = -S_r \frac{dU_f}{dx} = \frac{S_r}{w_f S_f} I(x)$$

В результате получаем сингулярное интегральное уравнение для плотности тока, втекающего в трещину:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{j_L(\xi) d\xi}{x - \xi} - \frac{S_r}{S_f w_f} I(x) = -\frac{I_e}{2\pi} \Upsilon(x)$$

$$\int_{-l}^l j_L(\xi) d\xi = -I_e$$

$$I(x) = -\int_{-l}^x j_L(\xi) d\xi, \quad -l \leq x \leq 0; \quad I(x) = \int_x^{+l} j_L(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l$$

Здесь I_e – ток скважины-электрода – постоянная, подлежащая определению в ходе решения задачи. Этот вывод почти буквально воспроизводит вывод интегрального уравнения для плотности притока жидкости в трещину гидроразрыва, данный в [13].

Выведем теперь, используя тот же прием, интегральное уравнение для плотности притока жидкости к трещине q_L . Согласно соотношению (3.2), потенциал $\Psi(z)$ представляет собой функцию, аналитическую в круге радиуса R с разрезом вдоль отрезка $|x| \leq l$, отвечающего трещине, имеющую логарифмическую особенность интенсивности

$$\frac{\mu_r k_{eo} I_e}{k_r \phi S_r}, \quad z = x_e + iy_e$$

причем ее вещественная часть обращается в нуль на границе круга. Особенности $\Psi(z)$ вдоль трещины соответствуют распределению источников интенсивности

$$-\frac{\mu_r}{k_r} q_L + \frac{\mu_r k_{eo}}{k_r \phi S_r} j_L$$

С учетом граничного условия на границе круга имеем

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left(-\frac{\mu_r}{k_r} q_L(\xi) + \frac{\mu_r k_{eo}}{k_r \phi S_r} j_L(\xi) \right) \ln \frac{R(z - \xi)}{R^2 - z\xi} d\xi + \frac{\mu_r k_{eo} I_e}{2\pi k_r \phi S_r} \ln \left(\frac{z - z_e}{z R_e / R - z_e R / R_e} \right)$$

Здесь j_L и I_e могут считаться известными из решения электрической задачи. Отсюда находим

$$u_x(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{ \Psi'(z) \} = \frac{\mu_r k_{eo} I_e}{2\pi k_r \phi S_r} f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left(\frac{\mu_r k_{eo}}{k_r \phi S_r} j_L(\xi) - \frac{\mu_r}{k_r} q_L(\xi) \right) \left(\frac{1}{x - \xi} + \frac{\xi}{R^2 - x\xi} \right) d\xi$$

$$f(x) = \Upsilon(x) - \frac{x - x_e(R/R_e)^2}{(x - x_e(R/R_e)^2)^2 + y_e^2(R/R_e)^2}, \quad R_e^2 = x_e^2 + y_e^2$$

С другой стороны, с учетом выражения для потока жидкости вдоль трещины имеем

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial x} = \frac{dP_f(x)}{dx} = -\frac{\mu_f}{k_f w_f} Q(x)$$

$$u_x(x) = -\frac{k_r \partial p}{\mu_r \partial x} - \frac{k_{eo} \partial U}{\phi \partial x} = -\frac{k_r dP_f}{\mu_r dx} - \frac{k_{eo} dU_f}{\phi dx} = \frac{k_r \mu_f Q(x)}{k_f \mu_r w_f(x)} + \frac{k_{eo} I(x)}{S_f \phi w_f(x)}$$

Подставляя сюда выражения для $P_f(x)$ и $Q(x)$ через $q_L(x)$ и j_L , получим сингулярное интегральное уравнение для q_L

$$\int_{-l}^l q_L(\xi) \left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{\xi}{R^2 - x\xi} \right) d\xi - \frac{\mu_f}{\mu_r} Q(x) = \frac{k_{eo} k_f I(x)}{S_f \phi k_r} + \frac{k_{eo}}{\phi S_r} \left[-\frac{I_e k_f w_f}{2\pi k_r} f(x) + \int_{-l}^l j_L(\xi) \left(\frac{1}{x-\xi} + \frac{\xi}{R^2 - x\xi} \right) d\xi \right]$$

$$Q(x) = -\int_{-l}^x q_L(\xi) d\xi, \quad -l \leq x \leq 0; \quad Q(x) = \int_x^{+l} q_L(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l$$

Искомое решение должно удовлетворять дополнительному условию, что давление в центре трещины принимает заданное значение (принимаемое в дальнейшем равным давлению на контуре питания): $P_f(0) = 0$.

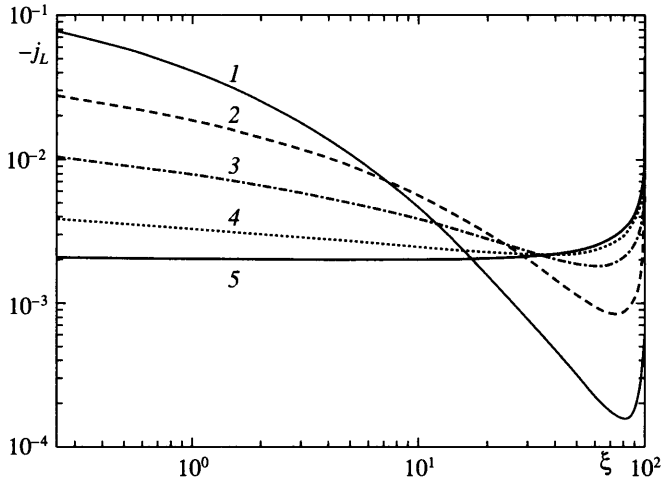
4. Численное решение сингулярных интегральных уравнений и результаты расчетов.

Выведенные сингулярные интегральные уравнения для q_L и j_L решаются численно на основе метода “дискретных вихрей”, приведенного в книге Белоцерковского и Лифанова [15]. Центральный момент – использование двух равномерных сеток вдоль трещины, так что внутренняя переменная интегрирования берется в целочисленных точках сетки, а внешняя переменная и основные неизвестные определяются в полупелых точках. При этом особые интегралы вычисляются по формуле прямоугольников. В результате получается система линейных уравнений для значений неизвестных в узлах, которая решается с помощью стандартных программ. После того как неизвестные распределения потоков вдоль трещины найдены, все представляющие интерес параметры внешних полей определяются с помощью численных квадратур. Соответствующие программы, эффективно работающие при общем числе узлов вдоль трещины до нескольких сот, могут быть написаны на Фортране или с использованием пакета Matlab или его открытых аналогов (Octave и SciLab).

Сформулированная задача многопараметрична, и ее полный анализ выходит за рамки данной статьи. Ниже приводятся только некоторые характерные результаты. Наиболее важными параметрами трещины являются ее относительная гидравлическая C_{fD} и электрическая S_{fD} проводимости:

$$C_{fD} = \frac{k_f w_f}{k_r l}, \quad S_{fD} = \frac{S_f w_f}{S_r l} \tag{4.1}$$

Практически во всех случаях относительная гидравлическая проводимость значительно больше единицы. Такое соотношение легко достигается даже для сравнительно



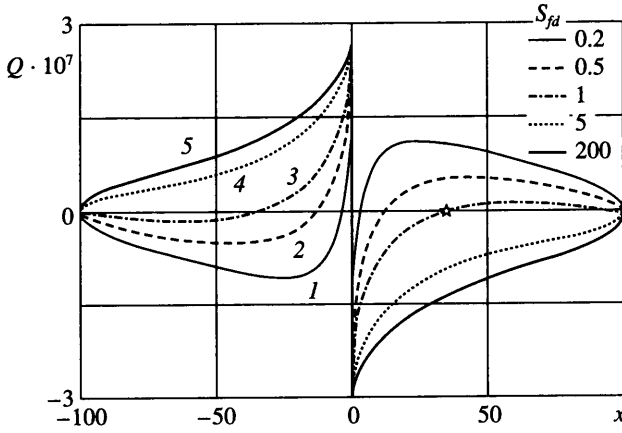
Фиг. 2. Распределение плотности тока $j_L(\xi)$ по поверхности правого крыла трещины ($\xi > 0$) для различных значений относительной электропроводности

узких (несколько сантиметров) трещин благодаря тому, что трещина гидроразрыва заполняется крупнозернистым веществом – проппантом, проницаемость которого на много порядков больше проницаемости пласта (в простейшем случае роль проппанта играет песок). С другой стороны, если не принимать особых мер, то проводимости пласта и слоя проппанта в трещине примерно одного порядка (порядка проводимости пластовой минерализованной воды) и потому относительная электропроводность трещины мала. Ясно, что при этом трещина будет слабо влиять на распределение электрического тока, который будет течь от скважины-электрода непосредственно к отбирающей скважине и небольшому участку трещины, примыкающему к ней (фиг. 2). С увеличением электрической проводимости естественным образом увеличивается роль трещины: распределение плотности тока выравнивается, уменьшаясь вблизи скважины гидроразрыва и возрастая на остальной поверхности трещины. Этот и приведенные ниже графики построены при $\mu = 0.001$ (Па · с), $\Delta U = 1$ (кВ), $k_{eo} = 10^{-10}$ (м²/В · с), причем кривым 1–5 соответствуют S_{FD} величины 0.2, 0.5, 1, 5, 200 соответственно.

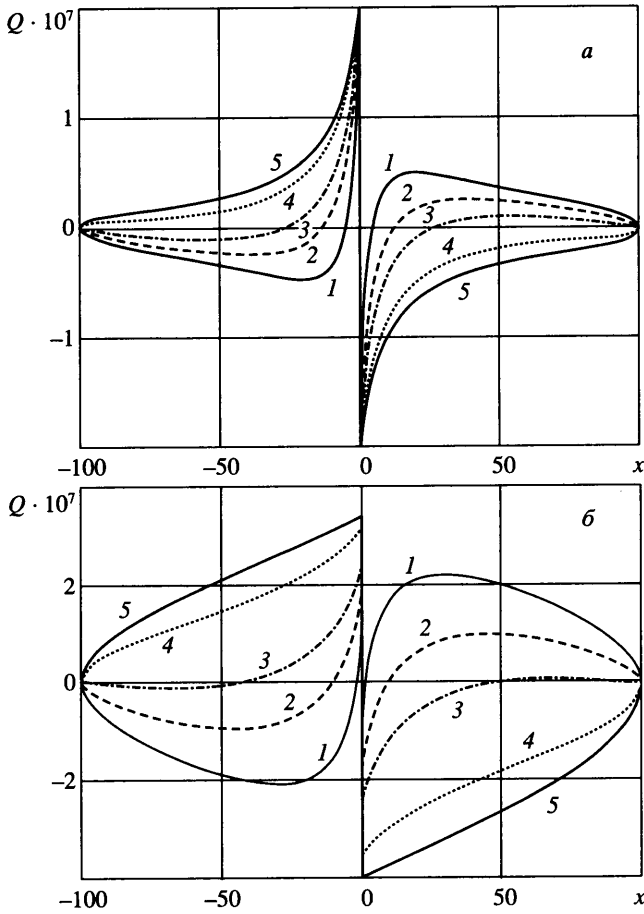
Распределение потока вдоль трещины представлено на фиг. 3. Рассмотрим подробно одну из кривых $Q(x)$, например штрихпунктирную линию, соответствующую $S_{FD} = 1$. Если двигаться от правого конца трещины к ее центру, то поток сначала возрастает: согласно введенным обозначениям это означает, что вблизи кончика трещины вода, нагнетенная осмосом вблизи центра трещины, отфильтровывается обратно в пласт. Отрезок от точки максимума до скважины соответствует той области трещины, где поток жидкости направлен из пласта в трещину. От правого конца трещины до пересечения кривой с осью x , обозначенного звездочкой, поток в трещине направлен к ее правому концу ($Q > 0$), а ближе к скважине поток в трещине направлен к скважине ($Q < 0$).

Аналогичные графики для других значений C_{FD} с соответствующими им распределениями давления вдоль трещины представлены на фиг. 4, 5. С увеличением проводимости трещины показатели процесса улучшаются: поток становится более равномерным, а суммарный поток увеличивается. Технически повышение электропроводности трещины вполне осуществимо, например, использованием в качестве проппанта в трещине частиц графита [18, 19].

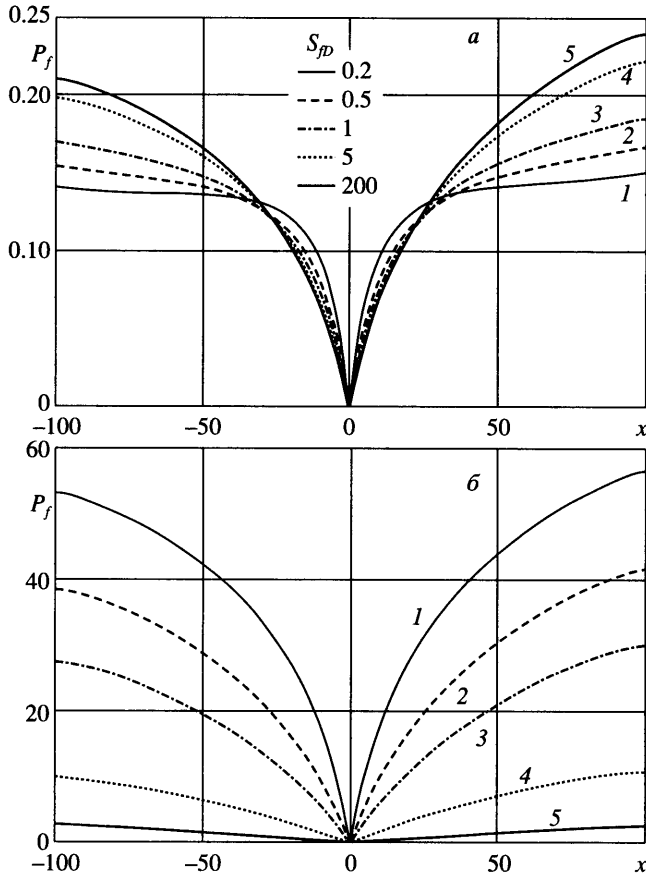
На фиг. 6 показаны сводные данные по зависимости электроосмотического потока через трещину от относительных проводимостей (электрической и гидравлической)



Фиг. 3. Распределение потока вдоль трещины для различных значений относительной электропроводности при $C_{fD} = 1$



Фиг. 4. Распределение потока вдоль трещины для различных значений относительной электропроводности и относительной гидравлической проводимости: $C_{fD} = 0.25$ (а), $C_{fD} = 50$ (б)

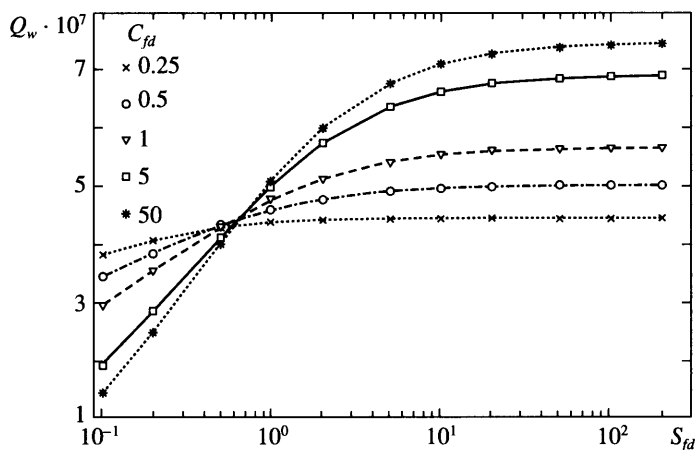


Фиг. 5. Распределение давления вдоль трещины для различных значений относительной электропроводности и относительной гидравлической проводимости: $C_{fd} = 0.25$ (а), $C_{fd} = 50$ (б)

трещины. При незначительной электрической проводимости влияние трещины на распределение тока мало: “работает” только небольшая ее часть вблизи скважины гидро-разрыва. Это значит, что при малой гидродинамической проводимости практически вся вода, нагнетаемая осмосом в скважину и в трещину вблизи окрестности скважины, уходит в последнюю, и лишь незначительная часть распределяется по оставшемуся объему трещины (течет по трещине в направлении ее конца(ов), частично отфильтровываясь в пласт). С повышением гидродинамической при той же электрической проводимости суммарный поток будет уменьшаться, ибо существенно возрастает доля распределяемой по оставшемуся объему трещины воды, т.е. больше воды утекает обратно в пласт (утекает обратно осмотическому потоку, следовательно, должно возрастать давление, что и наблюдается на фиг. 5). В противоположном случае – большой электрической проводимости – вся трещина работает как сток, поэтому естественно, что с увеличением гидравлической проводимости суммарный поток возрастает.

Заключение. Дана постановка задачи об электроосмотическом притоке к трещине гидро-разрыва, развит эффективный аппарат ее решения на основе сведения к системе сингулярных уравнений.

Приведённые результаты демонстрируют возможное разнообразие распределений давления и потока вдоль трещины в зависимости от ее относительных электрической и



Фиг. 6. Зависимость электроосмотического потока через трещину от относительной электропроводности трещины для различных значений относительной гидравлической проводимости: 0.25, 0.5, 1, 5, 50

гидравлической проводимостей; а также влияние последних на суммарный электроосмотический поток.

Результаты могут быть использованы для исследования и оптимизации процесса электроосмотической ремедиации (очистки) загрязненных малопроницаемых грунтов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фридрихсберг Д.А. Курс коллоидной химии. Л.: Химия, 1984. 368 с.
2. Bruell C.J., Segall B.A., Walsh M.T. Electroosmotic removal of gasoline hydrocarbons and TCE from clay // J. Environ. Eng. 1992. V. 118. № 1. P. 68–74.
3. Probstein R.F., Hicks R.E. Removal of contaminants from soils by electric fields // Science. 1993. V. 260. № 5107. P. 498–503.
4. Shapiro A.P., Probstein R.F. Removal of contaminants from saturated clays by electroosmosis // Environ. Sci. Tech. 1993. V. 27. P. 283–287.
5. Innovative Ground-Water Remediation Technologies: Publ. and conf. proc. 1990–1996: www.epa.gov/tio/download/remed/gwbib.pdf
6. Molho J.I., Herr A.E., Kenny T.W., Mungal M.G., St. John P.M., Garguilo M.G., Paul P.H., Deshpande M., Gilbert J.R. Fluid transport mechanisms in microfluidic devices // Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS). 1998. Proc. ASME International Mech. Eng. Cong. and Exposition (DSC-V.66), 8p. (http://mems.stanford.edu/~aeh/publications/Molho_asme98.pdf)
7. Stone H.A., Stroock A.D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 381–411.
8. Su Fei, Chakrabarty K., Fair R.B. Microfluidics-based biochips: technology issues, implementation platforms, and design-automation challenges // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2006. V. 25. № 2. P. 211–223.
9. Wong P.K., Wang T.-H., Deval J.H., Ho Ch.-M. Electrokinetics in micro devices for biotechnology applications // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2004. V. 9. № 2. P. 366–376.
10. Groundwater and Soil Cleanup: Improving Management of Persistent Contaminants. Committee on Technologies for Cleanup of Subsurface Contaminants in the DOE Weapons Complex, National Research Council. 1999. 304p. (<http://fermat.nap.edu/catalog/9615.html>)
11. Ho S.V., Brodsky P.H. Integrated in-situ technology for soil remediation – the Lasagna process // Amer. Chem Soc. Annual Meeting, Atlanta, GA, 1994. P. 505–506.
12. Lasagna™ Public-Private Partnership Completes Work. 2p. (www.rtdf.org/PUBLIC/lasagna/lasag.pdf)

13. Зазовский А.Ф., Тодуа Г.Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 107–116.
14. Entov V.M, Adler P.M. On large-scale electrokinetic phenomena in natural porous media. Preprint № 754. Moscow: Inst. Probl. Mech. RAS, 2004. 43p.
15. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
16. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
17. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
18. Murdoch L.C., Chen J.-L. Effect of conductive fractures during in-situ electroosmosis // J. Hazardous Materials. 1997. V. 55. № 1–3. P. 239–262.
19. Murdoch L., Chen J.-L., Cluxton P., Kemper M., Anno J., Smith D. Hydraulic Fractures as Subsurface Electrodes: Early Work on the Lasagna Process. 6p. (<http://www.p2pays.org/ref/37/36919.pdf>)

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.2006