

УДК 532.526.5

© 2007 г. Вик. В. СЫЧЕВ

**ОБ ОТРЫВНЫХ ЗОНАХ ПРИ ОБТЕКАНИИ МАЛОГО ВЫПУКЛОГО УГЛА**

На основе асимптотического анализа системы уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ) исследовано плоское течение несжимаемой жидкости около поверхности, имеющей слабый излом в виде выпуклого угла  $2\theta^*$ . Показано, что при  $\theta^* = O(Re^{-1/4})$  наряду с известным решением, описывающим отрывное течение, которое полностью локализовано в тонком “вязком” подслое области взаимодействия около точки излома, возможно и другое решение, соответствующее течению с развитой зоной отрыва. Ее продольный размер при  $\theta_0 = Re^{1/4}\theta^* = O(1)$  меняется от конечных значений до величины порядка  $Re^{-3/8}$ . Установлена неединственность решения в некотором диапазоне изменения параметра  $\theta_0$ . Найдена зависимость для коэффициента сопротивления от величины угла  $\theta^*$ .

*Ключевые слова:* пограничный слой, взаимодействие, отрыв, свободные линии тока.

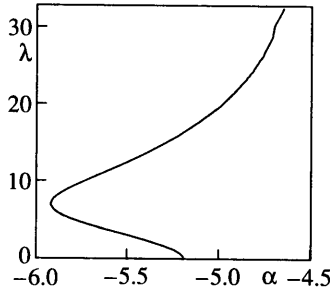
При обтекании слабого излома поверхности зарождение отрыва потока при больших числах Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ), т.е. появление возвратных токов, локализованных внутри пограничного слоя, должно происходить, если угол этого излома есть величина  $O(\varepsilon^2)$ ,  $\varepsilon = Re^{-1/8}$  [1, 2]. (Число Рейнольдса определено по параметрам однородного набегающего потока и  $L$  – расстоянию от передней кромки поверхности тела до точки ее излома.) При этом в окрестности точки излома лежит область взаимодействия течения в “вязком” пристеночном подслое (его толщина  $O(\varepsilon^5)$ ) с внешним потенциальным потоком. Область взаимодействия имеет трехслойную структуру, а ее продольный и поперечный размеры порядка  $\varepsilon^3$ .

Несколько ранее эта локальная область взаимодействия была обнаружена при исследовании таких важных явлений, как отрыв пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа [3, 4] и обтекании задней кромки пластины несжимаемой жидкостью [5, 6], а несколько позже – при изучении отрыва жидкости от гладкой поверхности [7]. При этом в последнем случае была установлена глубокая связь теории пограничного слоя и его взаимодействия с классической теорией течений идеальной жидкости со свободными линиями тока.

К настоящему времени асимптотическая теория взаимодействия и отрыва получила существенное развитие, и ей посвящена обширная литература [8–14].

Однако некоторые, давно обсуждаемые задачи не получили пока окончательного решения. Так, еще в 1974 г. Стюартсон в обзоре [8], рассматривая плоское течение около точки слабого излома, задавался вопросом о том, что будет с решением краевой задачи для области взаимодействия, сформулированной в [2], при больших значениях входящего в эту задачу параметра  $\alpha$ , связанного с углом излома  $\alpha^*$ :  $\alpha^* = \varepsilon^2 a_0^{1/2} \alpha$ . Постоянная  $a_0$  – значение обезразмеренного поверхностного трения в пограничном слое, приходящем к точке излома. Значениям  $\alpha > 0$  соответствует вогнутый угол и  $\alpha < 0$  – выпуклый.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением течений только несжимаемой жидкости около выпуклых углов. Что касается течений при  $\alpha > 0$  и в том числе сверхзвуковых, то этому посвящены работы [15–20], но окончательного ответа на вопрос Стюартсона здесь пока нет.



Фиг. 1. Зависимость длины зоны отрыва  $\lambda$  от величины выпуклого угла  $\alpha$  для течения в области взаимодействия: расчеты из [23]

При малых значениях  $\alpha$  решение получено в [2, 21] путем линейризации с последующим применением операционных методов. Решение, описывающее течения с возвратными токами в вязком подслое области взаимодействия для несжимаемой жидкости, впервые было построено численно в [15] как раз для рассматриваемой задачи при  $\alpha = O(1)$ . Однако ответа на поставленный Стюартсоном вопрос тогда дано не было. Использование более совершенных численных методов позволило установить [22], что при  $\alpha < 0$  решение существует, если только  $\alpha > \alpha_k$ ,  $\alpha_k = -6.5$  и не единственно. Недавние расчеты [23] подтвердили этот интересный результат. На фиг. 1, заимствованной из [23], представлена зависимость от  $\alpha$  параметра  $\lambda$ , пропорционального длине зоны возвратных токов  $\lambda^*$ :  $\lambda^* = \varepsilon^3 a_0^{-5/4} \lambda L$ . Здесь  $\alpha_k = -5.926$ . Если двигаться вдоль верхней ветви кривой  $\lambda(\alpha)$  (фиг. 1), то величина  $\lambda$  быстро растет, и расчеты удалось провести до значения  $\alpha = \alpha_m$ , равного  $-4.8$  и  $-4.66$  соответственно в [22] и [23]. Заметим, что отличие численных значений, например для  $\alpha_k$ , в этих работах объясняется в частности тем, что в [23] угол излома поверхности в масштабах области взаимодействия слегка сглаживался.

Таким образом, область изменения  $\alpha$  (при  $\alpha < 0$ ) ограничена значением  $\alpha = \alpha_k$ , и это есть ответ на вопрос из [8]. Вместе с тем остается неясным, какова структура течения при  $\alpha < \alpha_k$  и что происходит при  $\alpha > \alpha_m$ , если двигаться вдоль верхней ветви кривой  $\lambda(\alpha)$ .

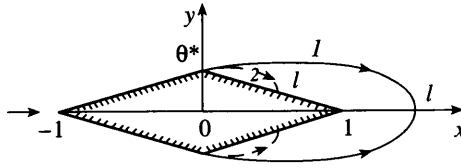
Данная работа ставит своей целью попытку исследования этих вопросов.

1. Для изучения плоских течений около выпуклого угла, следуя [2], рассмотрим симметричное обтекание ромба (фиг. 2). Положим, что направление одной его диагонали длиной  $2l^*$  совпадает с направлением однородного набегающего потока. Введем следующие обозначения:  $l^*x, l^*y$  – оси прямоугольной системы координат с началом в центре ромба,  $u_\infty u$  и  $u_\infty v$  – соответствующие проекции вектора скорости,  $l^*u_\infty \psi$  – функция тока,  $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$  – давление,  $Re = u_\infty l^*/\nu$  – число Рейнольдса. Здесь  $u_\infty$  и  $p_\infty$  – скорость и давление в набегающем потоке,  $\rho$  – плотность и  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. Через  $C_x$  будем обозначать коэффициент силы сопротивления  $F_x = \rho u_\infty^2 l^* C_x / 2$ . Вследствие симметрии течения речь будет идти только о верхней полуплоскости  $y \geq 0$ .

Во введенных обозначениях форма обтекаемого тела (фиг. 2) есть

$$y = y_w(x) = \begin{cases} \theta^*(1+x), & -1 < x < 0 \\ \theta^*(1-x), & 0 < x < 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $\theta^*$  – положительная постоянная. Начнем с рассмотрения течения около ромба конечной толщины:  $\theta^* = O(1)$  при  $Re \rightarrow \infty$ . Согласно общей асимптотической тео-



Фиг. 2. Схема течения со свободными линиями тока около клина:  $l, 2 - l > 1$  и  $l < 1$

рии [24] (см. гл. 6 в [12]) отрывного обтекания тел, коэффициент сопротивления  $C_x$  при  $Re \rightarrow \infty$  должен стремиться к конечному значению  $C_x^o$ , которое определяется на основе решения задачи (при  $x = O(1), y = O(1)$ , т.е. в масштабах тела) по схеме Кирхгофа со свободными линиями тока. В рассматриваемом случае – это решение Бобылева [25]. В целом область медленного возвратного течения, которое вызывается эжектирующим действием слоев смешения, развивающихся вдоль свободных линий тока, согласно [24], имеет в главном приближении форму эллипса, длина которого  $L_0$  и максимальная ширина  $D_0$  суть

$$L_0 = L_0^* Re, \quad D_0 = D_0^* Re^{1/2}$$

$$L_0^* = 0.392 C_x^{o2}, \quad D_0^* = 0.500 C_x^{o3/2} \tag{1.2}$$

$$p = P_0 Re^{-1/2} + O(Re^{-1}), \quad P_0 = -1.274 C_x^{o-1/2}$$

Здесь еще приведено асимптотическое представление для давления в этой области [24].

Пусть теперь обтекаемое тело тонкое, т.е. в (1.1)  $\theta^* = \sigma(Re)\theta_0, \sigma(Re) \rightarrow 0, \theta_0 = O(1)$  при  $Re \rightarrow \infty$ , но при этом в его масштабах по-прежнему реализуется течение по схеме Кирхгофа и, следовательно, в (1.2)  $L_0 \rightarrow \infty$ . Соответствующее решение получается на основе асимптотической теории малых возмущений для течений со свободными линиями тока [26] и имеет вид

$$x = O(1), \quad y = O(1), \quad \theta^* = \sigma(Re)\theta_0$$

$$u = 1 + \sigma U_1 + \sigma^2 U_2 + o(\sigma^2), \quad v = \sigma V_1 + \sigma^2 V_2 + o(\sigma^2) \tag{1.3}$$

$$p = \sigma P_1 + \sigma^2 P_2 + o(\sigma^2), \quad y_s = \sigma S_1 + \sigma^2 S_2 + o(\sigma^2)$$

$$\omega = u - iv = 1 + \sigma \omega_1 + \sigma^2 \omega_2 + o(\sigma^2)$$

$$U_1 - iV_1 = \omega_1(z), \quad P_1 = -U_1, \quad z = x + iy$$

$$x > 0: \frac{dS_1}{dx} = V_1(x, +0), \quad \omega_1 = -i \frac{2\theta_0}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z^{1/2}}\right) \tag{1.4}$$

$$C_x = C_x^o + o(\sigma^2) = \sigma^2 \frac{8\theta_0^2}{\pi} + o(\sigma^2), \quad x \rightarrow \infty: S_1 = \frac{4\theta_0}{\pi} x^{1/2} + O(x^{-1/2})$$

при условии, что  $\omega_1 = o(z^{-1/2}), z \rightarrow 0$ , где  $\omega_1(z)$  – аналитическая функция комплексного переменного. Здесь приведено решение для первого приближения. Оно удовлетворяет

условиям:  $\omega_1(\infty) = 0$ ; симметрии ( $V_1 = 0$ ) при  $y = +0, x < -1$ ; непротекания ( $V_1 = \theta_0$ ) на поверхности тела ( $y = +0, -1 < x < 0$ ) и постоянства скорости ( $U_1 = 0$ ) вдоль свободной линии тока, форма которой определяется заранее известной функцией  $S_1(x)$ . Заметим, что второе приближение не рассматривается, но, поскольку в дальнейшем некоторые связанные с ним вопросы будут затронуты, в (1.3) выписаны члены порядка  $\sigma^2$ .

Из выражений для  $C_x^\circ$  в (1.4) и  $L_0$  в (1.2) следует, что  $L_0 \rightarrow \infty$ , если только  $\sigma^4 \text{Re} \rightarrow \infty$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ .

Итак, течение по схеме Кирхгофа реализуется, когда толщина ромба  $\theta^* = \sigma \theta_0 \gg \text{Re}^{-1/4}$ , и переход к обтеканию с длиной зоны отрыва  $L_0 = O(1)$  происходит при  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$ . Так обстоит дело всегда, когда имеет место срыв потока с угловых точек, например при обтекании клина [9] и пластины под малым углом атаки [27]. При отрыве от гладкой поверхности переход несколько иного типа происходит при значении возмущающего параметра порядка  $\text{Re}^{-1/16}$  [28], что связано с характером течения в окрестности точки отрыва [7].

Вдоль поверхности тела вплоть до угловой точки развивается пограничный слой, течение в котором, в силу тонкости ромба, описывается в главном приближении автомодельным решением Прандтля – Блазиуса ([12], [29])

$$x^\circ = O(1), \quad y^\circ = \text{Re}^{-1/2} Y, \quad -1 < x^\circ < 0, \quad Y \geq 0$$

$$\psi = \text{Re}^{-1/2} (x^\circ + 1)^{1/2} F_0(\xi) + O(\sigma \text{Re}^{-1/2}), \quad \xi = Y/(x^\circ + 1)^{1/2}$$

$$F_0''(0) = a_0 = 0.3321, \quad F_0'(\infty) = 1$$

Здесь  $l^* x^\circ, l^* y^\circ$  – оси прямоугольной системы координат, связанной с поверхностью ромба и началом в его вершине  $x = 0, y = \theta^*$ . В малой окрестности этой угловой точки лежит область взаимодействия, детально исследованная Рубаном в [12], гл. 2. Минувя последнюю, пограничный слой переходит в слой смешения, который охватывает свободную линию тока и при  $x \rightarrow \infty$  имеет [24] известную автомодельную асимптотику ([29] с. 254).

2. Перейдем к рассмотрению течений с зонами отрыва конечного продольного размера ( $L_0 = l = O(1)$ ), которые, как было показано, реализуются при  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$ . Следует подчеркнуть, что для рассматриваемого течения около ромба при  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$  одновременно имеет место и описанное выше течение с локальными зонами отрыва [15, 22, 23].

Согласно (1.2)–(1.4), давление в области медленных возвратных токов в главном приближении постоянно, порядка  $\text{Re}^{-1/4}$ , и справедлива асимптотическая теория малых возмущений для течений со свободными линиями тока, развитая Тулиным [26]. Асимптотические разложения имеют вид (1.3) с  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$ . Для аналитической функции  $\omega_1(z)$  из (1.4) при условии, что  $l > 1$ , т.е. когда точка смыкания зоны отрыва лежит за задней кромкой ромба (фиг. 2), приходим с учетом (1.1) к задаче

$$y = +0, \quad x < -1, \quad x > l: \text{Im} \omega_1 = 0$$

$$y = +0, \quad -1 < x < 0: \text{Im} \omega_1 = -\theta_0$$

$$y = +0, \quad 0 < x < l: \text{Real} \omega_1 = -p_{00} = \text{const}$$

(2.1)

$$z \rightarrow \infty: \omega_1 = O(z^{-2}), \quad z \rightarrow 0: \omega_1 = o(z^{-1/2})$$

Эти условия определяют симметрию течения, непротекания на твердой поверхности и постоянство давления на линии тока  $\theta^* l$  (кривая  $l$  на фиг. 2). Предпоследнее условие в (2.1) дает выход на однородный набегающий поток, а также обеспечивает выпол-

нение условий замкнутости зоны постоянного давления и отсутствия подъемной силы ([26, 30]).

Использование известных методов [31] решения смешанных краевых задач в комплексной плоскости позволяет выписывать их в виде, содержащем интегралы ([26, 30]). Для рассматриваемого течения решение задачи (2.1) имеет вид

$$\omega_1 = -i \frac{2\theta_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{b_0 z^{1/2}}{(l-z)^{1/2}} \right) \right] + \left( \frac{\theta_0}{\pi} B_0 + p_{00} \right) \frac{z^{1/2}}{(z-l)^{1/2}} - p_{00} \quad (2.2)$$

$$b_0 = (l+1)^{1/2}, \quad B_0 = \ln \left( \frac{b_0+1}{b_0-1} \right), \quad p_{00} = -\frac{2\theta_0}{\pi l} \left( b_0 + \frac{l}{2} B_0 \right)$$

Это решение, как и другие решения по схеме Тулина [26], содержит особенность в точке смыкания зоны отрыва и свободная линия тока имеет здесь параболическую форму

$$|z-l| \rightarrow 0: \omega_1 = N_0(z-l)^{-1/2} - p_{00} + O((z-l)^{1/2})$$

$$x \rightarrow l-0: S_1 = -2N_0(l-x)^{1/2} + O((l-x)^{3/2}) \quad (2.3)$$

$$N_0 = -\frac{2\theta_0}{\pi} \left( \frac{1+l}{l} \right)^{1/2}$$

В этой точке действует сосредоточенная сила, равная по величине и противоположно направленная силе сопротивления ([26, 30]). Поэтому коэффициент сопротивления в рассматриваемом случае ( $\sigma = \operatorname{Re}^{-1/4}$ ,  $l > 1$ ) есть

$$C_x = \operatorname{Re}^{-1/2} (2C_B + C_x^*) + o(\operatorname{Re}^{-1/2}) \quad (2.4)$$

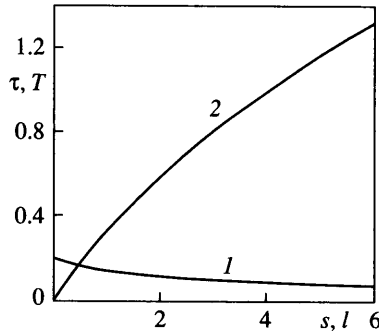
$$C_B = 1.328, \quad C_x^* = 2\pi N_0^2$$

Здесь  $C_B$  определяется решением Прандтля–Блазиуса (1.5), а  $C_x^*$  – на основании (2.2), (2.3) ([26, 30]).

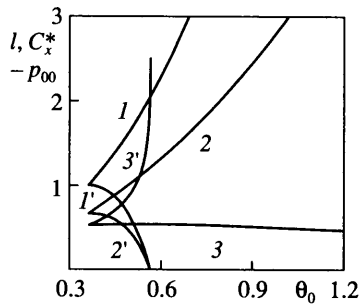
Полученное решение (2.2)–(2.4) содержит произвольную постоянную  $l$ . Для ее определения воспользуемся результатами [32], согласно которым замыкающее соотношение следует из условия баланса сил, действующих на жидкость в зоне отрыва, которая ограничена разделительными линиями тока ( $\psi = 0$ ) и поверхностью тела  $y = y_w(x) + 0$  (фиг. 2). В проекции на ось  $Ox$  такими силами являются [32] интеграл сил трения  $\rho u_\infty^2 l^* T(l)/2$  вдоль  $\psi = 0$  (внутри слоя смешения) и сосредоточенная сила, действующая в точке смыкания  $z = l$  и о которой говорилось выше. Таким образом, с учетом течения в нижней полуплоскости и (2.4), получаем

$$2T(l) = 2\pi N_0^2, \quad T(l) = 2 \int_0^l \tau ds \quad (2.5)$$

Решение краевой задачи для слоя смешения, начальный профиль скорости которого определяется автомодельным решением (1.5), было получено в [33, 34]. На фиг. 3 представлены графики функций  $\tau(s) = \partial u_0 / \partial N$  при  $\psi = 0$  из [33] и  $T(l)$ . Первая из них дает распределение трения  $\rho u_\infty^2 \operatorname{Re}^{-1/2} \tau(s)$  вдоль разделительной линии тока. Здесь  $u_\infty u_0(s, N)$  – продольная составляющая вектора скорости, которая определяется решением краевой



Фиг. 3. Распределение трения  $\tau(s)$  на разделительной линии тока (1); интеграл сил трения  $T$  в зависимости от длины зоны отрыва  $l$  (2)



Фиг. 4. Зависимость параметров  $l$ ,  $C_x^*$ ,  $-p_{00}$  от  $\theta_0 - 1, 2, 3$  для  $l > 1$  и  $1', 2', 3'$  для  $l < 1$

задачи для слоя смешения;  $l^*s$ ,  $l^*n$  – ортогональные криволинейные координаты, связанные с  $\psi = 0$  при  $s > 0$  и совпадающие с прямоугольными координатами  $x^o$ ,  $y^o$  при  $s < 0$ ;  $s = O(1)$ ,  $n = \text{Re}^{-1/2}N$ .

На основании (2.2)–(2.5) и кривой  $T(l)$  (фиг. 3) находим зависимости для  $l$ ,  $C_x^*$ ,  $-p_{00}$  от параметра толщины ромба  $\theta_0$ , представленные на фиг. 4. Таким образом, полученное решение существует при всех  $l > 1$  и при  $l \rightarrow 1 + 0$

$$\theta_0 = \theta_{00} + (l - 1)\theta_{01} + O((l - 1)^2), \quad \theta_{00} = 0.363, \quad \theta_{01} = 0.245 \quad (2.6)$$

Аналогично ведут себя и другие параметры. Их значения при  $l = 1 + 0$  суть:  $C_x^* = 0.670$ ,  $p_{00} = -0.530$ . Кривая  $-p_{00}(\theta_0)$  (фиг. 4) имеет слабо выраженный максимум, равный 0.540 при  $\theta_0 = 0.531$ .

Если длина области возвратных токов велика ( $l \rightarrow \infty$ ), то в масштабах тела при  $s \rightarrow \infty$  слой смешения имеет [24] автомодельную асимптотику:  $\tau s^{1/2} \rightarrow q_0$ ,  $q_0 = 0.1996$  ([29, 34]). Поэтому  $T = 4q_0 l^{1/2} + \dots$  при  $l \rightarrow \infty$  и тогда, на основании (2.2)–(2.5), получаем, что при  $\theta_0 \rightarrow \infty$

$$l = (\pi q_0)^{-2} \theta_0^4 + \dots, \quad C_x^* = \frac{8}{\pi} \theta_0^2 + \dots, \quad p_{00} = -4q_0 \theta_0^{-1} + \dots$$

и само решение (2.2) при  $z = O(1)$  переходит в (1.4) – схема Кирхгофа. В масштабах зоны отрыва, т.е. при  $z l^{-1} = O(1)$ ,  $l \rightarrow \infty$ , решение (2.2) дает описание обтекания тонкого “жидкого” эллипса с указанными в (1.2) параметрами – переход к решению [24].

Вернемся к течению при конечных  $\theta_0$  и  $l$ . В слое смешения  $\psi = O(\text{Re}^{-1/2})$ ,  $s = O(1)$ ,  $n = O(\text{Re}^{-1/2})$ . Этот слой своим эжектирующим действием вызывает медленное возвратное движение в зоне отрыва. Согласно [24], здесь  $\psi = O(\text{Re}^{-1/2})$ , и поскольку ее размеры  $x = O(1)$ ,  $y = O(\sigma)$ ,  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$ , то  $u = O(\text{Re}^{-1/4})$  и переменная часть давления  $p - p_{00} = O(\text{Re}^{-1/2})$ . Наконец в окрестности точки смыкания  $z = l$  лежит область с размерами порядка толщины слоя смешения ( $x - l = O(\text{Re}^{-1/2})$ ,  $y = O(\text{Re}^{-1/2})$ ), в которой изменения скорости и давления суть величины порядка единицы. Течение здесь локально невязкое и носит ярко выраженный нестационарный характер [32], (см. также гл. 6 в [12]).

3. Перейдем к рассмотрению течения при  $l < 1$ , когда точка смыкания зоны отрыва лежит на поверхности тела. (Свободная линия тока  $\theta^*l$  обозначена как 2 на фиг. 2.) Для  $\omega_1(z)$  из (1.4) приходим к задаче, аналогичной (2.1)

$$y = +0, \quad x < -1, \quad x > 1: \text{Im}\omega_1 = 0$$

$$y = +0, \quad -1 < x < 0: \text{Im}\omega_1 = -\theta_0$$

$$y = +0, \quad 0 < x < l: \text{Real}\omega_1 = -p_{00} = \text{const}$$

$$y = +0, \quad l < x < 1: \text{Im}\omega_1 = \theta_0$$

$$z \rightarrow \infty: \omega_1 = O(z^{-2}), \quad z \rightarrow 0: \omega_1 = o(z^{-1/2})$$

Вновь используя известные методы [31], получаем решение вида

$$\omega_1 = i \frac{2\theta_0}{\pi} \left[ \text{arctg} \left( \frac{b_0 z^{1/2}}{(l-z)^{1/2}} \right) + \text{arctg} \left( \frac{\gamma_0 z^{1/2}}{(l-z)^{1/2}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + \left( \frac{\theta_0}{\pi} B_0 + p_{00} + \frac{\theta_0}{\pi} \Gamma_0 \right) \frac{z^{1/2}}{(z-l)^{1/2}} - p_{00}$$

$$\gamma_0 = (1-l)^{1/2}, \quad \Gamma_0 = \ln \left( \frac{1+\gamma_0}{1-\gamma_0} \right) \quad (3.1)$$

$$p_{00} = \frac{2\theta_0}{\pi l} \left[ \gamma_0 - b_0 - \frac{l}{2} (B_0 + \Gamma_0) \right]$$

Выражения для  $b_0, B_0$  даны в (2.2). В окрестности точки присоединения свободной линии тока к поверхности тела ( $|z-l| \rightarrow 0$ ) разложение для  $\omega_1(z)$  и  $S_1(x)$  (в главных членах) имеет вид (2.3) со значением

$$N_0 = -\frac{2\theta_0}{\pi l^{1/2}} (b_0 - \gamma_0) \quad (3.2)$$

Из тех же соображений, что и раньше (при  $l > 1$ , см. (2.4), (2.5)), находим выражение для части коэффициента сопротивления  $C_x^*$

$$2T(l) = 2\pi N_0^2, \quad C_x^* = 2\pi N_0^2 \quad (3.3)$$

Графики параметров  $l, C_x^*, -p_{00}$  в зависимости от  $\theta_0$ , полученные на основании (3.1)–(3.3), выражений для  $b_0$  и  $B_0$  в (2.2) и кривой  $T(l)$  (фиг. 3), представлены на фиг. 4. (Что касается течения в слое смешения, области возвратных токов и окрестности точки смыкания последней, то здесь можно повторить сказанное для  $l > 1$ .)

Итак, получено решение для всех конечных значений длины зоны отрыва  $l$  в зависимости от параметра  $\theta_0$ . При больших его значениях  $l \rightarrow \infty$  и происходит переход к решению по схеме Кирхгофа. По мере уменьшения  $\theta_0$  (фиг. 4) точка смыкания приближается

к задней кромке ромба, так что  $l = 1$  при  $\theta_0 = \theta_{00} = 0.363$ . Однако эта монотонная зависимость, вопреки интуитивным представлениям, нарушается и решение с  $l < 1$  возможно лишь при  $\theta_0 > \theta_{00}$  (фиг. 4). Причем зависимость для  $\theta_0$  при  $l \rightarrow 1 - 0$  отличается от соответствующей при  $l \rightarrow 1 + 0$  (см. (2.6)) и имеет вид

$$\theta_0 = \theta_{00} + (1-l)^{1/2} \theta_{01}^* + O((1-l)), \quad \theta_{01}^* = 0.256$$

Таким образом, полученное решение двузначно (фиг. 4) при  $\theta_{00} < \theta_0 < \theta_r$ , где  $\theta_r = 0.565$  и соответствует значению  $l = 0$ . Заметим, что  $p_{00} \rightarrow -\infty$  при  $l \rightarrow 0$ .

4. Прежде чем переходить к изучению течения при  $l \rightarrow 0$ , рассмотрим решение вблизи точки схода (срыва) пограничного слоя с вершины ромба  $z = i\sigma\theta_0$ . Как уже отмечалось, в малой ее окрестности лежит область взаимодействия и соответствующее решение было получено в [12], гл. 2. Это решение для рассматриваемого течения справедливо, если только  $\sigma \text{Re}^{1/4} \rightarrow \infty$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Если же  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$ , то оно претерпевает некоторые изменения. Покажем, что это так. Согласно (2.2), (3.1) при  $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= U_1 - iV_1 = -p_{00} - i\theta_0 + i2k_0 z^{1/2} + O(z^{3/2}) \\ l > 1: k_0 &= \frac{\theta_0 b_0}{\pi l^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{l}\right) \\ l < 1: k_0 &= \frac{\theta_0}{\pi l^{1/2}} \left[ b_0 \left(1 + \frac{1}{l}\right) + \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{l}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Во введенной выше системе координат  $x^\circ, y^\circ$ , связанной с поверхностью ромба и началом в точке  $z = i\sigma\theta_0$ , из (4.1) получаем выражения для давления на теле и формы свободной линии тока

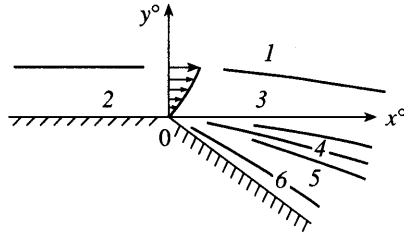
$$\begin{aligned} y^\circ &= +0, \quad x^\circ \rightarrow -0: p = \sigma(p_{00} + 2k_0(-x^\circ)^{1/2} + O((-x^\circ)^{3/2})) + O(\sigma^2) \\ y_s &= \sigma\Phi_1(x^\circ) + \sigma^2\Phi_2(x^\circ) + o(\sigma^2) \\ x^\circ \rightarrow -0: \Phi_1 &= -\frac{4}{3}k_0 x^{\circ 3/2} + O(x^{\circ 5/2}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрение следующего приближения (порядка  $\sigma^2$ ) при  $\sigma \text{Re}^{1/4} \rightarrow \infty$  указывает на то, что (см. (1.3)) аналитическая функция  $\omega_2 = O(z^{-1/2})$  при  $z \rightarrow 0$ . (Относительно второго приближения для слабо возмущенных течений со свободными линиями тока см. [35].) Причем это общее свойство решения в окрестности точки схода свободной линии тока и оно справедливо также и для гладких тел [28]. Но тогда, согласно (4.1), асимптотическое разложение для  $\omega(z)$  из (1.3) теряет свою равномерную пригодность, если  $\sigma z^{1/2} = O(\sigma^2 z^{-1/2})$ , т.е. при  $z = O(\sigma)$ . Однако это обстоятельство не приводит к каким-либо существенным изменениям, в частности к сдвигу положения точки отрыва.

При  $\sigma = \text{Re}^{-1/4}$  эффект вязкости – влияние слоя смешения и пограничного слоя на течение в области внешнего потенциального потока – дается членами порядка  $\text{Re}^{-1/2}$ , т.е. того же порядка, что и второе приближение в рамках идеальной жидкости:  $O(\sigma^2)$ . Вблизи точки срыва ( $z \rightarrow 0$ ), как это будет показано, влияние вязких эффектов оказывается доминирующим.

Приходящий к угловой точке пограничный слой (обл. 2, фиг. 5) описывается решением Прандтля–Блазиуса (1.5). Проходя через некоторую малую окрестность этой точки профиль скорости при  $Y = O(1)$  остается неизменным и, следовательно, определяет на-





Фиг. 5. Асимптотическая структура характерных областей (1–6) течения вблизи угловой точки

чальное условие для слоя смешения (обл. 3). Таким образом, задача для слоя смешения имеет вид [33]

$$s = O(1), \quad n = \text{Re}^{-1/2} N, \quad N = O(1)$$

$$\psi = \text{Re}^{-1/2} \psi_0(s, N) + O(\text{Re}^{-3/4})$$

$$p = \text{Re}^{-1/4} p_{00} + \text{Re}^{-1/2} p_1(s, N) + O(\text{Re}^{-3/4})$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial N} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial s \partial N} - \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial N^2} = \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial N^3}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial N} = 0 \tag{4.3}$$

$$N \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_0}{\partial N} \rightarrow 1, \quad N = 0: \psi_0 = 0$$

$$N \rightarrow -\infty: \frac{\partial \psi_0}{\partial N} \rightarrow 0, \quad \psi_0(+0, N) = F_0(N)$$

$$F_0'(\infty) = 1, \quad N \rightarrow +0: F_0 = \frac{a_0}{2} N^2 - \frac{a_0^2}{240} N^5 + O(N^8)$$

Функция Прандтля – Блазиуса  $F_0(N)$  не удовлетворяет условию при  $N \rightarrow -\infty$ , и поэтому при  $s \rightarrow +0$ , как и в задаче о ближнем следе [36], в нижней части слоя смешения возникает вязкий подслой. Асимптотическое разложение здесь (обл. 4) имеет вид [37, 34]

$$s \rightarrow +0, \quad \eta = N/s^{1/3} = O(1)$$

$$\psi_0 = s^{2/3} f_0(\eta) + s^{5/3} f_1(\eta) + O(s^{8/3})$$

$$f_0''' + \frac{2}{3} f_0 f_0'' - \frac{1}{3} f_0'^2 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: f_0 = \frac{a_0}{2} (\eta + \eta_0)^2 + o(1), \quad f_0(0) = f_0'(-\infty) = 0 \tag{4.4}$$

$$f_1''' + \frac{2}{3} f_0 f_1'' - \frac{5}{3} f_0' f_1' + \frac{5}{3} f_0'' f_1 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: f_1 = -\frac{a_0^2}{240}(\eta + \eta_0)^5 - \frac{a_0}{4}(\eta + \eta_0)^2 + m_1 a_0^{2/3}(\eta + \eta_0) + o(1)$$

$$f_1(0) = f_1'(-\infty) = 0$$

Краевые условия при  $\eta \rightarrow \infty$  для  $f_0(\eta), f_1(\eta)$  обеспечивают, согласно (4.3), сращивание с разложением в основной части слоя смешения (обл. 3) при  $N \rightarrow +0$ . Задача для функции  $f_0(\eta)$  в (4.4) впервые сформулирована и решена в [37] при рассмотрении течения вниз по потоку от точки отрыва в сверхзвуковом потоке газа. Было установлено в частности, что  $f_0(-\infty) = -d_0 a_0^{1/3}$ ,  $d_0 = 1.2539$ . Математический анализ этой задачи представлен в [38]. В данной работе при численном решении бралось уточненное значение  $d_0 = 1.258146$  из [39]. В результате получены следующие значения для постоянных:

$$\begin{aligned} f_0'(0) &= 0.934 a_0^{2/3}, \quad f_0''(0) = 0.612 a_0, \quad \eta_0 = 0.616 a_0^{-1/3} \\ f_1'(0) &= -0.219 a_0^{2/3}, \quad f_1''(0) = -0.314 a_0, \quad m_1 = 0.093 \\ f_0(-\infty) &= -d_0 a_0^{1/3}, \quad f_1(-\infty) = 0.060 a_0^{1/3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Значения для  $f_0'(0)$  и  $\eta_0$  близки к приведенным в [34]. Заметим также, что при решении задачи для уравнения с  $f_1(\eta)$  в (4.4) использовался тот факт, что  $f_0'(\eta)$  одно из его линейно независимых решений.

Из разложений для  $f_0(\eta)$  и  $f_1(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$  и для  $\psi_0(s, N)$  при  $s \rightarrow +0$  в (4.4), а также уравнения для  $\psi_0(s, N)$  в (4.3) находим, что, как и в [36], при  $s \rightarrow +0, N = O(1)$

$$\psi_0 = F_0(N) + s^{1/3} \eta_0 F_0'(N) + s^{2/3} \frac{\eta_0^2}{2} F_0''(N) + O(s) \quad (4.6)$$

Переходя к прямоугольной системе координат  $x^\circ, y^\circ$  и учитывая, что  $\sigma^2 = \text{Re}^{-1/2}$ , на основании (4.3), (4.6), (4.2) получаем разложения для соответствующих составляющих вектора скорости при  $x^\circ \rightarrow +0, Y = \text{Re}^{1/2} y^\circ = O(1)$

$$\begin{aligned} U^\circ &= [F_0'(Y) + x^{\circ 1/3} \eta_0 F_0''(Y) + O(x^{\circ 2/3})] + O(\sigma) \\ V^\circ &= \sigma[-2k_0 x^{\circ 1/2} F_0'(Y) + O(x^{\circ 5/6})] + \\ &+ \sigma^2 \left[ -x^{\circ -2/3} \frac{\eta_0}{3} F_0'(Y) + \Phi_2'(x^\circ) F_0'(Y) + O(x^{\circ -1/3}) \right] + o(\sigma^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для определения поведения функции  $\Phi_2(x^\circ)$  из (4.2) при  $x^\circ \rightarrow +0$  обратимся к рассмотрению течения в области медленных возвратных токов. Движение здесь [24] обусловлено эжекцией слоя смешения, и поэтому справедливо представление решения в виде

$$\begin{aligned} x^\circ &= O(1), \quad y^\circ = \sigma Y^\circ, \quad \psi = \text{Re}^{-1/2} \Psi^\circ(x^\circ, Y^\circ) + o(\text{Re}^{-1/2}) \\ p &= \text{Re}^{-1/4} p_{00} + \text{Re}^{-1/2} P^\circ(x^\circ, Y^\circ) + o(\text{Re}^{-1/2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Функции  $\Psi^\circ(x^\circ, Y^\circ)$ ,  $P^\circ(x^\circ, Y^\circ)$  удовлетворяют [24] уравнениям идеальной жидкости в тонком слое, так что  $\partial P^\circ / \partial Y^\circ = 0$ . На основании (4.4), (4.5):  $\psi_0(s, -\infty) = -d_0 a_0^{1/3} s^{2/3} + O(s^{5/3})$  при  $s \rightarrow +0$ , и тогда, следуя [37], находим, что при  $x^\circ \rightarrow +0$  (обл. 5, фиг. 5)

$$\begin{aligned} \Psi^\circ &= -c_0 x^{\circ 2/3} (\zeta + 2\theta_0) + o(x^{\circ 2/3}), \quad \zeta = Y^\circ / x^\circ = O(1) \\ P^\circ &= -\frac{c_0^2}{2} x^{\circ -2/3} + o(x^{\circ -2/3}), \quad c_0 = \frac{d_0 a_0^{1/3}}{2\theta_0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Это разложение удовлетворяет условию сращивания с разложением (4.4) (обл. 4) при  $\zeta \rightarrow -0$  и  $\eta \rightarrow -\infty$ , а также условию непротекания на стороне ромба  $Y^\circ = -2\theta_0 x^\circ$ . Вблизи нее для выполнения условия прилипания необходимо введение вязкого слоя (обл. 6) того же вида, что и в [37]

$$\begin{aligned} x^\circ \rightarrow +0: \psi &= \text{Re}^{-5/8} [x^{\circ 1/3} \phi_0(\tau) + o(x^{\circ 1/3})] + o(\text{Re}^{-5/8}) \\ y^\circ + \sigma 2\theta_0 x^\circ &= \text{Re}^{-3/8} y^*, \quad \tau = y^* / x^{\circ 2/3} \\ \phi_0''' + \frac{1}{3} \phi_0 \phi_0'' + \frac{1}{3} \phi_0'^2 &= \frac{c_0^2}{3}, \quad \phi_0(0) = \phi_0'(0) = 0, \quad \phi_0'(\infty) = -c_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнение для  $\phi_0(\tau)$  относится к типу Фолкнера – Скэн ([29], с. 251), и его численное решение дано также в [37] и [40].

Вернемся к рассмотрению течения в слое смешения. Поперечное изменение давления проявляется здесь в члене  $O(\text{Re}^{-3/4})$  из (4.3). Это означает, что в этом слое давление в главных членах то же, что и в области отрыва. Поэтому, согласно (4.8), (4.9), (4.3), при  $x^\circ \rightarrow +0$

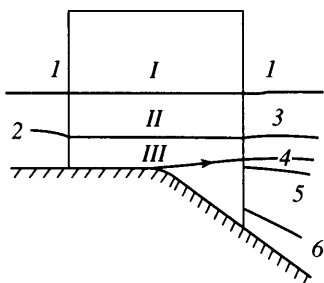
$$p = \sigma p_{00} + \sigma^2 (-c_0^2/2) x^{\circ -2/3} + o(\sigma^2 x^{\circ -2/3}) \quad (4.11)$$

Используя интеграл Бернулли и выражения (1.3), (4.1), (4.11), находим, следуя [6], что в области внешнего потенциального потока (обл. 1, фиг. 5) при  $z^\circ = x^\circ + iy^\circ \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^\circ(z^\circ) = u^\circ - iv^\circ = 1 + \sigma [-p_{00} + i2k_0 z^{\circ 1/2} + O(z^{\circ 3/2})] + \\ &+ \sigma^2 [M_0(z^\circ) + o(z^{\circ -2/3})] + o(\sigma^2), \quad M_0 = (\beta_0 + i\beta_1) z^{\circ -2/3} \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\beta_0, \beta_1$  – пока произвольные постоянные. Из сращивания с решением Прандтля-Блазиуса (1.5) (обл. 2) следует [6], что  $\text{Im} M_0 = 0$  при  $\arg z^\circ = \pi$ . Сращивание с решением для слоя смешения (обл. 3), в соответствии с (4.7) и (4.11), дает:  $\text{Im} M_0 = \eta_0 x^{\circ -2/3} / 3 - \Phi_2'(x^\circ)$  и  $\text{Real} M_0 = c_0^2 x^{\circ -2/3} / 2$  при  $\arg z^\circ = 0$ . Для удовлетворения этим трем условиям для  $M_0(z^\circ)$  необходимо кроме двух постоянных  $\beta_0$  и  $\beta_1$  иметь еще одну. Поэтому, полагая  $\Phi_2 = \mu_0 x^{\circ 1/3} + o(x^{\circ 1/3})$  при  $x^\circ \rightarrow +0$ , находим, что указанные условия выполняются, если  $\beta_1 = -\sqrt{3} \beta_0$ ,  $\beta_1 = (\eta_0 - \mu_0) / 3$ ,  $\beta_0 = c_0^2 / 2$ . Тогда окончательно

$$\beta_0 = \frac{c_0^2}{2}, \quad \beta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} c_0^2, \quad \mu_0 = \eta_0 - \frac{3\sqrt{3}}{2} c_0^2 \quad (4.13)$$



Фиг. 6. Трехслойная (обл. I-III) асимптотическая структура области взаимодействия

Постоянные  $\eta_0$  и  $c_0$  определяются выражениями в (4.5) и (4.9). Таким образом, получено выражение для формы разделительной линии тока при  $x^\circ \rightarrow +0$  во втором приближении.

Асимптотическое разложение (4.12) теряет равномерную пригодность при  $z^\circ = O(\sigma^{6/7}) = O(\text{Re}^{-3/14})$ . Однако эта область не является характерной, и решение в ней есть полученное решение, переписанное во внутренних переменных. Характерная здесь – область взаимодействия, для которой  $z^\circ = O(\varepsilon^3)$ ,  $\varepsilon = \text{Re}^{-1/8}$  и имеющая известную трехслойную структуру ([11–14]).

В вязком пристеночном слое (обл. III, фиг. 6) решение ([8–14]) имеет вид

$$\begin{aligned} x^\circ &= \varepsilon^3 x^*, & y^\circ &= \varepsilon^5 Y^* \\ \psi &= \varepsilon^6 \Psi^*(x^*, Y^*) + O(\varepsilon^7), & p &= \varepsilon^2 [p_{00} + p^*(x^*)] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.14)$$

и искомые функции удовлетворяют уравнению пограничного слоя Прандтля при крайних условиях

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2} \partial Y^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}} + \frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial Y^{*3}}$$

$$Y^* = f^*(x^*); \quad \Psi^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} = 0$$

$$x^* \rightarrow -\infty: \quad \Psi^* = (-x^*)^{2/3} \frac{a_0}{2} \eta^{*2} + (-x^*)^{-2/3} F_1(\eta^*) + \dots$$

$$\eta^* = \frac{Y^*}{(-x^*)^{1/3}}, \quad p^* = c_0^2 (-x^*)^{-2/3} + \dots$$

$$x^* \rightarrow \infty: \quad \Psi^* = x^{*2/3} f_0(\eta) + \dots \quad \eta = \frac{Y^* - \mu_0 x^{*1/3}}{x^{*1/3}} \quad (4.15)$$

$$\Psi^* = -c_0 x^{*2/3} (\zeta + 2\theta_0) + \dots \quad \zeta = Y^*/x^*$$

$$\Psi^* = x^{*1/3} \phi_0(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{Y^* + 2\theta_0 x^*}{x^{*2/3}}$$

$$p^* = -\frac{c_0^2}{2} x^{*-2/3} + \dots$$

$$Y^* \rightarrow \infty: \Psi^* = \frac{a_0}{2} Y^{*2} + a_0 A(x^*) Y^* + O(1)$$

где  $A(x^*)$  и  $p^*(x^*)$  – неизвестные заранее функции. Первое из краевых условий обеспечивает прилипание на поверхности, форма которой определяется функцией  $f^*(x^*)$ . Последняя может быть взята слегка сглаженной вблизи точки излома, например [23]:  $f^* = -\theta_0(x^* + (x^{*2} + r_0^2)^{1/2})$ , где  $r_0$  – достаточно малое число. Условие при  $x^* \rightarrow -\infty$  обеспечивает сращивание с приходящим профилем скорости Прандтля–Блазиуса, а второй член здесь обусловлен градиентом давления, и функция  $F_1(\eta^*)$  есть [6]

$$F_1 = \frac{c_0^2}{a_0} \left[ A^* \eta^{*2} U\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{a_0 \eta^{*3}}{9}\right) + 1 \right], \quad A^* = -\left(\frac{a_0}{9}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)}$$

$$F_1(0) = F_1'(0) = 0, \quad \eta^* \rightarrow \infty: F_1 = B^* \eta^* + c_0^2 a_0^{-1} + O(\eta^{*-2}) \tag{4.16}$$

$$B^* = (9a_0^{-4})^{1/3} A^* c_0^2, \quad F_1''(0) = -(9^{1/3} A^* c_0^2) a_0^{-5/3}$$

где  $U(\cdot)$  – функция Трикоми – одно из линейно независимых решений уравнения для вырожденной гипергеометрической функции. Вид асимптотик для  $p^*(x^*)$  при  $|x^*| \rightarrow \infty$  следует из (4.12), (4.13). Представления для  $\Psi^*(x^*, Y^*)$  при  $x^* \rightarrow \infty$  и  $\eta = O(1)$ ,  $\zeta = O(1)$ ,  $\tau = O(1)$  обеспечивают сращивание с разложениями (4.4), (4.9), (4.10) для областей 4, 5, 6 соответственно (фиг. 6). Наконец разложение при  $Y^* \rightarrow \infty$  дает выход в основную часть области взаимодействия (обл. II). Здесь, как известно [8–14]

$$\psi = \varepsilon^4 [F_0(Y) + \varepsilon A(x^*) F_0'(Y) + O(\varepsilon^2)], \quad y^o = \varepsilon^4 Y$$

и для давления справедливо разложение (4.14). Функция  $-A'(x^*)$  определяет наклон линий тока в этой области. Из асимптотик при  $x^* \rightarrow -\infty$  в (4.15) и  $\eta^* \rightarrow \infty$  в (4.16) находим, что  $a_0 A \rightarrow B^*/(-x^*)$  при  $x^* \rightarrow -\infty$ . Аналогично, представление для  $x^* \rightarrow \infty$ ,  $\eta = O(1)$  в (4.15) вместе с разложением функции  $f_0(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$  в (4.4) дают:  $A \rightarrow (\eta_0 - \mu_0)x^{*1/3}$ ,  $x^* \rightarrow \infty$ . Наконец из рассмотрения слабо возмущенного течения в области I, где  $y^o = O(\varepsilon^3)$ , получается известная [8–13] связь

$$p^*(x^*) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A'(t) dt}{t - x^*} \tag{4.17}$$

замыкающая задачу для области взаимодействия.

Отличительной чертой рассматриваемой задачи является то, что при подходе к выпуклому углу ( $x^o \rightarrow -0$ ) градиент давления в (4.2), как обычно, благоприятен, но затем в упомянутой выше промежуточной области, где  $|x^o| = O(\text{Re}^{-3/14})$ , он меняет знак и перед областью взаимодействия становится экстремально неблагоприятным (см. (4.15),  $x^* \rightarrow -\infty$ ). Необходимо подчеркнуть также, что если толщина ромба по порядку величины становится больше, чем  $\text{Re}^{-1/4}$ , что соответствует  $\theta_0 \rightarrow \infty$ , то в (4.9)  $c_0 \rightarrow 0$  и сформулированная задача (4.15)–(4.17) переходит в задачу из [12] (с. 64–65). При этом в окрестности точки схода свободной линии тока с угла внутри области взаимодействия оно переходит в решение из [34]: в (4.13)  $\mu_0 \rightarrow \eta_0$ .

В заключение заметим, что аффинное преобразование [2]

$$x^* = a_0^{-5/4} x', \quad Y^* = a_0^{-3/4} y', \quad \Psi^* = a_0^{-1/2} \Psi', \quad p^* = a_0^{1/2} p', \quad A = a_0^{-3/4} A'$$

приводит (4.15)–(4.17) к задаче того же вида, но с  $a_0 = 1$  и единственной постоянной  $\alpha_0 = -2a_0^{-1/2} \theta_0$  вместо  $-2\theta_0$ .

5. Перейдем к анализу течения при значениях параметра  $\theta_0$ , близких к критическому:  $\theta_0 = \theta_r$ , когда длина зоны отрыва  $l$  мала (фиг. 4). Пусть  $l = \Delta_0 l_0$ , где  $l_0$  – положительная постоянная и  $\Delta_0$  – малый параметр:  $\Delta_0(\text{Re}) \rightarrow 0$  при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Из решения для слоя смешения (4.3)–(4.5) следует, что интеграл сил трения

$$T(l) = \Delta_0 2f_0''(0)l_0 + \Delta_0^2 f_1''(0)l_0^2 + O(\Delta_0^3)$$

В то же время, согласно (3.2), (3.3),

$$T(l) = \Delta_0 \frac{4\theta_0^2}{\pi} l_0 + O(\Delta_0^3)$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_r + \Delta_0 \theta_{r1} l_0 + O(\Delta_0^2), \quad l = \Delta_0 l_0 \\ \theta_r &= \left( \frac{\pi f_0''(0)}{2} \right)^{1/2} = 0.565, \quad \theta_{r1} = \theta_r \frac{f_1''(0)}{4f_0''(0)} = -0.072 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В масштабах тела, путем предельного перехода  $z = O(1)$ ,  $l = \Delta_0 l_0 \rightarrow 0$  в (3.1)–(3.3), приходим к решению о безотрывном обтекании тонкого ромба

$$\omega_1 = \frac{\theta_r}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{z+1}{z} \right) + \ln \left( \frac{z-1}{z} \right) \right] + O(\Delta_0) \quad (5.2)$$

Логарифмические особенности вблизи передней и задней кромок ( $z = \mp 1$ ) ([12], гл. 3) устраняются путем введения областей с размерами порядка  $\text{Re}^{-1}$  и  $\text{Re}^{-3/8}$  соответственно.

Вблизи вершины ромба  $z = i\sigma\theta_0$  лежит область, где  $z = O(\Delta_0)$ , в которой находится область отрыва. Действительно, полагая  $Z_0 = \Delta_0^{-1} z = O(1)$ ,  $\Delta_0 = l/l_0 \rightarrow 0$  в (3.1)–(3.3) и с учетом (5.1), получаем решение

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega_0(Z_0) + O(\Delta_0), \quad z = \Delta_0 Z_0, \quad Z_0 = X_0 + iY_0 \\ \Omega_0 &= -i\theta_r + i \frac{4\theta_r}{\pi} \arctg \left( \frac{Z_0^{1/2}}{(l_0 - Z_0)^{1/2}} \right) - \frac{2\theta_r}{\pi} \frac{Z_0^{1/2}}{(Z_0 - l_0)^{1/2}} - P_{00}^* \\ P_{00}^* &= -\frac{2\theta_r}{\pi} \ln \left( \frac{4}{\Delta_0 l_0} \right) - \frac{2\theta_r}{\pi} \end{aligned} \quad (5.3)$$

При  $Z_0 \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow 0$  разложения (5.3) и (5.2) удовлетворяют условиям сращивания. Мнимая часть выражения (5.3) при  $0 < X_0 < l_0$ ,  $Y_0 = +0$  определяет форму свободной линии тока, поэтому с учетом (1.3)

$$y_s - \sigma\theta_0 = \text{Re}^{-1/4} \Delta_0 Y_s(X_0) + o(\text{Re}^{-1/4} \Delta_0)$$

$$Y_s = \theta_r X_0 + \int_0^{X_0} V_0^*(t) dt \quad (5.4)$$

$$V_0^* = -\frac{4\theta_r}{\pi} \text{arctg} \left( \frac{X_0^{1/2}}{(l_0 - X_0)^{1/2}} \right) - \frac{2\theta_r}{\pi} \frac{X_0^{1/2}}{(l_0 - X_0)^{1/2}}$$

Вдоль этой линии развивается слой смешения, имеющий в силу малости  $l$  двухслойную структуру: основная часть, где  $N = O(1)$  (см. (4.3), (4.6)), и подслой. В последнем, согласно (4.3), (4.4)

$$s = \Delta_0 s^*, \quad n = \text{Re}^{-1/2} \Delta_0^{1/3} n^*, \quad \psi = \text{Re}^{-1/2} \Delta_0^{2/3} \psi^*(s^*, n^*) + o(\text{Re}^{-1/2} \Delta_0^{2/3})$$

$$\psi^* = s^{*2/3} f_0(\eta), \quad \eta = n^*/s^{*1/3}$$

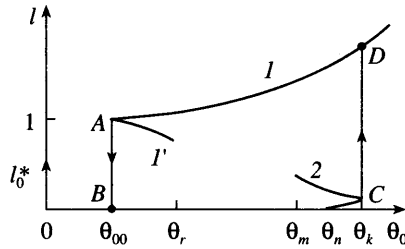
Следовательно, в области возвратных токов  $\psi = O(\text{Re}^{-1/2} \Delta_0^{2/3})$ ,  $y - \sigma\theta_0 = O(\text{Re}^{-1/4} \Delta_0)$  (см. (5.4)), и тогда  $u = O(\text{Re}^{-1/4} \Delta_0^{-1/3})$ , а переменная часть давления  $O(\text{Re}^{-1/2} \Delta_0^{-2/3})$ . Из этих выражений следует, что как только  $\Delta_0 = \varepsilon^3$  область возвратных токов и слой смешения сливаются в единую область – вязкий подслей области взаимодействия, для которого решение представляется в виде (4.14).

Таким образом, рассмотренный режим течения со слоем смешения и развитой областью возвратных токов (хотя и малых размеров) имеет место, если только  $\Delta_0 \gg \varepsilon^3$ .

6. Итак при обтекании ромба при  $\text{Re} \rightarrow \infty$  по мере уменьшения его толщины  $\theta^*$  происходит монотонный переход от течения [24] с длиной зоны отрыва  $L_0 = O(\text{Re})$  (при  $\theta^* = O(1)$ ) до конечных ее размеров ( $L_0 = l = O(1)$ ) при  $\theta^* = O(\text{Re}^{-1/4})$ . Дальнейшее уменьшение  $\theta_0 = \theta^* \text{Re}^{1/4}$  также ведет к сокращению  $l$  вплоть до значения  $l = 1$ , когда точка смыкания зоны отрыва приходит к задней кромке (кривая  $l$ , фиг. 7) при  $\theta_0 = \theta_{00} = 0.363$ . Дальнейшее уменьшение  $l$  возможно лишь при увеличении  $\theta_0$  (кривая  $l'$ ) вплоть до значения  $\theta_0 = \theta_r = 0.565$ . Точнее, при  $\theta_0 - \theta_r = O(\Delta_0)$  величина  $l = O(\Delta_0)$ , где  $\Delta_0(\text{Re}) \rightarrow 0$  и  $\Delta_0 \geq O(\varepsilon^3)$ ,  $\varepsilon = \text{Re}^{-1/8} \rightarrow 0$  (см. (5.1)).

Обратимся теперь к решению в окрестности точки излома, когда отрывное течение локализовано в пристеночном слое [1, 2] с размерами  $x^\circ = O(\varepsilon^3)$ ,  $y^\circ = O(\varepsilon^5)$ . Согласно [15, 22, 23], при  $\theta_0 = \theta_n$  (численные значения  $\theta_n$  равны соответственно 1.6, 1.7, 1.50) поверхностное трение впервые обращается в нуль и с ростом  $\theta_0$  увеличивается и параметр длины зоны отрыва  $l_0^* = l/\varepsilon^3$  (кривая 2, фиг. 7). Однако диапазон роста  $\theta_0$  ограничен значением  $\theta_k$ . (Согласно [22] и [23]  $\theta_k$  равно 1.9 и 1.71.) Затем происходит поворот кривой 2 и резкий рост  $l_0^*$ . Минимальное значение  $\theta_0 = \theta_m$ , до которого удалось произвести расчет, это  $\theta_m = 1.34$  в [23] (фиг. 7).

Заметим, что кривые  $l$  и  $l'$  с фиг. 7 представлены в виде графиков на фиг. 4, а кривая 2 – на фиг. 1. Обозначения в [2, 15, 22, 23] связаны с используемыми в данной работе равенствами:  $\theta_0 = -a_0^{1/2} \alpha/2$ ,  $l = \varepsilon^3 a_0^{-5/4} \lambda$ ,  $a_0 = 0.3321$ .



Фиг. 7. Схематическое изображение зависимости длины зоны отрыва  $l$  от  $\theta_0$

Таким образом, кривая  $I'$  и верхняя ветвь кривой 2 проявляют тенденцию к сближению, однако остается не ясным: каково решение при  $\theta_r < \theta_0 < \theta_m$ , если двигаться из точки  $C$  в сторону точки  $A$ . Возможно при этом, как было указано в [22], в решении возникнет особенность Смита [17] при некотором  $\theta_0$  из  $(\theta_r, \theta_m)$ . Реальный смысл, как и в других подобных ситуациях [28, 27, 41], имеют, по-видимому, только кривая  $I$  и нижняя ветвь кривой 2 (фиг. 7). Это связано с тем, что если двигаться по кривой  $I$ , то по достижении точки  $A$  произойдет скачкообразный переход [28] в точку  $B$  на нижней ветви кривой 2. Если же двигаться из состояния полностью безотрывного течения ( $\theta_0 = l = 0$ ) по кривой 2, то из точки  $C$  также произойдет переход в точку  $D$  на кривой  $I$ .

**Заключение.** Показано, что когда величина излома выпуклого угла есть величина порядка  $Re^{-1/4}$ , то наряду с известным двузначным решением, описывающим течения с локальными зонами отрыва, существует и второе, также двузначное решение, но соответствующее течениям с развитыми зонами отрыва. Вопрос о возможности перехода верхней ветви первого из решений в нижнюю ветвь второго решения остается открытым.

Автор благодарит М.А. Кравцову за помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00765), Государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-8597.2006.1) и ВЦП РНПВШ.2.1.1.5904.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений со срывными зонами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 22–32.
2. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1970. V. 23. Pt 2. P. 137–152.
3. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
4. Stewartson K., Williams P.G. Self – induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
5. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate II // Mathematika. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106–121.
6. Messiter A. F. Boundary – layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
7. Сычев В.В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 47–59.
8. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies//Advances in Applied Mechanics. N.Y.: Acad.Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
9. Messiter A. F. Boundary – layer separation // Proc. 8<sup>th</sup> U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., North Hollywood, Western Periodicals, 1979. P. 157–179.
10. Smith F. T. On the high Reynolds number theory of laminar flows//IMA J. Appl. Math. 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
11. Recent Advances in Boundary Layer Theory / Ed. Kluwick A. Wien: Springer – Verlag, 1998. 330p.



12. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик. В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 256 с.
13. Жук В. И. Волны Толлмина-Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
14. Нейланд В.Я., Боголопов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 456 с.
15. Рубан А.И. К теории ламинарного отрыва жидкости от точки излома твердой поверхности // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 4. С. 18–28.
16. Smith F. T., Merkin J. H. Triple-deck solutions for subsonic flow past humps, steps, concave or convex corners and wedged trailing edges // Intl. J. Comput. Fluids. 1982. V. 10. № 1. P. 7–25.
17. Smith F. T. A reversed-flow singularity in interacting boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1988. V. 420. № 1858. P. 21–52.
18. Королев Г.Л. К асимптотической теории ламинарного отрыва жидкости при обтекании угла малого излома // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 180–182.
19. Жук В.И. Асимптотическая модель замкнутой срывной зоны в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 76–84.
20. Korolev G.L., Gajjar J.S.B., Ruban A. I. Once again on the supersonic flow separation near a corner // J. Fluid Mech. 2002. V. 463. P. 173–199.
21. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners. Corrections and an addition // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1971. V. 24. Pt 3. P. 387–389.
22. Королев Г.Л. О неединственности отрывного обтекания углов малого излома // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 178–180.
23. Kravtsova M.A., Zametaev V.B., Ruban A. I. An effective numerical method for solving viscous–inviscid interaction problems // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 2005. V. 363. № 1830. P. 1157–1167.
24. Сычев В.В. Об установившемся ламинарном течении жидкости за тупым телом при большом числе Рейнольдса // Докл. на 8-м Симпоз. по совр. проблемам механики жидкостей и газов. Варда, Польша, 1967. 25 с.
25. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.
26. Tulin M.P. Supercavitating flows – small perturbation theory // J. Ship. Res. 1964. V. 7. № 3. P. 16–37.
27. Сычев Вик. В. О течении при больших числах Рейнольдса около пластины, установленной под малым углом атаки // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 85–104.
28. Cheng H.K., Smith F.T. The influence of airfoil thickness and Reynolds number on separation // ZAMP. 1982. V. 33. № 2. P. 151–180.
29. Laminar boundary layers / Ed Rosenhead L. Oxford: Clarendon Press, 1963. 688 p.
30. Wu T.Y. Cavity and wake flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 243–284.
31. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
32. Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 20–30.
33. Denison M.R., Baum E. Compressible free shear layer with finite initial thickness // AIAA J. 1963. V. 1. № 2. P. 342–349.
34. Daniels P.G. A numerical and asymptotic investigation of boundary-layer wake evolution // J. Inst. Maths Applics. 1976. V. 17. № 3. P. 367–386.
35. Chen C.F. Second-order supercavitating hydrofoil theory // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt. 3. P. 321–332.
36. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics // Proc. Camb. Phil. Soc. 1930. V. 26. Pt 1. P. 1–30.
37. Нейланд В. Я. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 19–25.
38. Диесперов В. Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403–414.
39. van Dommelen L.L., Shen S.F. Interactive separation from a fixed wall // Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows II / Ed. Cebeci. T. N. Y.: Springer, 1984. P. 393–402.
40. Burggraf O.R., Stewartson K., Belcher R. Boundary layer induced by a potential vortex // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 9. P. 1821–1833.
41. Сычев Вик.В. Об обтекании дужки при больших числах Рейнольдса с образованием локальных зон отрыва // Учен. зап. ЦАГИ. 2006. Т. 37. № 1–2. С. 26–33.