

УДК 532.517.4:519.69

© 2007 г. Т.В. ВОРОНОВА, Н.В. НИКИТИН

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРЯМОГО РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

В рамках полных уравнений Навье–Стокса проведен прямой расчет турбулентного течения в трубе эллиптического сечения с соотношением полуосей $b/a = 0.5$ при числе Рейнольдса $Re = 6000$, определенном через среднюю расходную скорость и гидравлический диаметр. Получены распределения средних и пульсационных характеристик движения по сечению трубы. В частности, рассчитано вторичное течение в плоскости поперечного сечения, свойственное турбулентным течениям в некруглых трубах. Приведен анализ уравнения для продольной завихренности, определяющей форму и интенсивность вторичного течения. Описано поведение всех членов уравнения баланса кинетической энергии пульсаций, характеризующих производство, диссипацию и перераспределение энергии по сечению трубы.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, турбулентное течение, эллиптическая труба, кинетическая энергия пульсаций, вторичное течение.

Необходимость адекватного разрешения всех динамических значимых масштабов на расчетной сетке ограничивает применение прямых расчетов турбулентных течений простейшими геометриями. Так, в классе пристенных течений большинство расчетов было проведено для таких простых случаев, как плоский канал, асимптотический пограничный слой над плоской пластиной, труба круглого сечения и т.д. [1–7]. Средние характеристики в этих течениях зависят лишь от одной пространственной координаты. Течения, средние характеристики которых зависят от двух координат, например, течения в некруглых трубах, интересны в прикладном и научном плане не только большей пространственной сложностью, но и наличием так называемых турбулентных вторичных течений, именуемых также вторичными течениями Прандтля 2-го рода. Вторичные течения – это организованные движения жидкости в плоскости, перпендикулярной к направлению основного потока. В отличие от вторичных течений Прандтля 1-го рода, возникающих в потоках вдоль вогнутой поверхности под действием центробежных сил как в турбулентных, так и в ламинарных потоках, вторичные течения Прандтля 2-го рода – исключительно турбулентное явление, вызываемое анизотропией компонент тензора напряжений Рейнольдса. Интенсивность турбулентных вторичных течений невелика (как правило 1–3% от средней скорости потока), однако их вклад в процессы переноса импульса, массы, примеси в поперечной к направлению потока плоскости весьма значителен. Непосредственное измерение вторичных течений в экспериментальных условиях затруднительно, поскольку их величина сравнима с точностью измерений. Отсутствие достоверных экспериментальных данных задерживает разработку приближенных методов расчета таких течений [8]. В этих условиях прямой расчет оказывается практически единственным источником надежной информации о свойствах и структуре вторичных течений в некруглых трубах.

До недавнего времени численное исследование турбулентных вторичных течений ограничивалось трубами прямоугольного сечения [9–11]. Развитие методов решения уравнений Навье –Стокса в сложной геометрии предоставляет новые возможности. В [12] рассчитаны турбулентные течения в трубах эллиптического сечения с помощью

метода виртуальных границ, позволяющего рассчитывать течения в областях сложной формы на простых декартовых сетках. Обладая замечательной универсальностью и эффективностью, этот метод неудобен, однако для исследования деталей течения в непосредственной близости от твердых границ области движения, где происходят основные процессы генерации турбулентности.

В ряде случаев геометрия движения допускает введение ортогональной системы координат так, что границы области течения являются координатными поверхностями. Тогда пристенные области могут быть подробно разрешены на простой расчетной сетке. В [13] разработан метод численного решения несжимаемых уравнений Навье–Стокса в произвольной криволинейной ортогональной системе координат, ориентированный на расчет турбулентных течений. Метод основан на конечно-разностной дискретизации по пространству с сохранением ряда важных локальных и интегральных свойств исходных дифференциальных уравнений. Для интегрирования по времени используется неявный метод Рунге–Кутты третьего порядка точности [4]. В [15] метод успешно применен для прямого расчета турбулентных течений в трубах с эксцентрическим кольцевым сечением, в [16] дано описание метода в применении к трубе с эллиптическим сечением.

В настоящей работе метод [13] применяется для прямого расчета турбулентного течения в трубе с эллиптическим поперечным сечением при $Re = 6000$. Эллиптическая труба является незначительной модификацией классической трубы и простейшим типом трубы некруглого сечения. В литературе (кроме упоминавшихся работ [12, 16]) отсутствуют какие-либо данные о свойствах и структуре турбулентных течений в таких трубах. Первые расчеты турбулентных течений в эллиптических трубах [12] позволили определить характерные черты этих течений. Однако ряд вопросов, касающихся деталей течения в пристенной области, остался без ответа из-за грубости применявшегося в [12] метода виртуальных границ. Цель настоящей работы – расчет и анализ течения с акцентом на изучение процессов генерации вторичных течений и кинетической энергии пульсаций – вопросов, не освещенных в достаточной мере в [12, 16].

1. Постановка и метод решения задачи. Течение несжимаемой жидкости в трубе эллиптического сечения описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \text{grad} \Pi - \nu \text{rot} \boldsymbol{\omega}, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u}, \quad \Pi = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$$

Здесь \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ – поля скорости и завихренности, p – давление, t – время, ρ , ν – постоянные плотность и вязкость жидкости. Областью решения является внутренность эллиптического цилиндра

$$\Omega = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1, 0 \leq z \leq L_z\}$$

Для определенности считается $a > b$.

На стенке трубы ставится условие прилипания:

$$\mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$$

Считается, что рассматриваемая труба конечной протяженности является участком бесконечно-длинной трубы, и течение статистически однородно вдоль продольной координаты z . Это является модельной идеализацией течения в длинной трубе на участке, достаточно удаленном от входного и выходного сечений. Предположение о продольной однородности позволяет использовать периодические граничные условия вдоль координаты z :

$$\mathbf{u}(t, x, y, z + L_z) = \mathbf{u}(t, x, y, z) \quad \forall t, x, y, z$$

Из периодичности скорости по z следует, что давление можно представить в виде

$$P(t, x, y, z) = -\rho D_p(t)z + q(t, x, y, z), \quad q(t, x, y, z + L_z) = q(t, x, y, z)$$

Линейная по z составляющая давления отвечает внешнему напору, создающему движение. D_p называется средним градиентом давления, положительное значение D_p соответствует силе, действующей в положительном направлении z .

Средний градиент давления $D_p = D_p(t)$ определяется в каждый момент времени из условия постоянства расхода жидкости:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad Q = \int_S u_z dx dy$$

В последнем выражении интеграл берется по площади поперечного сечения трубы и не зависит от z в силу несжимаемости жидкости. Интенсивность движения характеризуется значением числа Рейнольдса $Re = U_b D_h / \nu$, где $U_b = Q/S$ – средняя скорость движения, $D_h = 4S/L$ – гидравлический диаметр, S и L – площадь и периметр поперечного сечения трубы.

Технология прямых расчетов турбулентных течений в трубах состоит в следующем. В начальный момент времени задается некоторое трехмерное поле скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности. После чего уравнения движения интегрируются по времени до выхода решения на статистически стационарный режим. Характер предельного режима зависит от числа Рейнольдса и в некоторой степени от деталей начальных условий. При малых числах Рейнольдса единственный предельный режим представляет собой стационарное движение, не зависящее от координаты z – ламинарное течение. При больших числах Рейнольдса кроме ламинарного течения возможно установление турбулентного течения, характеризующегося нестационарным и непостоянным по z решением. Пороговое значение числа Рейнольдса, начиная с которого возможно установление турбулентного режима, зависит от конкретных геометрических параметров сечения трубы.

В настоящей работе начальное поле скорости задавалось в виде

$$\mathbf{u}(t = 0) = U_l(x, y)\mathbf{k}_z + \mathbf{v}(x, y, z)$$

где \mathbf{k}_z – единичный вектор в направлении z , U_l – скорость в течении Пуазейля: $U_l(x, y) = 2U_b(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$, а \mathbf{v} – некоторое возмущение, обладающее нулевым расходом. Поле \mathbf{v} должно быть бездивергентным, удовлетворять условию непротекания на стенке трубы и не содержать каких-либо симметрий, сохраняющихся в силу уравнений Навье–Стокса. Для достижения турбулентного режима необходимо также, чтобы пространственная (вдоль координаты z) неоднородность начального поля скорости имела амплитуду, по крайней мере, в несколько процентов от U_b . При выполнении этих условий средние характеристики устанавливающихся турбулентных режимов не зависят от конкретного выбора начального возмущения.

Детальное описание применяемого вычислительного алгоритма дано в [16]. Задача решается с использованием криволинейных эллиптических координат (r, θ) в плоскости поперечного сечения трубы

$$x = c \operatorname{ch} r \cos \theta, \quad y = c \operatorname{ch} r \sin \theta$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, r^*], \quad r^* = \ln(\sqrt{(a+b)/(a-b)})$$

Пространственная дискретизация уравнений проводится конечно-разностным методом. Расчетная сетка имеет сгущение узлов вблизи координатной поверхности $r = r^*$, совпадающей со стенкой трубы. Для интегрирования по времени используется полу-

явный метод. Разностное уравнение Пуассона для давления после преобразования Фурье по продольной координате решается методом сопряженных градиентов.

2. Геометрические и алгоритмические параметры. Ниже представлены результаты расчета турбулентного течения в эллиптической трубе с соотношением полуосей $b/a = 0.5$ при числе $Re = 6000$. Длина расчетной области равнялась $L_z = 6a$, что достаточно для воспроизведения основных турбулентных характеристик.

В дальнейшем все величины представляются в безразмерном виде. Если не оговорено противное, в качестве масштабов длины и скорости выбираются длина большей полуоси эллипса a и средняя расходная скорость U_b . При анализе характеристик течения в пристенной области производится нормировка физических величин на так называемые пристенные или вязкие масштабы скорости u_τ и длины l_τ , связанные со средним трением на стенке трубы τ_w соотношениями $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, $l_\tau = \nu/u_\tau$.

Среднее трение определяется через средний градиент давления по формуле $\tau_w = D_p D_H/4$. Для рассматриваемого течения $U_b = 14.8u_\tau$, $a = 313l_\tau$. Нормировка на вязкие масштабы обозначается верхним индексом $^+$.

Расчетная сетка состояла из $48 \times 256 \times 128 \approx 1.57 \times 10^6$ ячеек при максимальном размере ячейки у стенки трубы $0.72l_\tau \times 7.7l_\tau \times 14.65l_\tau$ в нормальном (r), угловом (θ) и продольном (z) направлении соответственно. Интегрирование по времени проводилось с шагом $\Delta_t = 0.01$ ($\Delta_t^+ = 0.21$). Настоящая схема интегрирования по времени обеспечивает вполне приемлемую величину шага интегрирования. Контрольные вычисления с меньшим шагом показали отсутствие заметных изменений в результатах.

После выхода решения на статистически стационарный режим интегрирование уравнений Навье – Стокса продолжается с параллельным накоплением необходимых статистик для определения интересующих средних характеристик течения. Для повышения надежности осреднения можно воспользоваться статистической однородностью течения в продольном направлении и кроме осреднения по времени проводить осреднение вдоль координаты z . Течение в эллиптической трубе статистически симметрично относительно главных осей поперечного сечения, поэтому в настоящей работе проводится также и квадрантное осреднение. Полученные таким образом поля являются функциями лишь поперечных координат x , y и симметричны относительно прямых $x = 0$ и $y = 0$. В дальнейшем операция осреднения обозначается угловыми скобками, средние обозначаются прописными буквами, а мгновенные отклонения от средних – строчными буквами со штрихами, таким образом для всякой характеристики течения g

$$g = G + g', \quad G = \langle g \rangle, \quad \langle g' \rangle = 0$$

Осреднение по времени проводилось на отрезке длиной $t_{AV} = 1534$. Разумно выразить период осреднения в единицах наибольшего характерного масштаба времени D_H/u_τ , так называемого периода оборота – времени, за которое приходится характерная длина гидравлического диаметра с характерной вязкой скоростью. В [12] при расчете течений в эллиптических трубах установлено, что для получения надежных числовых характеристик распределений средних по плоскости поперечного сечения трубы время осреднения должно быть не меньше 50 периодов оборота. В настоящей работе время осреднения составляло 52 периода оборота.

3. Характеристики течения в установившемся режиме. В таблице собраны некоторые интегральные характеристики течения: коэффициенты сопротивления C_f , максимальная скорость течения U_c , максимальная скорость вторичного течения $\sqrt{U_x^2 + U_y^2}$, наибольший уровень пульсаций u'_{rms} . Первый столбец (C1) соответствует расчету при $Re = 4000$ [16], второй (C2) – расчету при $Re = 6000$. В третьем столбце для сравнения

Параметры течения	C1	C2	[12]
Re	4000	6000	6000
C_f	0.01024	0.00917	0.00908
U_c	1.30	1.27	1.28
U_c^*	18.20	18.77	18.96
$\max \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$	0.0124	0.0137	0.0135
$\max u'_{rms}$	0.206	0.198	0.197

приведены результаты расчета методом виртуальных границ [12] при $Re = 6000$ ($b/a = 0.5$ во всех трех случаях). Сопоставление результатов настоящей работы с результатами [12] показывает хорошее согласие. Разница в коэффициенте сопротивления, максимальной скорости и интенсивности вторичного течения составляет около 1%, в максимальной интенсивности пульсаций – менее 1%.

Течения в установившихся турбулентных режимах характеризуются значительным повышением среднего трения по сравнению с соответствующими ламинарными течениями. Коэффициент сопротивления $C_f = 2\tau_w/\rho U_b^2$ повышается в 3.3 раза с $2.81 \cdot 10^{-3}$ до $9.17 \cdot 10^{-3}$. Последнее с точностью 2% совпадает со значением, следующим из закона Блазиуса для круглых труб $C_f = 0.0791 Re^{-0.25}$. Справедливость закона Блазиуса для эллиптических труб при определении числа Рейнольдса через гидравлический диаметр была отмечена также в [12].

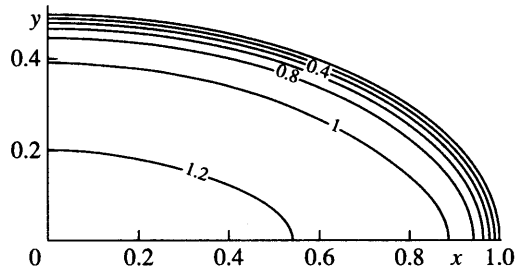
Максимальная продольная скорость течения в трубе уменьшается от 2 в ламинарном режиме до 1.27 в турбулентном (фиг. 1). Профили скорости становятся более наполненными в радиальном направлении. Наибольший уровень пульсаций скорости наблюдается в пристенной области на малой оси эллипса, где он составляет 0.2 (фиг. 2).

Характеристики течения в области меньшей полуоси близки к соответствующим характеристикам турбулентного течения в плоском канале при том же числе Рейнольдса $Re_\tau = u_\tau b/\nu$ [12] (в плоском канале b – полуширина канала, а в эллиптической трубе u_τ в определении Re_τ вычисляется через локальное трение на стенке в точке ($x = 0, y = b$)). Профиль скорости вдоль большей полуоси сечения трубы заметно отличается от типичного распределения для пристенного турбулентного течения. В частности, при нормировке на локальные вязкие масштабы линейный участок в профиле скорости простирается до $d^+ \approx 10$ (d – расстояние до стенки), тогда как в типичном турбулентном профиле только до $d^+ \approx 5$. Такое anomalous поведение может объясняться влиянием вторичного течения и кривизны стенки. Профили скорости и напряжений Рейнольдса, полученные в настоящей работе хорошо согласуются с результатами [12] и подтверждают сделанные там выводы.

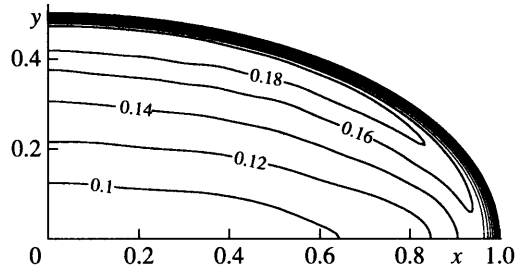
Распределение отношения локального трения $\tau = \rho \nu \partial U / \partial n$ к среднему трению τ_w вдоль стенки трубы (n – внутренняя нормаль к стенке) близко к распределению, полученному в [12], принимая во внимание сложность точного определения трения на твердой стенке в рамках метода виртуальных границ [12] (фиг. 3), ϕ – полярный угол точки на стенке: $\text{tg } \phi = y/x$.

В случае ламинарного течения

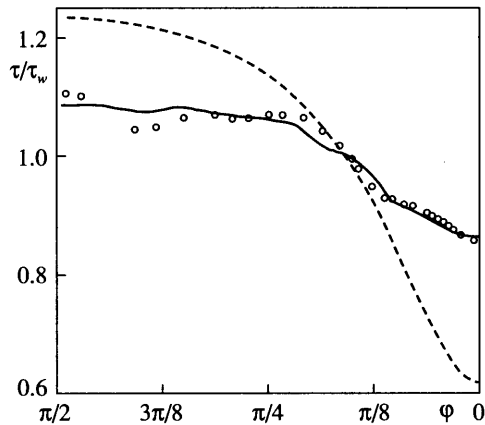
$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{4ab}{D_h(a^2 + b^2)} \left(\frac{a^4 \sin^4 \phi + b^4 \cos^4 \phi}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$



Фиг. 1. Распределение средней скорости по сечению трубы. Интервал между линиями уровня составляет 0.2



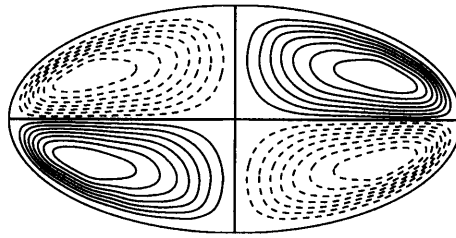
Фиг. 2. Распределение средноквадратичной амплитуды пульсаций скорости по сечению трубы. Интервал между линиями уровня составляет 0.02



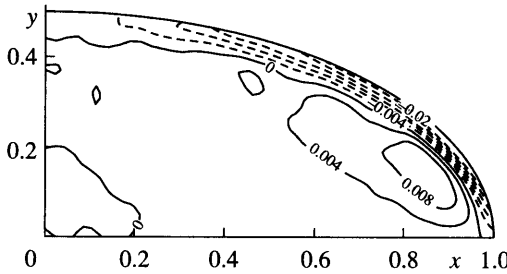
Фиг. 3. Распределение отношения локального трения $\tau = \rho v \partial U_z / \partial n$ к среднему трению τ_w вдоль стенки трубы. Сплошная линия – настоящая работа, символы – [12], штриховая линия – ламинарное течение (3.1)

В турбулентном течении трение более равномерно распределено по границе по сравнению с ламинарным. Изменение составляет 0.86–1.08 вместо 0.62–1.23.

В классических пристенных турбулентных течениях, таких, как течение в круглой трубе или течение в плоском канале осредненное движение одномерно: имеется только продольная компонента скорости U_z , а средние от нормальных к основному потоку ком-



Фиг. 4. Линии тока вторичных течений (сплошные линии – движение против часовой стрелки, пунктирные – по часовой стрелке)



Фиг. 5. Распределение средней продольной компоненты завихренности по сечению трубы. Положительные уровни – сплошные линии, отрицательные – штриховые

понент скорости U_x и U_y равны нулю. В эллиптической трубе так же, как и в других некруглых трубах, анизотропия напряжений Рейнольдса приводит к появлению ненулевых $U_x U_y$, т.е. в плоскости поперечного сечения возникают вторичные течения. Линии тока вторичных течений представлены двумя парами вихрей противоположного знака (фиг. 4). Жидкость растекается от центра трубы к стенке вдоль больших полуосей и возвращается обратно вдоль малых. Максимальная скорость вторичных течений составляет всего около 1% от средней скорости потока, однако, как показано в [12], вторичные течения вносят определяющий вклад в формирование распределения $U_z(x, y)$.

Вторичное течение в развитом турбулентном потоке однозначно определяется по средней продольной компоненте завихренности $\Omega_z = \partial U_y / \partial x - \partial U_x / \partial y$. Максимальное значение Ω_z^+ равно 0.009. Из-за прилипания на стенке трубы Ω_z^+ меняет знак при приближении к стенке и достигает минимального значения – 0.03 непосредственно на стенке (фиг. 5).

Из уравнений Рейнольдса для поперечных компонент средней скорости можно вывести уравнение для продольной завихренности. В эллиптической системе координат (r, θ) это уравнение имеет вид:

$$\frac{U_r \partial \Omega_z}{H \partial r} + \frac{U_\theta \partial \Omega_z}{H \partial \theta} - \frac{\nu}{H^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial \theta^2} \right) = Q_1 + Q_2 \tag{3.2}$$

$$H(r, \theta) = c \sqrt{\text{sh}^2 r + \sin^2 \theta}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2H^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] H^2 (\langle u_r^2 \rangle - \langle u_\theta^2 \rangle)$$

$$Q_2 = \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] H^2 \langle u'_r u'_\theta \rangle$$

Первые два слагаемых в левой части (3.2) описывают конвективный перенос завихренности вторичным течением, третье слагаемое ответственно за вязкое сглаживание градиента Ω_z . Два слагаемых в правой части представляют собой источники завихренности. При отсутствии этих источников уравнение (3.2) совместно с уравнением неразрывности, выражением завихренности через компоненты скорости

$$\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H U_r}{\partial r} + \frac{\partial H U_\theta}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \Omega_z = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial H U_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H U_r}{\partial \theta} \right)$$

и условиями прилипания на стенке $U_r = U_\theta = 0$ при $r = r^*$ дает нулевое решение $\Omega_z = U_r = U_\theta = 0$. Таким образом, наличие ненулевых источников, связанных с напряжениями Рейнольдса – необходимое условие возникновения вторичного течения.

Результаты расчетов показывают, что источниковые члены имеют заметные ненулевые значения лишь в узком пристенном слое, где компоненты скорости u_r и u_θ могут интерпретироваться как нормальная и тангенсальная по отношению к стенке. Первый член в правой части (3.2) отвечает генерации завихренности благодаря неоднородному вдоль стенки распределению разности нормальных напряжений Рейнольдса, отражающей анизотропию турбулентных пульсаций вблизи стенки. Пренебрегая переменностью $H(r, \theta)$ в каждой точке пристенной области, можно выписать следующее приближенное выражение для величины Q_1 :

$$Q_1 \approx \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial n} (\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle)$$

Здесь τ и n обозначают тангенсальную и нормальную координаты ($d\tau \approx H d\theta$, $dn \approx H dr$). Вблизи стенки

$$\langle u_\theta'^2 \rangle \sim n^2, \quad \langle u_r'^2 \rangle \sim n^4 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} (\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle) > 0$$

Пульсации скорости в области меньшей полуоси эллипса ($\theta = \pi/2$) интенсивнее, чем в области большей полуоси ($\theta = 0$) (фиг. 2). Как показано в [12], это в равной степени относится к интенсивности колебаний каждой компоненты скорости, так что растущей функцией θ оказывается и $\langle u_\theta'^2 \rangle - \langle u_r'^2 \rangle$ и ее нормальная производная. Таким образом получаем $Q_1 > 0$. В трубе круглого сечения или в плоском канале анизотропия нормальных напряжений Рейнольдса не создает вторичного течения из-за однородности вдоль стенки (тангенсальная производная от разности напряжений Рейнольдса тождественно равна нулю).

Аналогичное приближенное выражение для второго источникового члена в правой части (3.2) имеет вид

$$Q_2 \approx \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right) \langle u'_r u'_\theta \rangle$$

Далее, очевидно, что изменение $\langle u'_r u'_\theta \rangle$ вдоль стенки много меньше изменения вдоль нормали, поэтому производной $\partial^2 / \partial \tau^2$ можно пренебречь. Кроме того, из условий прилипания $\langle u'_r u'_\theta \rangle \sim n^3$, откуда следует, что знак Q_2 противоположен знаку $\langle u'_r u'_\theta \rangle$. По крайней мере, в области пристенного сдвигового слоя вторичного течения положительное u'_r

(по направлению к стенке) переносит частицы жидкости с большей тангенсальной скоростью, т.е. создает положительную пульсацию u'_θ , и, наоборот, отрицательная радиальная пульсация создает отрицательную u'_θ . Таким образом, получаем $\langle u'_r u'_\theta \rangle > 0$ и $Q_2 < 0$.

Несмотря на то, что два источниковых члена в правой части (3.2) имеют противоположные знаки, знак интегрального вклада должен совпадать со знаком Q_1 . В противном случае вторичное течение изменило бы направление на противоположное, а вместе с ним изменился бы знак $\langle u'_r u'_\theta \rangle$ и соответственно у Q_2 . Из приведенных приближенных оценок следует гипотетический вывод о том, что знак источника в уравнении для продольной завихренности определяется членом, содержащим разность нормальных напряжений Рейнольдса. Член, содержащий касательные напряжения Рейнольдса, действует в противоположном направлении, однако не может поменять направление вторичного течения.

Важность учета члена, соответствующего Q_2 при моделировании в рамках уравнений Рейнольдса вторичного течения в трубе прямоугольного сечения впервые было осознано в [8], однако оценка величины и распределения источниковых членов в уравнении для продольной завихренности остается нерешенной проблемой. В прямом расчете течения в трубе квадратного сечения [9] было обнаружено, что Q_1 и $-Q_2$ имеют близкие распределения по сечению трубы, причем максимум Q_2 достигает 90% от максимума Q_1 .

В согласии с проведенными оценками источник Q_1 имеет доминирующее положительное значение, достигая максимума $Q_1^+ = 1.7 \cdot 10^{-3}$ в точке $\theta = 0.2\pi$, $r = 0.54$ ($x = 0.8$, $y = 0.29$). Как и предполагалось, Q_2 в пристенной области имеет отрицательные значения с минимумом $Q_2^+ = -0.6 \cdot 10^{-3}$. Достаточно неожиданно совпадение распределений Q_1 и $-Q_2$ вплоть до мелких деталей со значениями $-Q_2$ примерно в одну треть от Q_1 (фиг. 6). В частности, минимум Q_2 достигается в той же точке, что и максимум Q_1 . Там же достигается максимум $Q_1 + Q_2$.

Большинство современных инженерных методов расчета турбулентных течений используют модельное уравнение для кинетической энергии турбулентности $k = 0.5 u'_i u'_i$ вида

$$\frac{D\langle k \rangle}{Dt} = P + D - \epsilon \quad (3.3)$$

где D/Dt – полная производная, а члены в правой части P , D и ϵ – соответственно производство, диффузия и диссипация энергии, подлежащие модельному описанию. Прямой расчет всех членов уравнения для кинетической энергии, а также аналогичных уравнений для диссипации кинетической энергии и напряжений Рейнольдса в плоском канале [2, 17] стимулировали построение нового поколения более точных моделей расчета неизотропных турбулентных течений.

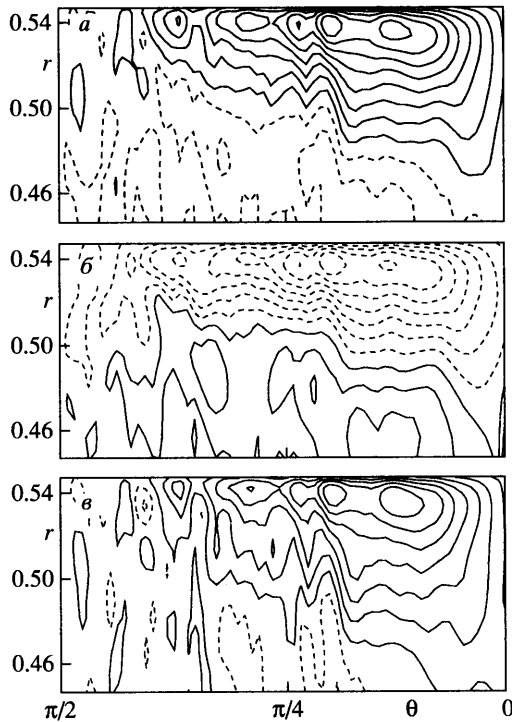
Точные выражения для членов в правой части (3.3) имеют следующий вид:

$$P = -\langle u'_i u'_j \rangle S_{ij}, \quad \epsilon = 2\nu \langle s'_{ij} s'_{ij} \rangle \quad (3.4)$$

Диффузия кинетической энергии происходит за счет трех различных физических механизмов – вязкости, турбулентности и пульсаций давления

$$D = D_\nu + D_t + D_p \quad (3.5)$$

$$D_\nu = 2\nu \operatorname{div} \langle \mathbf{u}' \mathbf{s}' \rangle, \quad D_t = -\operatorname{div} \langle \mathbf{u}' k \rangle, \quad D_p = -\operatorname{div} \langle \mathbf{u}' p' / \rho \rangle$$



Фиг. 6. Распределение источников членов уравнения (3.2): $a - Q_1$, $b - Q_2$, $v - Q_1 + Q_2$. Положительные уровни отмечены сплошными линиями, отрицательные – штриховыми.

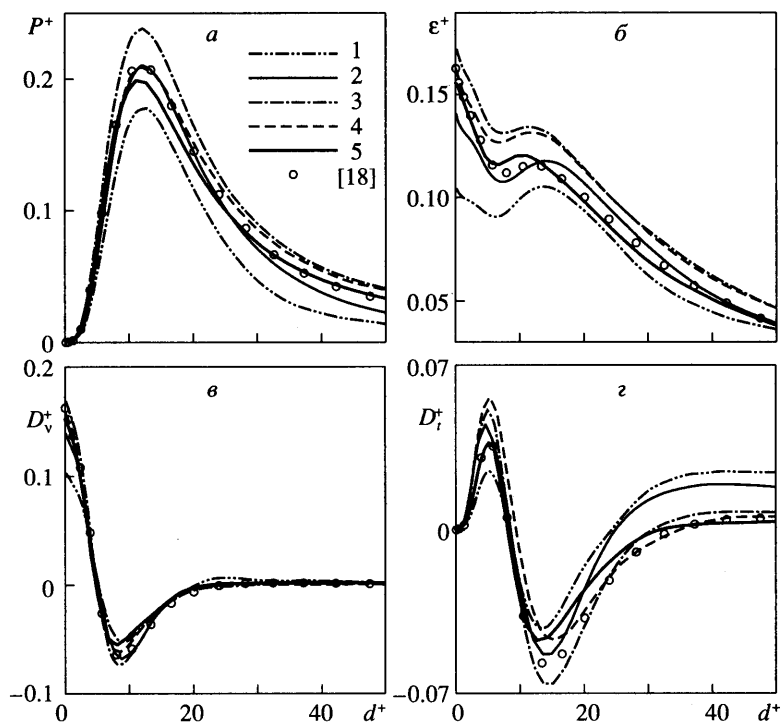
В (3.4), (3.5) s_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации. В эллиптической системе координат они имеют вид

$$s_{rr} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_\theta \frac{\partial H^{-1}}{\partial \theta}, \quad s_{\theta\theta} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_r \frac{\partial H^{-1}}{\partial r}, \quad s_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$s_{rz} = \frac{1}{2H} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad s_{\theta z} = \frac{1}{2H} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad s_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial H^{-1} u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial H^{-1} u_r}{\partial \theta}$$

Диффузия кинетической энергии за счет пульсаций давления D_p так же, как и конвективный перенос энергии вторичным течением $D(k)/Dt = \text{div}(U\langle k \rangle)$ во всей области течения малы по сравнению с другими членами уравнения энергии. Качественно процессы производства, диссипации и диффузии кинетической энергии происходят одинаково вдоль всего периметра сечения трубы (фиг. 7). Максимум производства достигается на расстоянии $d^+ = 12$ от стенки. Вязкая диффузия переносит кинетическую энергию из области активного производства $4 < d^+ < 20$ в пристенную область $d^+ < 4$. Турбулентная диффузия действует в обе стороны. Из области $8 < d^+ < 30$ энергия переносится как к стенке, так и во внешнюю область потока. Диссипация кинетической энергии турбулентности максимальна на стенке, где она балансирует вязкую диффузию. При удалении от стенки диссипация уменьшается, уравновешивая производство и турбулентный перенос. Те же процессы происходят и в плоском канале [17].

Вместе с тем на разных участках вдоль периметра сечения трубы имеются заметные количественные различия. Максимум производства энергии при нормировке на мест-



Фиг. 7. Распределения членов в правой части уравнения кинетической энергии турбулентности (3.3) в пристенной области трубы: *a* – производство, *б* – диссипация, *в* – вязкая диффузия, *г* – турбулентная диффузия. Линии 1–5 соответствуют координате $\theta = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2$. Точки – результаты [18] для плоского канала при $Re_\tau = u_\tau h/\nu = 180$ (h – полуширина канала)

ные вязкие масштабы ведет себя не монотонно вдоль периметра трубы. Наибольшие значения наблюдаются в промежуточной области $\theta = \pi/8 - \pi/4$. Это может объясняться вкладом слагаемого $-\langle u'_\theta u'_z \rangle S_{\theta z}$, который составляет в этой области до 5% от P . На других участках, где изменение продольной скорости вдоль угловой координаты мало, единственным существенным вкладом в P является вклад $-\langle u'_r u'_z \rangle S_{rz}$, связанный с радиальным градиентом продольной скорости. Отметим, что абсолютные значения $\max P$ (при нормировке на единый масштаб) монотонно увеличиваются с ростом θ .

Другая особенность – повышенное положительное значение турбулентной диффузии при $d^+ > 20$ в узкой части трубы ($\theta = 0, \pi/8$). При пониженном уровне пульсаций в этой части трубы такое anomalous поведение может объясняться переносом энергии в тангенсальном направлении из области более интенсивных колебаний.

Заключение. Для расчета турбулентного течения в трубе эллиптического сечения использован конечно-разностный метод численного решения уравнений Навье – Стокса в криволинейных ортогональных координатах. Алгоритм включает в себя консервативную разностную схему аппроксимации уравнений по пространственным переменным и полуняевный метод интегрирования по времени 3-го порядка точности.

Рассчитано турбулентное течение в трубе с соотношением полуосей $b/a = 0.5$ при числе Рейнольдса $Re = 6000$, определенном через среднюю расходную скорость и гидравлический диаметр. Получены распределения средних и пульсационных характеристик движения по сечению трубы. В частности, рассчитаны вторичные течения в плоскости поперечного сечения, свойственные турбулентным течениям в некруглых трубах.

Проведен анализ источниковых членов уравнения для продольной компоненты завихренности осредненного течения, определяющей форму и интенсивность вторичного течения. Показано, что главным фактором является неоднородность распределения разности нормальных напряжений Рейнольдса, соответствующих тангенсальным и нормальным пульсациям $\langle u'_i u'_i \rangle - \langle u'_n u'_n \rangle$ вдоль стенки трубы. Обнаружено, что вклад сдвигового напряжения Рейнольдса $\langle u'_i u'_n \rangle$ является противоположным по знаку, однако не является определяющим.

Описано поведение всех членов уравнения баланса кинетической энергии пульсаций, характеризующих производство, диссипацию и перераспределением энергии по сечению трубы. Показано качественное совпадение с распределением соответствующих характеристик в плоском канале. Выявлены особенности, связанные с наличием углового градиента средней скорости и неоднородностью распределения энергии пульсаций по сечению трубы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 05-01-00607).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rozhdestvensky B.L., Simakin I.N. Secondary flow in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 261–289.
2. Kim J., Moin P., Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 133–166.
3. Spalart P.R. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta=1410$ // J. Fluid Mech. 1988. V. 187. P. 61–98.
4. Приймак В.Г. Результаты и возможности прямого численного моделирования турбулентных течений вязкой жидкости в круглой трубе // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 71–76.
5. Eggels J.G.M., Unger F., Weiss M.H., Westerweel J., Adrian R.J., Friedrich R., Nieuwstadt F.T.M. Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment // J. Fluid Mech. 1994. V. 268. P. 175–209.
6. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 14–26.
7. Никитин Н.В. Статистические характеристики пристенной турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 32–43.
8. Demuren A.O., Rodi W. Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 189–222.
9. Gavrilakis S. Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct // J. Fluid Mech. 1992. V. 244. P. 101–129.
10. Huser A., Biringen S. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct // J. Fluid Mech. 1993. V. 257. P. 65–95.
11. Никитин Н.В. Численное моделирование турбулентных течений в трубе квадратного сечения // Докл. РАН. 1997. Т. 353. № 3. С. 338–342.
12. Nikitin N., Yakhot A. Direct numerical simulation of turbulent flow in elliptical ducts // J. Fluid Mech. 2005. V. 532. P. 141–164.
13. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comput. Phys. 2006. V. 217(2). P. 759–781.
14. Nikitin N. Third-order-accurate semi-implicit Runge-Kutta scheme for incompressible Navier-Stokes equations // Int. J. Num. Meth. Fluids. 2006. V. 51(2). P. 221–233.
15. Никитин Н.В. Прямой расчет турбулентных течений в эксцентрических трубах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46(3). С. 509–525.
16. Воронова Т.В., Никитин Н.В. Прямой расчет турбулентных течений в трубе эллиптического сечения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46(8). С. 1477–1485.
17. Mansour N.N., Kim J., Moin P. Reynolds-stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 15–44.