

УДК 532.135 + 517.956.4

© 2007 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФУЗИИ ВИХРЯ

Анализ групповых свойств и поиск автомодельных решений в задачах математической физики и механики сплошной среды всегда представлял теоретический и прикладной интерес [1–3]. Автомодельные решения параболических задач, зависящие от переменной типа  $\eta = x/\sqrt{t}$ , являются классическими фундаментальными решениями одномерных линейных и нелинейных уравнений теплопроводности и описывают многочисленные физические явления с разрывом на границе в начальный момент времени [4].

В данной работе для объединения механических процессов, моделируемых этими задачами, вводится термин “обобщенная диффузия вихря”. Классическими примерами из гидродинамики здесь могут служить диффузия вихревого слоя и диффузия вихревой нити в ньютоновской жидкости [5]. Для достаточно общей кинематики процесса, физической нелинейности среды и типа граничного условия в точке разрыва классифицируются случаи существования автомодельности с переменной  $\eta$ . Поставленная общая начально-краевая задача подробно анализируется для ньютоновской и неьютоновской степенной жидкостей, а также для среды, близкой по поведению к жесткоидеальнопластическому телу. Получены новые автомодельные решения для касательного напряжения.

*Ключевые слова:* автомодельность, диффузия, вихревой слой, вихревая нить, физическая нелинейность, степенная жидкость.

Решениям как линейных, так и нелинейных параболических задач, моделирующих диффузию разрыва в начальный момент времени некоторой механической величины на границе области, присущи общие особенности: разрыв исчезает (диффундирует) в сколь угодно близкое к начальному моменту время, а кроме того, возмущение, вносимое на границе, с бесконечной скоростью распространяется как угодно далеко внутрь области. Для того чтобы данную скорость сделать конечной, а тем самым ввести фронт волны теплового возмущения, в последнее время параболические системы предлагается дополнять “гиперболическими добавками” [6]. Подобные начально-краевые задачи вполне адекватно моделируют многие явления в одномерных структурах, имеющие разрыв на границе в начальный момент времени, такие, как теплопередача, диффузия, фильтрация, кристаллизация и плавление. Описывает она и одномерный нестационарный сдвиг несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости, о котором идет речь ниже.

**1. Обобщенная диффузия вихря.** В двумерной области  $D = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$  рассмотрим следующую нелинейную параболическую систему уравнений относительно функций  $u(x, t)$ ,  $d(x, t)$  и  $\sigma(x, t)$ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{a_1 \sigma}{x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \sigma = F(d), \quad d = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a_2 v}{x} \right) \quad (1.1)$$

моделирующую различные случаи нестационарного одномерного сдвигового течения в неьютоновской вязкой жидкости плотности  $\rho$ . Во всех этих случаях  $\sigma$  – единственная ненулевая сдвиговая компонента тензора вязких напряжений (касательное напряжение), зависящая от времени и только одной пространственной координаты,  $d$  и  $v$  – соот-

ветствующие компоненты тензора скоростей деформаций и вектора скорости. Постоянные  $a_1, a_2 \in R$  зависят от выбора ортогональной системы координат, в которой течение – одномерный сдвиг. Тогда первое уравнение (1.1) представляет собой единственное уравнение движения, второе – определяющее соотношение неньютоновской жидкости с реологической кривой  $F(d)$ , а третье – кинематическое соотношение Стокса.

Потребуем равенство  $F(0) = 0$ , что отличает собственно вязкую жидкость от среды с пределом текучести, например, вязкопластического тела Шведова–Бингам, а кроме того, монотонное возрастание функции  $F(d)$  во всей области своего определения и, таким образом, существование обратной функции  $d = G(\sigma)$ , также монотонно возрастающей.

Приведем характерные примеры выбора пары  $(a_1, a_2)$ .

При плоскопараллельном сдвиге в полуплоскости  $x_2 > 0$ , где  $(x_1, x_2, x_3)$  – декартовы координаты,  $x = x_1, v = v_1, d = d_{12}, \sigma = \sigma_{12}$ , имеем  $a_1 = a_2 = 0$ .

При осесимметричном  $(r, z)$ -сдвиге в пространстве без оси  $z$ , где  $(r, \theta, z)$  – цилиндрические координаты,  $x = r, v = v_z, d = d_{rz}, \sigma = \sigma_{rz}$ , имеем  $a_1 = 1, a_2 = 0$ .

При осесимметричном  $(r, \theta)$ -сдвиге в пространстве без оси  $z$ , где  $(r, \theta, z)$  – цилиндрические координаты,  $x = r, v = v_\theta, d = d_{r\theta}, \sigma = \sigma_{r\theta}$ , имеем  $a_1 = 2, a_2 = 1$ .

В случае осесимметричного  $(R, \varphi)$ -сдвига в пространстве без полярной оси  $\psi = 0, \pi$ , где  $(R, \varphi, \psi)$  – сферические координаты,  $x = R, v = v_\varphi, d = d_{R\varphi}, \sigma = \sigma_{R\varphi}$ , имеем  $a_1 = 3, a_2 = 1$ .

Система (1.1) может быть сведена к одному из следующих нелинейных параболических уравнений относительно  $\sigma, d$  или  $v$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{b_1 \partial \sigma}{x \partial x} - \frac{b_2 \sigma}{x^2} = 2\rho G'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$F'(d) \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + F''(d) \left( \frac{\partial d}{\partial x} \right)^2 + \frac{b_1 F'(d)}{x} \frac{\partial d}{\partial x} - \frac{b_2 F(d)}{x^2} = 2\rho \frac{\partial d}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$F'(d) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{a_2 \partial v}{x \partial x} + \frac{a_2 v}{x^2} \right) + \frac{2a_1}{x} F(d) = 2\rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_1(a_2 + 1)$$

В уравнение (1.4) необходимо подставить  $d(v)$  из (1.1).

Пусть начально-краевая задача в  $D$  ставится, например, для напряжения  $\sigma$ . В качестве начального условия выберем ненапряженное состояние среды:

$$x > 0: \lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

Два граничных условия записываются следующим образом:

$$t > 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sigma(x, t) = S, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x, t) = 0 \quad (1.6)$$

где  $\alpha \in R, a S \neq 0$  – заданная постоянная величина с размерностью  $[S] = ML^{\alpha-1}T^{-2}$ .

Решение  $\sigma(x, t)$  задачи (1.2), (1.5), (1.6) (далее задачи I) разыскивается в классе функций, дифференцируемых по  $t$  и дважды дифференцируемых по  $x$  в замыкании  $\bar{D}$  без угловой точки  $O$ . В этой точке решение может иметь разрыв первого рода. Действительно, его предел по траекториям, принадлежащим  $D$  и стремящимся к  $O$ , зависит от выбора траектории, что видно уже из взаимной рассогласованности начального (1.5) и первого граничного (1.6) условий

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{t \rightarrow 0^+} x^\alpha \sigma(x, t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sigma(x, t) = S \quad (1.7)$$

Если начальные и граничные условия сформулированы в терминах  $d$

$$x > 0: \lim_{t \rightarrow 0^+} d(x, t) = 0 \quad (1.8)$$

$$t > 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta d(x, t) = U, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} d(x, t) = 0 \quad (1.9)$$

либо  $v$

$$x > 0: \lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t) = 0 \quad (1.10)$$

$$t > 0: \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\gamma v(x, t) = V, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \quad (1.11)$$

где  $\beta, \gamma \in R$ ,  $[U] = L^\beta T^{-1}$ ,  $[V] = L^{\gamma+1} T^{-1}$ , то вместо задачи I имеем в  $D$  начально-краевые задачи (1.3), (1.8), (1.9) (задачу II) либо (1.4), (1.10), (1.11) (задачу III).

Для объединения механических процессов, моделируемых этими задачами, будем использовать термин “обобщенная диффузия вихря”. Классическими частными случаями здесь являются диффузия вихревого слоя (задача III, где надо положить  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $F(d) = 2\mu D$ ,  $\gamma = 0$ ) и диффузия вихревой нити (задача III,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $F(d) = 2\mu D$ ,  $\gamma = 1$ ) в ньютоновской жидкости с динамической вязкостью  $\mu$ . Обобщение осуществляется по нескольким параметрам: а) на физическую нелинейность жидкости путем выбора реологического закона  $F(d)$  (характерные виды зависимости типа  $F(d)$ , используемые в задачах о технологических процессах обработки материалов давлением, приведены в [7]); б) на пространственную кинематику одномерного сдвига (выбор  $a_1$  и  $a_2$ ); в) на задание граничного условия при  $x = 0$  (выбор  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ ) для любой из трех величин:  $\sigma$ ,  $d$  или  $v$ .

В данной работе интерес представляют случаи, когда поставленные выше задачи допускают автомодельные решения вида

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= Sx^{-\alpha}\varphi(\eta), \quad d(x, t) = Ux^{-\beta}\psi(\eta), \quad v(x, t) = Vx^{-\gamma}\chi(\eta) \\ \eta &= \frac{x}{2\sqrt{vt}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подстановка (1.12) в уравнения (1.2)–(1.4) показывает, что в самом общем случае в задаче об обобщенной диффузии вихря автомодельного с переменной  $\eta$  решения нет.

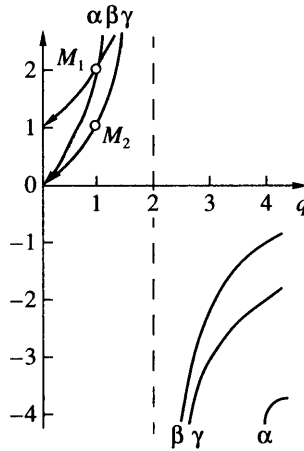
В (1.12)  $v$  – характерная кинематическая вязкость в выбранной реологической модели. В отличие от физически линейной среды, где  $v = \mu/\rho$ , может случиться, что из материальных коэффициентов модели и плотности нельзя образовать комбинацию с размерностью  $[v] = L^2 T^{-1}$ . Тогда для этого надо привлечь одну из заданных величин  $S$ ,  $U$  или  $V$ . Например, определяющие соотношения степенной неньютоновской жидкости

$$\sigma = 2\mu_0 d^q, \quad d = \left(\frac{\sigma}{2\mu_0}\right)^{1/q}, \quad q > 0 \quad (1.13)$$

содержат всего одну материальную постоянную  $\mu_0$  с размерностью  $[\mu_0] = ML^{-1} T^{q-2}$ . Для такой среды в каждой из задач I, II, III можно определить характерную кинематическую вязкость  $v$ , входящую в (1.12), следующим образом:

$$v^{D_1} = \frac{S^{2(q-1)} \mu_0^{2-\alpha}}{\rho^{2q-\alpha}}, \quad v^{D_2} = U^{2(q-1)} \left(\frac{\mu_0}{\rho}\right)^{2-\beta}, \quad v^{D_3} = V^{2(q-1)} \left(\frac{\mu_0}{\rho}\right)^{1-\gamma} \quad (1.14)$$

$$D_1 = \alpha(q-2) + 2q, \quad D_2 = \beta(q-2) + 2, \quad D_3 = \gamma(q-2) + q$$



Фиг. 1. Зависимости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  от  $q$ , при которых характерная кинематическая вязкость в задаче отсутствует

причем предполагается, что  $D_1 \neq 0$ ,  $D_2 \neq 0$  и  $D_3 \neq 0$ . Это означает, что  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при выбранном  $q$  не принадлежат кривым на фиг. 1. В противном случае соответствующая тройка величин размерно зависима, и характерная кинематическая вязкость в задаче отсутствует. В точках  $M_1$  и  $M_2$  на фиг. 1 имеются однопараметрические семейства комбинаций с размерностью  $[v] = L^2 T^{-1}$ .

**2. Физически линейная среда.** Изучим сначала обобщенную диффузию вихря в ньютоновской вязкой жидкости, так что

$$F(d) = 2\mu d, \quad G(\sigma) = \frac{\sigma}{2\mu} \quad (2.1)$$

Тогда уравнения (1.2) и (1.3) относительно  $\sigma$  и  $d$ , очевидно, совпадут, а уравнение (1.4) для  $v$  будет отличаться от них только коэффициентами

$$v \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{b_1 \partial \sigma}{x \partial x} - \frac{b_2 \sigma}{x^2} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{b_1 \partial v}{x \partial x} - \frac{b_3 v}{x^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad b_3 = (a_1 - 1)a_2 \quad (2.3)$$

Остановимся сначала на уравнении (2.2) с условиями (1.5), (1.6) (задача I). Эту задачу с помощью (1.12) можно привести к обыкновенному линейному уравнению для безразмерной функции  $\varphi(\eta)$  с двумя граничными условиями

$$\eta^2 \varphi'' + \eta(c_1 + 2\eta^2) \varphi' + c_2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (2.4)$$

$$c_1 = b_1 - 2\alpha, \quad c_2 = \alpha(\alpha + 1 - b_1) - b_2$$

Выделим известные (см., например [8, с. 409]) случаи интегрирования уравнения (2.4).

Пусть  $c_2 = 0$ ,  $c_1 < 1$ . Это равносильно тому, что  $\alpha = a_1$  либо  $\alpha = -a_2 - 1$  и, кроме того,  $\alpha > (a_1 - a_2 - 1)/2$ , т.е.

$$\alpha = \begin{cases} \max\{a_1; -a_2 - 1\}, & a_1 \neq -a_2 - 1 \\ \emptyset, & a_1 = -a_2 - 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда решение уравнения (2.4) с приведенными граничными условиями следующее:

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{I_{c_1}(\eta)}{I_{c_1}(\infty)}, \quad I_{c_1}(\eta) \equiv \int_0^\eta \zeta^{-c_1} e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (2.6)$$

Неравенство  $c_1 < 1$  необходимо для сходимости интеграла  $I_{c_1}$  в нуле.

Пусть  $c_2 = -2(c_1 + 1)$ . Тогда общее решение уравнения (2.4) с двумя постоянными  $A_1$  и  $A_2$  имеет вид

$$\varphi(\eta) = \eta^{-c_1-1} e^{-\eta^2} \left( A_1 + A_2 \int_0^\eta \zeta^{c_1+2} e^{\zeta^2} d\zeta \right) \quad (2.7)$$

Но требование  $\varphi(0) = 1$ , предъявляемое к функции (2.7), означает, что параметр  $c_1$  можно выбрать равным лишь  $-1$ , а следовательно,  $c_2 = 0$ . Таким образом, это подслучай предыдущего, а решение  $\varphi = e^{-\eta^2}$  для пары  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 0$  в этих случаях, естественно, совпадает.

Асимптотический анализ при  $\eta \rightarrow 0$  подтверждает существование решения задачи (2.4) только, если  $c_2 = 0$ . Действительно, при  $\eta \rightarrow 0$  асимптотики решений уравнения (2.4) и уравнения Эйлера  $\eta^2 \varphi'' + c_1 \eta \varphi' + c_2 \varphi = 0$  совпадают. У последнего же корни соответствующего характеристического уравнения равны  $\alpha - a_1$  и  $\alpha + a_2 + 1$ . Таким образом, для выполнения граничного условия  $\varphi(0) = 1$  необходим и достаточно, чтобы  $\alpha$  удовлетворяло именно условию (2.5). При этом  $c_2 = 0$ .

Задача III в терминах скорости (уравнение (2.3) с условиями (1.10), (1.11)), отличающаяся от предыдущей (для напряжения) только коэффициентами, с помощью (1.12) сводится к уравнению для  $\chi(\eta)$ , аналогичному (2.4) для  $\varphi(\eta)$

$$\eta^2 \chi'' + \eta(c_3 + 2\eta^2) \chi' + c_4 \chi = 0, \quad \chi(0) = 1, \quad \chi(\infty) = 0 \quad (2.8)$$

$$c_3 = b_1 - 2\gamma, \quad c_4 = \gamma(\gamma + 1 - b_1) - b_3$$

Два упомянутых известных случая интегрирования уравнения (2.7), как и ранее, сводятся к одному:  $c_4 = 0$ ,  $c_3 < 1$ . Это равносильно тому, что  $\gamma = a_1 - 1$  либо  $\gamma = -a_2$  и, кроме того,  $\gamma > (a_1 - a_2 - 1)/2$ , т.е.

$$\gamma = \begin{cases} \max\{a_1 - 1; -a_2\}, & a_1 - 1 \neq -a_2 \\ \emptyset, & a_1 - 1 = -a_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Тогда решение задачи (2.8)

$$\chi(\eta) = 1 - \frac{I_{c_3}(\eta)}{I_{c_3}(\infty)} \quad (2.10)$$

такое же, как (2.6), но с параметром  $c_3$ .

Выявим физический смысл полученных автомодельных решений (2.6) и (2.10) на примере классических сдвиговых течений, перечисленных в разд. 1.

При  $a_1 = a_2 = 0$ , согласно (2.5) и (2.9)  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $I_0(\infty) = \sqrt{\pi}/2$  и

$$\varphi(\eta) = \chi(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\zeta^2} d\zeta \equiv \operatorname{erfc} \eta \quad (2.11)$$

что соответствует распределению напряжений  $\varphi(\eta)$  и скоростей  $\chi(\eta)$  в процессе диффузии вихревого слоя в вязкой полуплоскости.

Если  $a_1 = 1, a_2 = 0$ , то  $\alpha = 1, c_1 = -1, I_{-1}(\infty) = 1/2$  и

$$\varphi(\eta) = e^{-\eta^2} \quad (2.12)$$

Автомодельное решение (2.12) для случая осесимметричного ( $rz$ )-сдвига имеет место лишь для напряжений, причем, как следует из (1.12),  $\sigma(x, t) \sim S/x$  при  $x \rightarrow 0$ . Для скоростей же оно отсутствует в силу того, что  $a_1 - 1 = -a_2$  и согласно (2.9) подходящих значений  $\gamma$  не существует.

При  $a_1 = 2, a_2 = 1$  имеем  $\alpha = 2, \gamma = 1, c_1 = -3, c_3 = -1, I_{-3} = 1/2, I_{-1} = 1/2$  и

$$\varphi(\eta) = (1 + \eta^2)e^{-\eta^2}, \quad \chi(\eta) = e^{-\eta^2} \quad (2.13)$$

Имеем диффузию вихревой нити в вязком пространстве. Величина  $V$  в (1.12) – циркуляция нити, размерность величины  $S$  совпадает с размерностью силы. Заметим, что безразмерное решение (2.13) для скорости в случае диффузии вихревой нити совпадает с решением (2.12) для напряжения в случае ( $rz$ )-сдвига.

Если  $a_1 = 3, a_2 = 1$ , то  $\alpha = 3, \gamma = 2, c_1 = -4, c_3 = -2, I_{-4}(\infty) = 3\sqrt{\pi}/8, I_{-2}(\infty) = \sqrt{\pi}/4$  и

$$\varphi(\eta) = \operatorname{erf} \eta + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2\eta^2}{3}\right) e^{-\eta^2}, \quad \chi(\eta) = \operatorname{erf} \eta + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \quad (2.14)$$

В ньютоновской вязкой жидкости точные решения в задаче об обобщенной диффузии вихря можно выписать не только, когда  $S$  в (1.6),  $U$  в (1.9) и  $V$  в (1.11) – постоянные величины. Пользуясь фундаментальными решениями (2.6) и (2.10), это можно сделать для произвольных, в том числе разрывных функций  $S(t)$  и  $V(t)$ , заданных при  $t > 0$ :

$$\sigma(x, t) = x^{-\alpha} \int_0^t \left[ 1 - \frac{1}{I_{c_1}(\infty)} \int_0^{x/2\sqrt{v(t-\tau)}} \zeta^{-c_1} e^{-\zeta^2} d\zeta \right] dS(\tau) \quad (2.15)$$

$$v(x, t) = x^{-\gamma} \int_0^t \left[ 1 - \frac{1}{I_{c_3}(\infty)} \int_0^{x/2\sqrt{v(t-\tau)}} \zeta^{-c_3} e^{-\zeta^2} d\zeta \right] dV(\tau) \quad (2.16)$$

Формально решения (2.15) и (2.16) не автомодельны, поскольку не представимы в форме (1.12).

**3. Среда с нелинейной реологией общего вида.** Пусть теперь среда, в которой происходит обобщенная диффузия вихря, представляет собой не ньютоновскую вязкую жидкость с определяющими соотношениями (2.1), а жидкость с реологией общего вида. Возникает вопрос: каковы должны быть показатели  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , чтобы при подстановке представлений (1.12) в общие нелинейные уравнения (1.2)–(1.4) последние допускали автомодельный по переменной  $\eta$  вид для произвольных функций  $F(d)$  и  $G(\sigma)$ ? Ответ дает следующее утверждение, доказываемое непосредственной подстановкой (1.12) в (1.2)–(1.4).

Задача  $I$  в напряжениях допускает автомодельный с переменной  $\eta$  вид для произвольной функции  $G(\sigma)$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = 0$ . В этом случае

$$\eta^2 \varphi'' + \eta(b_1 + 4\mu G'(S\varphi)\eta^2)\varphi' - b_2 \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (3.1)$$

где  $S$  – заданная постоянная величина с размерностью напряжения.

Задача II в скоростях деформации допускает автомодельный с переменной  $\eta$  вид для произвольной функции  $F(d)$  тогда и только тогда, когда  $\beta = 0$ . В этом случае

$$U\eta^2 F'(U\psi)\psi'' + U^2\eta^2 F''(U\psi)\psi'^2 + U\eta(b_1 F'(U\psi) + 4\mu\eta^2)\psi' - b_2 F(U\psi) = 0 \quad (3.2)$$

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\infty) = 0$$

причем  $U$  – заданная постоянная величина с размерностью скорости деформации. Заметим, что уравнение (3.2) следует из (3.1) в результате замены  $S\varphi(\eta) = F(U\psi(\eta))$  и с учетом того, что  $F'(U\psi) = 1/G'(S\varphi)$ . Поэтому достаточно остановиться лишь на свойствах решений задачи (3.1). Эта задача в линейном случае ( $2\mu G' \equiv 1$ ), очевидно, совпадает с задачей (2.4), где надо положить  $\alpha = 0$ .

Пусть

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^2 G'(S\varphi(\eta)) = 0 \quad (3.3)$$

Тогда асимптотическое при  $\eta \rightarrow 0$  поведение решений уравнения (3.1) совпадает с поведением решений уравнения Эйлера  $\eta^2\varphi'' + b_1\eta\varphi' - b_2\varphi = 0$  с характеристическими корнями  $-a_1$  и  $a_2 + 1$ . Для удовлетворения граничному условию  $\varphi(0) = 1$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из двух систем:  $a_1 = 0, a_2 > -1$  либо  $a_2 = -1, a_1 < 0$ , т.е.  $b_2 = a_1(a_2 + 1) = 0$ .

Равенство  $b_2 = 0$  фактически означает, что речь может идти лишь о плоскопараллельном сдвиге в декартовой системе координат ( $a_1 = a_2 = 0$ ). При этом  $b_1 = a_1 - a_2 = 0$  и задача (3.1) запишется следующим образом:

$$\varphi'' + 4\mu G'(S\varphi)\eta\varphi' = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (3.4)$$

Итак, если физическая нелинейность среды такова, что выполняется условие (3.3), то задачи (3.1) и (3.4) эквивалентны и описывают диффузию разрыва касательного напряжения на границе нелинейно-вязкой полуплоскости.

**4. Степенные жидкости. Регулярное возмущение степенной нелинейностью.** Так как  $\varphi(0) = 1$ , то условию (3.3) удовлетворяют, например, функции  $G(\sigma)$ , имеющие ограниченные производные всех порядков в точке  $S$ . К числу таких функций относятся и степенные (1.13). Подставим  $G(\sigma) = (\sigma/(2\mu_0))^{1/q}$  в (3.4) и определим характерную динамическую вязкость  $\mu$  как

$$2\mu = qS^{(q-1)/q}(2\mu_0)^{1/q}, \quad q > 0 \quad (4.1)$$

Получим

$$\varphi'' + 2\eta\varphi^{(q-1)/q}\varphi' = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (4.2)$$

Задача (4.2) требует численного интегрирования. Ограничимся здесь аналитическим исследованием случая  $|1 - q| \ll 1$ , когда свойства среды весьма близки к свойствам ньютоновской вязкой жидкости. Принимая величину  $1 - q$  за малый параметр, оценим главную часть возмущения материальной функции  $G$  на интервале значений аргумента  $0 < \varphi_1 \leq 1$  ( $0 < \sigma \leq S$ ), характерном для рассматриваемой задачи:

$$|\Delta G| = \left| \left( \frac{S\varphi}{2\mu_0} \right)^{1/q_0} - \frac{S\varphi}{2\mu} \right| = \frac{S}{2\mu} |q\varphi^{1/q} - \varphi| = \quad (4.3)$$

$$= \frac{S}{2\mu} |(\ln \varphi - 1)\varphi| |1 - q| + O((1 - q)^2) \leq \frac{S}{2\mu} |1 - q| + O((1 - q)^2)$$

Выпишем регулярное разложение решения задачи (4.2) по параметру  $1 - q$ :

$$\varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + (1 - q)\varphi_1(\eta) + \dots \quad (4.4)$$

Здесь  $\varphi_0(\eta)$  – невозмущенное решение (2.11), а  $\varphi_1(\eta)$  – решение линейной задачи

$$\varphi_1'' + 2\eta\varphi_1' = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} \text{Inerfc}\eta, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(\infty) = 0 \quad (4.5)$$

имеющее вид

$$\varphi_1(\eta) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(J(\eta) - J(\infty)\text{erf}\eta), \quad J(\eta) = \int_0^\eta e^{-\eta_1^2} \int_0^{\eta_1} \eta_2 \text{Inerfc}\eta_2 d\eta_2 d\eta_1 \quad (4.6)$$

В случае степенных жидкостей с определяющим соотношением (1.13) кроме автомодельного представления (1.12) существуют и другие автомодельные решения, например целое семейство вида

$$v(x, t) = Vx^{(q+1)/(q-1)}t^{1/(1-q)}\chi\left(\frac{x}{(vt)^{q_1}}\right), \quad q_1 \in R, \quad q \neq 1 \quad (4.7)$$

которые в данной работе не рассматриваются.

**5. Частные решения для сред, близких к жесткоидеальнопластическим.** Поставим обратную задачу, а именно найдем такую реологическую кривую  $G(\sigma)$ , т.е. такую среду, для которой некоторая заданная функция  $\varphi$ , удовлетворяющая граничным условиям, например

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{(1 + \eta)^n}, \quad n \in N \quad (5.1)$$

решение задачи (3.4). Подставляя (5.1) в уравнение (3.4), приходим к следующей задаче Коши для функции  $G$ :

$$\frac{4\mu}{(n+1)S} \frac{dG}{d\varphi} = \frac{\varphi^{2/n}}{1 - \varphi^{1/n}}, \quad G(0) = 0 \quad (5.2)$$

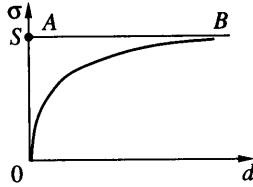
Интегрируя (5.2), получим зависимость  $G$  от размерного аргумента  $\sigma = S\varphi$ :

$$G(\sigma) = -\frac{n(n+1)}{4\mu}S \left[ \ln\left(1 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^{1/n}\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \left(\frac{\sigma}{S}\right)^{k/n} \right] \quad (5.3)$$

Равенство (5.3) при фиксированном  $n$  представляет собой определяющее соотношение нелинейной двухконстантной ( $\mu$  и  $S$ ) жидкости, свойства которой близки к свойствам жесткоидеальнопластического тела с пределом текучести  $S$ . График функции, обратной (5.3), т.е.  $\sigma = F(d)$ , изображен на фиг. 2. Из него видно, что, действительно, при любой скорости деформации  $d$  напряжение  $\sigma$  ограничено пределом  $S$ . Кроме того, увеличивая вязкость  $\mu$ , кривую  $F(d)$  можно как угодно приблизить к углу  $OAB$ . В данном случае предел текучести предельной при  $\mu \rightarrow \infty$  жесткоидеальнопластической модели совпадает с касательным напряжением, заданным на границе полуплоскости.

Отметим две особенности кривых (5.3) для различных  $n \in N$ .





Фиг. 2. Определяющее соотношение жидкости, близкой к жесткоидеальнопластическому телу

Сумма  $n + 1$  членов, стоящая в (5.3), есть как раз  $(n + 1)$ -ая частичная сумма ряда Тейлора первого слагаемого в (5.3), взятая с противоположным знаком. Поэтому при  $\sigma \rightarrow 0^+$  ( $d \rightarrow 0^+$ ) имеем

$$G(\sigma) \sim \sigma^{(n+2)/n}, \quad F(d) \sim d^{n/(n+2)} \tag{5.4}$$

т.е. мгновенная вязкость равна бесконечности.

Стремление  $\sigma \rightarrow S^-$  при  $d \rightarrow \infty$  экспоненциальное

$$\sigma \sim S \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\mu d}{n(n+1)S}\right) \right]^n \tag{5.5}$$

Точный вид функции  $G(\sigma)$  можно выписать и в некоторых случаях, когда  $n$  не натуральное число в (5.1). Например, для  $n = 1/2$

$$G(\sigma) = \frac{3S}{8\mu} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{S+\sigma}{S-\sigma} - \frac{\sigma}{S} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma}{S}\right)^3 \right] \tag{5.6}$$

Заметим, что в (5.6), как и при любом  $n \in N$  в (5.3)

$$G'(S\varphi(\eta)) \sim \eta^{-1}, \quad \eta \rightarrow 0 \tag{5.7}$$

так что условие (3.3), использованное при выводе уравнения (3.4), выполнено.

**Заключение.** Термин “обобщенная диффузия вихря”, используемый в данной работе, предполагает довольно общую кинематику одномерного нестационарного сдвига, общность в задании особенности в точке начального разрыва и произвольную зависимость  $\sigma = F(d)$  касательного напряжения от скорости деформации сдвига. Все эти параметры сильно влияют на вид решения, его асимптотическое поведение вблизи точки разрыва и характер стабилизации профиля на больших временах.

Для физически линейной среды (ньютоновской вязкой жидкости) в работе получены новые автомодельные решения в скоростях и напряжениях, описывающие процесс нестационарного осесимметричного ( $R, \varphi$ )-сдвига в сферических координатах ( $R, \psi, \varphi$ ). В среде с малой степенной нелинейностью аналитически построено первое приближение асимптотики решения в задаче о диффузии вихревого слоя. Для класса двухконстантных жидкостей, свойства которых близки к свойствам жесткоидеальнопластического материала с пределом текучести, равным одной из этих констант, предложены решения, степенным образом убывающие с ростом автомодельной переменной.

Для существования автомодельных решений в начально-краевых задачах, рассмотренных выше, важно выполнение равенства  $F(0) = 0$ , что означает отсутствие предела текучести. Если же  $F(0^+) > 0$ , т.е. речь идет о вязкопластической среде, то появляется неизвестная граница, разделяющая область течения и жесткую зону. Поиск точных решений в автомодельном виде в таких задачах [9] также весьма важен и интересен.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№№ 05-01-00397, 05-01-00401, 05-01-00403).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 432 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 142 с.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
6. *Баутин С.П., Елисеев А.А.* Многомерная аналитическая тепловая волна, определяемая краевым режимом // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 1052–1062.
7. *Ильюшин А.А.* Некоторые вопросы теории пластического течения // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 2. С. 64–86.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Георгиевский Д.В.* Диффузия разрыва касательного напряжения на границе вязкопластической полуплоскости // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 884–892.

Москва

Поступила в редакцию  
29.VIII.2006