

УДК 532.517.2:551.213.3

© 2007 г. А.А. ОСИПЦОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ОСТЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЙ ТОНКОГО СЛОЯ СИЛЬНОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

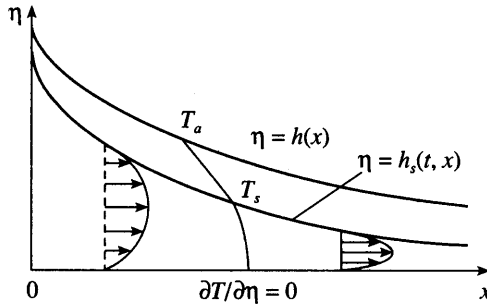
Построены асимптотические модели процесса солидификации в пленочном течении сильновязкой жидкости на поверхности конуса при фиксированном массоподводе в вершине конуса. В приближении тонкого слоя задача сведена к решению двух параболических уравнений для температуры в жидкости и твердом теле совместно с обыкновенным дифференциальным уравнением для фронта солидификации. При больших числах Пекле найдено аналитическое стационарное решение для фронта солидификации. Определен параметр подобия, позволяющий разделить течения без образования твердой корки, течения со стационарной твердой коркой и течения с полной солидификацией. При конечных числах Пекле и больших числах Стефана найдено аналитическое нестационарное решение и получено время полной солидификации течения. В общем случае, когда все определяющие параметры имеют порядок единицы, исходная система уравнений исследована численно. Проведено качественное сопоставление полученных решений с данными полевых наблюдений для лавовых потоков при экструзивных вулканических извержениях.

Ключевые слова: вязкая жидкость, коническая поверхность, пленочное течение, солидификация, экструзивное извержение.

Неизотермическое течение тяжелой вязкой жидкости на твердой плоской поверхности рассматривалось в большом количестве работ в приложении к задачам химической технологии [1], ядерной индустрии [2, 3] и геофизики [4–6]. Значительно меньшее число теоретических исследований посвящено изучению солидификации в пленочных течениях. В [7] изучено течение пленки с солидификацией на обтекаемой поверхности в приложении к проблеме образования наледи на поверхности крыльев самолетов. В [8] проведено обобщение модели пленочного течения на горизонтальной плоскости [9] на случай неизотермического течения с солидификацией, при котором фронт солидификации распространяется от подстигающей поверхности внутрь слоя жидкости. Найдены различные асимптотические решения в зависимости от величины определяющих безразмерных параметров.

Настоящая работа посвящена построению асимптотических моделей пленочного течения на поверхности конуса при наличии солидификации в приложении к описанию экструзивных вулканических извержений. При течениях лавы поток тепла от свободной поверхности существенно превышает поток тепла в подстигающую поверхность [10], что приводит к быстрому остыванию верхнего приповерхностного слоя жидкости и образованию движущегося либо неподвижного твердого слоя. Ниже будет рассмотрено распространение фронта солидификации от верхней границы течения внутрь слоя жидкости в предположении, что на верхней границе уже образовалась тонкая твердая корка. Предполагается, что в вершине конуса задан постоянный массоподвод, а характерная скорость течения существенно больше, чем скорость распространения фронта солидификации. Это позволяет считать, что форма верхней твердой границы определяется из решения задачи о стационарном изотермическом течении пленки.

Данная работа является продолжением работы [11], в которой в пренебрежении эффектами солидификации были построены асимптотические модели неизотермического пленочного течения на поверхности конуса при экспоненциальной зависимости вязко-



Фиг. 1. Схема течения вязкой жидкости в тонком слое толщины h_s на поверхности конуса под неподвижным твердым слоем с верхней границей $\eta = h$. Поверхность раздела фаз $\eta = h_s$ распространяется вниз за счет солидификации жидкости при температуре T_s . Над верхней поверхностью твердого слоя находится неподвижная среда при температуре T_a ; подстилающая твердая поверхность теплоизолирована

сти от температуры. С другой стороны, построенная ниже модель является развитием задачи [12] о солидификации течения в плоском либо осесимметричном канале, находящемся в безграничном объеме твердого вещества. В более упрощенной постановке лавовое течение в канале с солидификацией рассматривалось в [13, 14]. Течения с солидификацией в канале с упругими стенками при фиксированном объеме жидкости и при постоянном массоподводе были рассмотрены в [15, 16].

1. Постановка задачи. Рассматривается нестационарное неизотермическое течение сильновязкой тяжелой несжимаемой жидкости в тонком слое между твердой поверхностью конуса и твердым верхним слоем (фиг. 1). Течение происходит от точечного источника в вершине конуса и является осесимметричным. Считаем, что остывание жидкости происходит за счет оттока тепла на верхней границе, а поток тепла в подстилающую поверхность пренебрежимо мал. Это предположение обычно используется при построении гидродинамических моделей остывающего лавового течения [5, 6, 10]. Жидкость имеет начальную температуру T_e , а окружающая среда температуру $T_a < T_e$. В результате остывания при температуре T_s ($T_a < T_s < T_e$) происходит солидификация жидкости на границе с верхним твердым слоем. При описании процесса солидификации выделяют температуру, при которой начинается образование кристаллов в жидкости (температура ликвидуса), и температуру, при которой происходит полное затвердевание (температура солидуса). Следуя [12, 13], в целях упрощения в данной работе будем считать, что твердая и жидкая фазы неразличимы по физическим свойствам и имеют одинаковую температуру фазового перехода. Зависимостью вязкости и теплопроводности жидкости от температуры пренебрегаем.

Введем ортогональную криволинейную систему координат с центром в вершине конуса O связанную с подстилающей поверхностью. Оси x и y направим по образующей и нормали к поверхности конуса соответственно, а угол φ будем отсчитывать в горизонтальной плоскости против часовой стрелки от некоторого фиксированного направления. Коэффициенты Ламэ для координатных осей x, φ, y равны $1, r, 1$, где $r = x \cos \theta$ (здесь θ – угол наклона образующей конуса к горизонтали). Уравнения Навье – Стокса и притока тепла в безразмерных переменных в проекции на оси координат принимают вид [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \varepsilon Re a_x + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \sin \theta \\ \varepsilon Re a_y + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \text{Pe} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= 2\text{EcPr}e^{ij} e_{ij} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ u^* &= Uu, \quad v^* = Uv, \quad x^* = Lx, \quad y^* = Ly, \quad r^* = Lr \\ p^* &= \frac{\rho U^2}{\text{Re}} p, \quad \text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Re}} = \frac{\mu U}{\rho g L^2}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \\ T^* &= T_a + T \Delta T^*, \quad \Delta T^* = T_e - T_a, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c}{\lambda}, \quad \text{Ec} = \frac{U^2}{c \Delta T^*} \\ t^* &= \frac{L^2}{\kappa} t, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad \text{Pe} = \text{PrRe} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь a_x и a_y – проекции вектора $d\mathbf{V}/dt$ на оси координат, p – давление, ρ , μ – плотность и вязкость жидкости, λ и κ – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, c – теплоемкость, L – характерный масштаб длины, U – характерный масштаб продольной компоненты скорости, размерные переменные обозначены звездочкой. Считаем, что все характерные масштабы, кроме масштаба скорости U (который будет определен ниже), известны. Граничные условия на подстилающей поверхности конуса ($y = 0$) и на фронте солидификации ($y = h_s$) имеют вид

$$y = h_s: u = v = 0, \quad T = \Theta \quad (1.3)$$

$$S \frac{\partial h_s}{\partial t} = \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right]_+ = \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y=h_s+0} - \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y=h_s-0}$$

$$y = 0: u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

$$x \rightarrow 0, \quad 0 \leq y \leq h_s: T = 1$$

$$S = \frac{c_L}{c \Delta T^*}, \quad \Theta = \frac{T_s - T_a}{T_e - T_a}$$

Здесь $[\partial T / \partial n]_+$ – скачок потока тепла на фронте солидификации, S – число Стефана, Θ – безразмерная температура солидификации, c_L – удельная теплота кристаллизации. В твердом слое $u = v = 0$ и имеет место уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (1.5)$$

В [11] рассмотрены различные асимптотические модели неизотермического тонкого слоя вязкой жидкости на поверхности конуса в зависимости от порядка величины безразмерного потока тепла на свободной поверхности Nu . Среди асимптотически различных вариантов постановки граничных условий рассмотрим случай наиболее интенсивного потока тепла на свободной поверхности ($\text{Nu} \rightarrow \infty$), так как предполагается, что именно в этом случае реализуется режим течения с солидификацией

$$y = h: T = 0 \quad (1.6)$$

Считаем, что при $t = 0$ уже образовался тонкий твердый слой, заключенный между поверхностями h_s и h . Тогда в качестве начальных условий примем однородный профиль температуры в жидкости и линейный профиль в твердом слое

$$0 \leq y < h_s: T = 1; \quad h_s \leq y \leq h: T = \Theta \frac{h-y}{h-h_s} \quad (1.7)$$

При этом поле скорости в начальный момент времени задается в соответствии со стационарным изотермическим решением [18]. Запишем закон сохранения массы в интегральной форме, считая размерный расход источника Q постоянным

$$x \int_0^{h_s} u dy = \frac{Q}{UL^2} \quad (1.8)$$

2. Приближение тонкого слоя. Постановка задачи содержит малый параметр ε , значения которого для реальных лавовых течений лежат в диапазоне $[10^{-8}, 10^{-2}]$ [11]. Выведем уравнения течения тонкого слоя, разлагая искомые функции в асимптотические ряды по ε и удерживая в них только главные члены

$$y = \varepsilon^{1/2} \eta, \quad h = \varepsilon^{1/2} h_0, \quad h_s = \varepsilon^{1/2} h_{s0}, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_0, \quad u = \varepsilon^{1/2} u_0, \quad p = \varepsilon^{-1} p_0 \quad (2.1)$$

Остальные функции имеют порядок единицы, для краткости индекс 0 ниже опущен. При переходе к растянутым переменным из (1.8) получаем соотношение $Q \sim \varepsilon^{1/2} UL^2$. Полагая в этом соотношении строгое равенство, находим выражения для U и ε

$$U = \left(\frac{\rho g Q^2}{\mu L^2} \right)^{1/3}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\mu Q}{\rho g L^4} \right)^{2/3} \quad (2.2)$$

При подстановке разложений (2.1) в уравнения и граничные условия (1.1)–(1.7) будем считать $Re = o(\varepsilon^{-1})$, что позволяет пренебречь конвективными членами в уравнениях движения. Для лавовых течений параметр Ec/Re лежит в диапазоне $[10^{-5}, 10^{-2}]$ [11], поэтому слагаемым с диссипативной функцией в уравнении притока тепла пренебрегаем. Пренебрежение вязкой диссипацией является стандартным предположением при построении моделей солидификации лавового течения в канале [12–14]. Считаем также, что в уравнении притока тепла $Pe_m = \varepsilon Re \sim 1$. Оставляя только главные члены при $\varepsilon \rightarrow 0$, из (1.2) и (1.5) получим уравнения

$$0 \leq \eta \leq h_s: \quad \frac{\partial u x}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Pe_m \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

$$h_s \leq \eta \leq h: \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \quad (2.4)$$

$$t = t^* \frac{\kappa}{(\sqrt{\varepsilon} L)^2}, \quad p_1 = p - x \sin \theta, \quad Pe_m = \varepsilon Re = Fr^2 Pr$$

Здесь масштаб времени представляет собой характерное время теплопроводности в поперечном направлении. Индекс l далее опустим. Предположим, что остывание происходит существенно медленнее, чем распространение переднего фронта течения, т.е. характерное время теплопроводности $t_{ih}^* = \varepsilon L^2 / \kappa$ существенно больше, чем динамический масштаб времени $t_{dyn}^* = L/U$. Отношение двух масштабов времени можно выразить через определяющие размерные параметры задачи с использованием формулы (2.2)

$$\frac{t_{ih}^*}{t_{dyn}^*} = \frac{c}{\lambda} \left(\frac{\mu \rho^2 Q^4}{g L^7} \right)^{1/3}$$

В частности, для лавовых течений отношение характерного времени теплопроводности к динамическому масштабу времени имеет порядок величины от десятков до тысяч (при оценке величин использованы данные [5]). Тогда можно считать, что верхняя граница твердого слоя определяется из стационарного решения для формы свободной границы изотермического течения [18].

Граничные и начальные условия (1.3), (1.4), (1.6)–(1.8) в растянутых переменных принимают вид

$$\eta = h: T = 0 \quad (2.5)$$

$$\eta = h_s: u = v = 0, \quad T = \Theta, \quad S \frac{\partial h_s}{\partial t} = \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]^+ \quad (2.6)$$

$$\eta = 0: u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad (2.7)$$

$$x \rightarrow 0, \quad 0 \leq \eta \leq h_s: T = 1 \quad (2.8)$$

$$x \int_0^{h_s} u d\eta = 1 \quad (2.9)$$

$$t = 0, \quad h_s \leq \eta \leq h: T = \Theta \frac{h - \eta}{h - h_s} \quad (2.10)$$

$$t = 0, \quad 0 \leq \eta < h_s: T = 1$$

Интегрируя динамическое уравнение в проекции на ось x (2.3), получаем выражение

$$u = \frac{\eta}{2} (\eta - h_s) \frac{\partial p}{\partial x}$$

Условие (2.9) позволяет выразить продольный градиент давления через толщину слоя h_s по формуле $\partial p / \partial x = -12 / (x h_s^3)$. Интегрируя уравнение неразрывности (2.3) с учетом последнего выражения и формулы для u , получаем

$$u = \frac{6\eta(h_s - \eta)}{x h_s^3}, \quad v = \frac{6\eta(h_s - \eta)}{x h_s^3} \frac{\eta}{h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x} \quad (2.11)$$

Введем новую растянутую поперечную координату внутри слоя жидкости $\xi = \eta / h_s$, отобразив таким образом область течения с неизвестной границей на внутренность прямоугольной полосы (аналогичный прием был использован в [6, 11, 12]). Введем новую нормированную температуру в слое жидкости по формуле $T = \Theta + (1 - \Theta) T_1$. В новых переменных с учетом найденных компонент скорости (2.11) тепловая задача в слое жидкости (2.3), (2.6)–(2.8) принимает вид

$$h_s^2 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \text{Pe}_m 6\xi(1 - \xi) \frac{h_s}{x} \frac{\partial T_1}{\partial x} - h_s \xi \frac{\partial h_s}{\partial t} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} \quad (2.12)$$

$$\xi = 1: T_1 = 0; \quad \xi = 0: \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = 0$$

$$x \rightarrow 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1: T_1 = 1; \quad t = 0: T_1 = 1$$

Введем новую растянутую переменную χ внутри твердого слоя по формуле $\eta = h_s + \chi(h - h_s)$. Относя температуру в твердом теле к температуре солидификации $T = \Theta T_2$, перепишем уравнение (2.4) с граничными условиями (2.5), (2.6) и начальным условием (2.10) в новых переменных

$$(h - h_s)^2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - (1 - \chi)(h - h_s) \frac{\partial h_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \chi^2} \quad (2.13)$$

$$\chi = 0: T_2 = 1; \chi = 1: T_2 = 0; \quad t = 0: T_2 = 1 - \chi$$

В новых переменных эволюционное уравнение (2.6) для фронта солидификации записывается в форме

$$S \frac{\partial h_s}{\partial t} = \frac{\Theta}{h - h_s} \frac{\partial T_2}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0} - \frac{1 - \Theta}{h_s} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (2.14)$$

Таким образом, задача сведена к решению двух тепловых задач (2.12) и (2.13) с переменными коэффициентами в неподвижных прямоугольных областях. Эти задачи должны решаться совместно с уравнением для фронта солидификации (2.14), который входит в коэффициенты уравнений (2.12) и (2.13). Сформулированная постановка задачи содержит три независимых безразмерных параметра S , Pe_m и Θ .

3. Асимптотические решения при $S \rightarrow \infty$. Считаем, что Pe_m и Θ имеют порядок единицы. Данный асимптотический предел соответствует течению жидкости при начальной температуре, близкой к температуре окружающей среды. В рассматриваемом случае распространение фронта солидификации происходит на значительно большем масштабе времени, чем характерное время теплопроводности в поперечном направлении, поэтому введем новое растянутое время $\tau = t\Theta/S$. Тогда в уравнении притока тепла (2.12) и в уравнении теплопроводности (2.13) слагаемые с производными по времени имеют порядок $O(S^{-1})$ и поэтому могут быть отброшены. Таким образом, в данном случае процесс солидификации происходит медленно и течение квазистационарно. Решением уравнения (2.13) в рассматриваемом асимптотическом пределе будет стационарное линейное распределение температуры $T_2 = 1 - \chi$. Поток тепла в твердом слое на фронте солидификации определяется по формуле

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_+ = -\frac{\Theta}{h - h_s} \quad (3.1)$$

Введем новую продольную координату

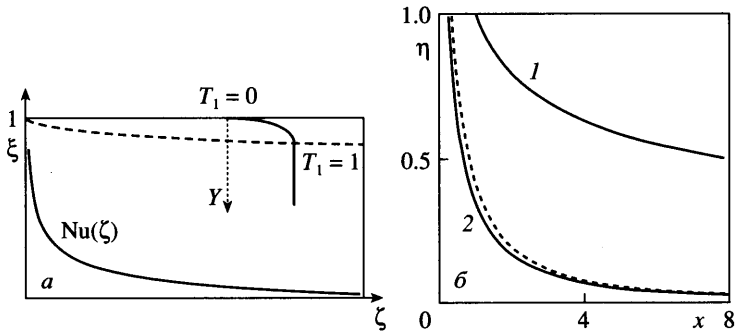
$$\zeta(x) = \frac{1}{6} \int_0^x \frac{x_1 dx_1}{h_s} \quad (3.2)$$

С учетом сделанных предположений задача (2.12) в новых переменных принимает вид

$$Pe_m \xi (1 - \xi) \frac{\partial T_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} \quad (3.3)$$

$$\xi = 0: \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = 1: T_1 = 0; \quad \zeta \rightarrow 0: T_1 = 1$$

Таким образом, тепловая задача в слое жидкости сведена к одному из вариантов классической задачи Гретца–Нуссельта о стационарной вынужденной конвекции в



Фиг. 2. Схема теплового пограничного слоя в жидкости вблизи фронта солидификации (а). Пунктиром показана граница пограничного слоя, сплошной линией показано решение для потока тепла на верхней границе. Форма верхней твердой границы 1 и аналитическое стационарное решение для фронта солидификации при $S \rightarrow \infty$ и $Re_m \rightarrow \infty$ 2 (б). Штриховая линия – явная аппроксимация стационарного решения

плоском канале, которая была впервые рассмотрена независимо в [19, 20]. Систематический обзор по задачам солидификации при вынужденной и свободной конвекции приводится в [21]. При изучении солидификации течения в канале тепловая задача в жидкости была впервые сведена к задаче Гретца – Нуссельта в [22]. При этом распространение фронта солидификации определялось на основе результатов решения тепловой задачи в жидкости и сопряженных тепловых задач в затвердевшем слое и окружающей среде.

Стационарный режим течения при $Re_m \rightarrow \infty$. В случае $Re_m \rightarrow \infty$ в жидкости вблизи фронта солидификации формируется тепловой пограничный слой, вне которого распределение температуры однородно $T_1 = 1$ (фиг. 2, а). Вводя в уравнении (3.3) новую растянутую переменную внутри пограничного слоя $Y = (1 - \xi)Re_m^{1/3}$ и переходя к пределу $Re_m^{-1/3} \rightarrow 0$, получаем задачу о стационарном тепловом пограничном слое, впервые исследованную в [23]

$$Y \frac{\partial T_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial Y^2} \quad (3.4)$$

$$Y = 0: T_1 = 0; \quad Y \rightarrow \infty: T_1 \rightarrow 1; \quad \zeta = 0: T_1 = 1$$

При этом искомый поток тепла в жидкости на фронте солидификации выражается по формуле

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right|_- = -Re_m^{1/3} \left. \frac{\partial T_1}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (3.5)$$

Задача (3.4) имеет автомодельное решение в форме $T_1 = f(w) = f(Y/\zeta^{1/3})$, где $f(w)$ удовлетворяет уравнению

$$3f'' - w^2 f' = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

Интегрируя полученное уравнение с учетом граничных условий, получаем хорошо известное решение Левека [23] для распределения температуры в стационарном тепловом пограничном слое $f(w) = \Gamma(1/3, w^3/9)/\Gamma(1/3)$. Здесь $\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma(\alpha, z)$ – гамма-функция и

неполная гамма-функция соответственно [24]. Данное решение позволяет записать поток тепла в явном виде

$$\text{Nu}(\zeta) = \frac{\partial T_1}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\Gamma(1/3)} \zeta^{-1/3} \quad (3.6)$$

На фиг. 2, а приведен эскиз найденной зависимости $\text{Nu}(\zeta)$ (3.6). Учитывая, что $\Gamma(1/3) = 2.6789$ [25], получим явное выражение $\text{Nu}(\zeta) = 0.5384\zeta^{-1/3}$. С использованием полученных выражений (3.6), (3.5), (3.2) и (3.1), запишем эволюционное уравнение (2.12) для фронта солидификации в виде

$$\frac{\partial h_s}{\partial \tau} = \frac{C}{h_s \zeta^{1/3}} - \frac{1}{h - h_s}, \quad C = \frac{\sqrt[3]{3} \text{Pe}_m^{1/3} (1 - \Theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Theta} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{x}{6h_s}$$

Система (3.7) имеет аналитическое стационарное решение в неявном виде

$$h_s = \frac{Ch}{Z}, \quad 18C \left[\frac{Z^2}{2} - 2CZ + C^2 \ln\left(\frac{Z}{C}\right) + \frac{3}{2}C^2 \right] = \int \frac{x dx}{h(x)} \quad (3.8)$$

Здесь $Z = C + \zeta^{1/3}$. По предположению форма верхней границы твердого слоя задается стационарным изотермическим решением [18]

$$h = [a(\theta)]^{1/3} x^{-1/3}, \quad a(\theta) = \left(\frac{6}{\sin 2\theta} \right) \quad (3.9)$$

С учетом выражения для формы верхней твердой границы (3.9) стационарное решение (3.8) в новых переменных $h_s = 42^{-1/7} [a(\theta)]^{2/7} h_s^0$, $x = 42^{3/7} [a(\theta)]^{1/7} x_0$ принимает вид, не зависящий явно от θ :

$$h_s = \frac{C}{x^{1/3} Z}, \quad C \left[\frac{Z^2}{2} - 2CZ + C^2 \ln\left(\frac{Z}{C}\right) + \frac{3}{2}C^2 \right] = x^{7/3} \quad (3.10)$$

Индекс 0 здесь опущен. Функция $Z(x)$ имеет асимптотики

$$x \rightarrow 0: Z = C + \sqrt[3]{3} x^{7/9}; \quad x \rightarrow \infty: Z = \sqrt{\frac{2}{C}} x^{7/6}$$

Для того чтобы определить, является ли построенная асимптотическая модель равномерно пригодной по пространству, найдем асимптотики решения для фронта солидификации

$$x \rightarrow 0: h_s = \frac{C}{x^{1/3} (C + \sqrt[3]{3} x^{7/9})}; \quad x \rightarrow \infty: h_s = \frac{C^{3/2}}{\sqrt{2}} x^{-3/2} \quad (3.11)$$

Как видно из приведенных выражений, построенное решение применимо только при $x \sim 1$ и неприменимо при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow 0$. Дополнительное обсуждение данного свойства будет дано в разд. 5. При $x \rightarrow 1$ хорошую явную аппроксимацию найденного решения (3.10) дает выражение

$$h_s = \frac{C}{x^{1/3} (C + x^{7/6} \sqrt{2/C})} \quad (3.12)$$

Проводя аналогичные выкладки, можно получить аналитическое решение для стационарного фронта солидификации в плоскопараллельном пленочном течении на наклонной плоскости. Для краткости приведем здесь лишь результат

$$h_s = \frac{C}{Z}, \quad C \left[\frac{Z^2}{2} - 2CZ + C^2 \ln \left(\frac{Z}{C} \right) + \frac{3}{2} C^2 \right] = x$$

$$x \rightarrow 0: h_s = \frac{C}{(C + \sqrt[3]{3x})}; \quad x \rightarrow \infty: h_s = \frac{C^{3/2}}{\sqrt{2x}}$$

На фиг. 2, б представлено точное решение для h_s (3.10), аппроксимация решения (3.12), а также форма верхней границы твердого слоя (3.9). Заметим, что стационарное решение существует только в том случае, если при $Re_m \rightarrow \infty$ в уравнении (3.7) параметр $C = O(1)$. Из этого условия и выражения (3.7) получаем

$$Re_m \sim \left(\frac{\Theta}{1 - \Theta} \right)^3, \quad \Theta \rightarrow 1 \quad (3.13)$$

Последнее условие означает, что начальная температура жидкости при истечении из источника близка к температуре солидификации. Если $Re_m \gg \Theta^3/(1 - \Theta)^3$, то в уравнении (3.7) $C \gg 1$ и течение развивается без образования верхней твердой корки. Если, наоборот, $1 \ll Re_m \ll \Theta^3/(1 - \Theta)^3$ и $\Theta \rightarrow 1$, то в уравнении (3.7) $C \ll 1$ и происходит полная солидификация течения.

Были проведены численные расчеты полной системы (3.7) методом Рунге – Кутта и показано, что решение для h_s монотонно выходит на стационарное решение (3.10) вне зависимости от того, где в начальный момент времени находится фронт солидификации – выше либо ниже стационарного положения.

Нестационарные решения при $Re_m \sim 1$. В случае $Re_m \sim 1$ эволюция фронта солидификации описывается уравнением (2.12), (3.1), (3.2)

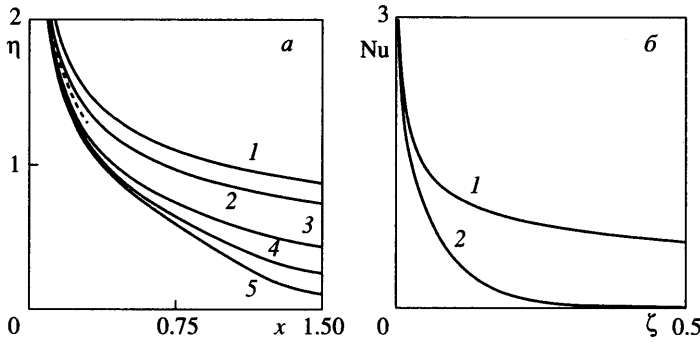
$$\frac{\partial h_s}{\partial \tau} = \frac{1 - \Theta}{\Theta h_s} Nu(\zeta) - \frac{1}{h - h_s}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x}{6h_s}$$

$$Nu(\zeta) = - \left. \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \quad (3.14)$$

$$\tau = 0: h_s = h_s^0(x); \quad x = 0: \zeta = 0$$

Здесь $Nu(\zeta)$ определяется из решения полной задачи Гретца – Нуссельта (3.3). Уравнение (3.3) решалось методом прогонки с использованием неявной двухслойной схемы на четырехточечном шаблоне. Порядок аппроксимации уравнения $O(\Delta t, \Delta x^2)$, однако в целом схема имеет первый порядок точности, так как граничное условие при $\xi = 0$ аппроксимировалось разностью вперед первого порядка. Поток тепла $Nu(\zeta)$ вычислялся по результатам расчетов поля температуры с использованием трехточечной несимметричной аппроксимации первой производной, имеющей второй порядок точности [26]. Результат расчета потока тепла в случае $Re_m = 1$ представлен на фиг. 3. Асимптотикой решения при $\zeta \rightarrow 0$ является решение Левека для потока тепла в тепловом пограничном слое (3.6) (фиг. 3, б). При этом уже при конечных ζ распределение температуры выравнивается поперек канала ($T_1 = 0$), и поток тепла на верхней границе падает практически до нуля.

С использованием результатов расчетов для $Nu(\zeta)$ система (3.14) решалась численно методом Рунге–Кутта как система обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты расчетов распространения фронта солидификации представлены на фиг. 3, а.



Фиг. 3. Нестационарное решение для фронта солидификации при $S \rightarrow \infty$ и $Pe_m \sim 1$ (а). Форма верхней границы твердого слоя (1) и положения фронта солидификации при $\tau = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3$ (2–5). Штриховая линия – стационарная асимптотика. Поток тепла в жидкости на фронте солидификации $Nu(\zeta)$ (а): аналитическое решение при $Pe_m \rightarrow \infty$ (1) и численное решение при $Pe_m \sim 1$ (2)

При $x \rightarrow 0$ решение имеет стационарную асимптотику (3.11), соответствующую решению Левека для $Nu(\zeta)$, тогда как при $x \sim 1$ фронт солидификации не имеет стационарного положения и распространяется вплоть до нижней твердой границы слоя жидкости. В области $x \rightarrow \infty$ ($\zeta \rightarrow \infty$), где $Nu(\zeta) \ll 1$, первым слагаемым в уравнении для h_s (3.14) пренебрегаем, что позволяет проинтегрировать это уравнение аналитически и получить время полного затвердевания слоя жидкости τ_s ,

$$h_s = h(x) - \sqrt{2\tau}, \quad \tau_s(x) = \frac{h^2}{2} \tag{3.15}$$

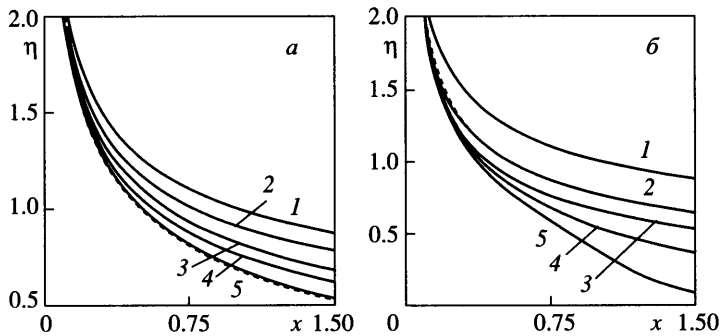
Несмотря на то, что это решение получено в асимптотическом пределе $x \rightarrow \infty$, как уже было замечено выше, поток тепла $Nu(\zeta)$ становится $o(1)$ уже при конечных ζ (фиг. 3, б), поэтому решение (3.15) можно использовать уже при конечных x . Было показано, что эволюция h_s и время полной солидификации вне окрестности $x = 0$, полученные в результате расчетов полной системы уравнений (3.14), хорошо согласуются с асимптотическим решением (3.15). В рассмотренном асимптотическом пределе $Nu(\zeta) = 0$ при $h_s \rightarrow 0$ в уравнении (3.14) не происходит вырождения и не появляется нового масштаба времени, так как второе слагаемое $1/(h - h_s)$ имеет порядок единицы. Поэтому найденное время солидификации (3.14) можно интерпретировать как время, за которое течение полностью затвердевает и останавливается.

4. Численные решения при $S \sim 1$. В этом случае производные по времени в уравнении притока тепла (2.12) и в уравнении теплопроводности (2.13) имеют порядок единицы.

Асимптотический предел $Pe_m \rightarrow \infty$. В этом пределе тепловая задача в жидкости (2.12) опять сводится к задаче о стационарном тепловом пограничном слое (3.4), а искомый поток тепла на фронте солидификации определяется по формулам (3.5), (3.6). Таким образом, эволюционное уравнение (2.14) для фронта солидификации принимает вид

$$\frac{\partial h_s}{\partial \tau} = \frac{C}{h_s \zeta^{1/3}} + \frac{1}{h - h_s} \frac{\partial T_1}{\partial \chi} \Big|_{\chi=0}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x}{6h_s} \tag{4.1}$$

Здесь $\tau = t\Theta/S$, поток тепла в твердом слое находится из решения задачи (2.13), а константа C определяется по формуле (3.7). Полагая производные по времени равными нулю в уравнениях (2.13), (4.1), получаем что стационарное решение этих уравнений совпадает с решением (3.10) для случая $S \rightarrow \infty$.

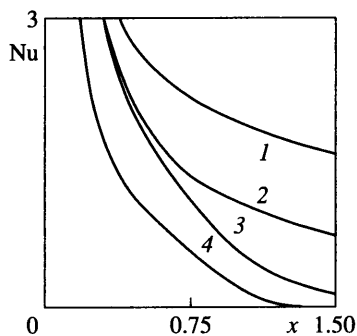


Фиг. 4. Нестационарное решение для фронта солидификации при $S \sim 1$ и $Re_m \rightarrow \infty$ (а). Форма верхней границы твердого слоя (1) и положения фронта солидификации при $\tau = 0.003, 0.01, 0.03, 0.3$ (2–5). Штриховая линия – стационарное решение. Нестационарное решение для фронта солидификации при $S \sim 1$ и $Re_m \sim 1$ (б). Форма верхней границы твердого слоя (1) и положения фронта солидификации при $\tau = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7$ (2–5). Штриховая линия – стационарная асимптотика

Нестационарное решение системы (2.13), (4.1) было найдено численно. В начальный момент времени $h_s = (1 - \delta)h$, где δ варьировалось в пределах $[10^{-2}, 10^{-1}]$. На каждом временном слое сначала методом прогонки решалось уравнение (2.13) с целью определения потока тепла в твердом слое на фронте солидификации. Затем из уравнений (4.1) методом Рунге–Кутты находилось положение фронта солидификации h_s на следующем временном слое. Показано, что нестационарное решение выходит на стационарное решение (3.10) уже при конечных τ (фиг. 4, а).

Общий случай $Re_m \sim 1$. Положим в уравнениях (2.12)–(2.14) $Re_m = 1$ и $S = 1$. Задача (2.12)–(2.14) решалась численно конечно-разностным методом на прямоугольной сетке. В уравнении (2.12) производная по времени аппроксимировалась разностью вперед, производная по x разностью назад, первая производная по ξ центральной разностью, вторая производная по ξ трехточечной симметричной формулой второго порядка. Все пространственные производные были взяты со следующего временного слоя. Таким образом, была построена двухслойная неявная схема. Полученная в результате дискретизации система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей решалась методом прогонки. Аналогично для уравнения (2.13) была составлена двухслойная неявная схема. Решение линейных уравнений также находилось методом прогонки. На текущем слое по времени сначала из уравнений (2.12) и (2.13) находилось распределение температуры в твердом и жидком слоях. Поток тепла на фронте солидификации определялся с помощью трехточечной несимметричной аппроксимации первой производной второго порядка точности. С использованием найденных потоков тепла в твердом и жидком слоях из уравнения (2.14) методом Рунге – Кутты находилось положение фронта солидификации на следующем временном слое.

В рассматриваемом случае фронт солидификации распространяется внутрь слоя жидкости монотонно всюду, за исключением окрестности $x = 0$, где имеет место стационарная асимптотика (3.11) (фиг. 4, б). Как и в случае $S \rightarrow \infty$, $Re_m \sim 1$, существование стационарной асимптотики обусловлено тем, что при $x \rightarrow \infty$ вблизи фронта солидификации образуется тепловой пограничный слой, и для потока тепла в жидкости справедливо стационарное решение Левека (3.6). Вне окрестности $x = 0$ фронт солидификации со временем распространяется вплоть до нижней границы жидкого слоя. Полученное нестационарное решение (фиг. 4, б) качественно соответствует решению в случае $S \rightarrow \infty$, $Re_m \sim 1$ (фиг. 3, а). На фиг. 5 показано распределение потока тепла в жидкости на фрон-



Фиг. 5. Зависимость потока тепла в жидкости на фронте солидификации от продольной координаты при $S \sim 1$ и $Re_m \sim 1$. Кривые 1–4 – $\tau = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7$

те солидификации $Nu(x)$ для различных моментов времени, соответствующих положениям фронта солидификации на фиг. 4, б.

5. Обсуждение. Как было показано выше, стационарное решение (3.10) для формы фронта солидификации, найденное в асимптотическом пределе $Re_m \rightarrow \infty$, верно как при $S \rightarrow \infty$, так и при $S \sim 1$. Для параметров течения основной либо кислой лавы $Re_m \in [1, 10^2]$ [11], т.е. для реальных лавовых течений могут иметь место случаи как больших, так и конечных чисел Re_m . Аналитическое решение для фронта солидификации, полученное для плоскопараллельного течения на наклонной плоскости, можно использовать для описания лавовых течений в случае, когда распространение лавы происходит внутри так называемой лавовой трубы с неподвижными стенками [27]. Существуют данные полевых наблюдений, согласно которым для течений лавы длина лавовой трубы имеет порядок десятков километров, что существенно больше, чем ее ширина (порядка 10–100 м). В свою очередь, ширина течения в лавовой трубе существенно больше, чем глубина (2–10 м) [28, 29]. Именно это соотношение между характерными размерами позволяет использовать построенную в настоящей работе модель течения со стационарным фронтом солидификации для описания реальных потоков в лавовых трубах.

Построенная в настоящей работе модель остывания тонкого слоя со стационарным фронтом солидификации применима только в области $x \sim 1$ и неприменима в областях $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$. Данная особенность – обычное свойство задачи особых возмущений [30], в которой асимптотическое разложение искомых функций по малому параметру не является равномерно пригодным по пространству. В рассматриваемом случае ставилась цель построить решение в области $x \sim 1$, и эту цель удалось достичь без вывода дополнительных уравнений в областях неприменимости основной модели. Дополнительное ограничение на область применимости полученного стационарного решения накладывает тот факт, что в реальном течении верхняя твердая корка имеет конечное предельное напряжение, при котором происходит разлом. Таким образом, данная модель применима до тех пор, пока напряжение на твердой корке не достигнет предельного значения.

Экспериментальные модели лавовых течений в открытом канале с солидификацией на свободной поверхности были исследованы в [31]. Было обнаружено, что существует два различных режима течения: течение в канале с неподвижной верхней коркой, образовавшейся в результате солидификации, и течение с мобильной коркой, при котором солидификация происходит на части свободной поверхности в центре канала. Было показано, что режим течения определяется одним безразмерным параметром, который представляет собой отношение скорости распространения фронта солидификации к скорости тече-

ния в отсутствие солидификации. В [31] указано, что режим лавового течения с неподвижной верхней коркой реализуется при стационарном массоподводе, малом объемном расходе и слабо искривленной подстилающей поверхности. Эти условия качественно соответствуют условиям, при которых было получено стационарное решение (3.10).

Отметим, что стационарное решение существует в сопряженном пределе $Pe_m \rightarrow \infty$, $\Theta \rightarrow 1$, причем между этими параметрами выполнено соотношение (3.13). В работе [12] было найдено критическое число Пекле, разделяющее режим течения с полной солидификацией канала и режим течения с полным проплавлением окружающего твердого вещества как функция Θ и S . В отличие от [12] в рассматриваемом случае течения с тонкой верхней твердой коркой критическое число Пекле не зависит от S .

Уравнения (3.7) для случая $S \rightarrow \infty$ и уравнения (4.1) для случая $S \sim 1$ имеют одно и то же стационарное решение (3.10). Время выхода на стационарное решение в обоих случаях $t_0 \sim 1$, однако в исходных переменных в первом случае время установления $t_0 \sim S \rightarrow \infty$, а во втором случае $t_0 \sim 1$. Таким образом, число Стефана в данной задаче является аналогом числа Струхала, т.е. мерой нестационарности процесса солидификации.

В случае $Pe_m \sim 1$ было найдено асимптотическое нестационарное решение и получено время полной солидификации течения (3.15). С целью последующего сравнения найденного решения с результатами наблюдений выразим время солидификации (3.15) в размерных переменных с учетом формул (1.2) и (2.4):

$$t_s^*(x^*) = \frac{\mu U c_L}{2\lambda g(T_s - T_a)} \left[h\left(\frac{x^*}{L}\right) \right]^2 \quad (5.1)$$

С использованием выражения (2.2) для масштаба скорости U получаем выражение для характерного времени солидификации через известные размерные параметры

$$t_s^* = \frac{c_L}{\lambda(T_s - T_a)} \left(\frac{\rho \mu^2 Q^2}{g^2 L^2} \right)^{1/3} \quad (5.2)$$

На основе данных для параметров лавовых течений [5, 28, 32] получаем следующие оценки: для течения основной лавы время полной солидификации течения имеет порядок суток, а для течения кислой лавы время солидификации имеет порядок нескольких месяцев и даже лет. При этом характерная толщина слоя лавы $\sqrt{\varepsilon} L$ для течений основной лавы имеет порядок десятков сантиметров, а для течений кислой лавы имеет порядок нескольких метров. Определяющие размерные параметры для основной лавы имеют следующие характерные значения ([5, 32] : $L = 10^3$ м, $\rho = 2600$ кг/м³, $\mu = 10^4$ Па с, $\lambda = 2$ Дж/(мс К), $Q = 10$ м³/с, $\Delta T = 300$ К, $c_L = 3.5 \cdot 10^5$ Дж/кг. Соответствующие значения параметров для кислой лавы имеют вид: $L = 10^2$ м, $\rho = 2600$ кг/м³, $\mu = 10^9$ Па с, $\lambda = 1.2$ Дж/(мс К), $Q = 1$ м³/с, $\Delta T = 300$ К, $c_L = 3.5 \cdot 10^5$ Дж/кг. Здесь можно отметить, что приближение теплового пограничного слоя $Pe_m \rightarrow \infty$ условно применимо для течений лавы с вязкостью, превышающей значение $\mu = 10^5$ Па с. Соответственно приближение $Pe_m \sim 1$ применимо для течений при $\mu \sim 10^3 - 10^5$ Пас.

Формула (5.2) может быть использована не только для вычисления оценки времени полного затвердевания лавового течения по известным параметрам лавы, но и для восстановления параметров лавового течения по известному времени солидификации.

Отношение размерного времени солидификации к динамическому масштабу времени можно также представить в виде

$$\frac{U t_s^*}{L} = \frac{Pe_m S}{\Theta} \quad (5.3)$$

При $S \rightarrow \infty$ безразмерное время полной солидификации пропорционально S , что по порядку величины меньше времени солидификации течения в канале [12], которое пропорционально S^2 . В [12] рассматривалось течение в канале, помещенном в бесконечное твердое пространство с граничным условием для температуры на бесконечности, поэтому поток тепла в твердом теле на фронте солидификации меньше, чем в случае течения в канале с тонкой верхней стенкой и таким же граничным условием для температуры на верхней границе стенки.

Заключение. С использованием приближения тонкого слоя вязкой несжимаемой тяжелой жидкости построена асимптотическая модель процесса солидификации пленочного течения на поверхности конуса, при котором фронт солидификации распространяется от верхней границы внутрь слоя жидкости. В построенную модель входят три безразмерных параметра подобия: модифицированное число Пекле, число Стефана и безразмерная температура солидификации. Задача сведена к двум параболическим уравнениям с переменными коэффициентами для температуры в жидкости и твердом слое, которые решаются совместно с обыкновенным дифференциальным уравнением для фронта солидификации.

При больших числах Пекле найдено аналитическое стационарное решение для фронта солидификации в плоском либо осесимметричном течении. Решение для плоского случая можно использовать при описании течений в так называемых лавовых трубах, формирующихся на склонах вулканов при экструзивных вулканических извержениях. Определен параметр подобия (комбинация числа Пекле и температуры солидификации), который позволяет разделить режимы течения с полной солидификацией, стационарные течения с неподвижной твердой коркой и течения без образования твердой корки.

При конечных числах Пекле и больших числах Стефана аналитически найдено асимптотическое нестационарное решение для фронта солидификации и время полной солидификации течения. Данный результат можно использовать как для оценки времени затвердевания лавового течения, так и для восстановления параметров лавы по известным данным полевых наблюдений. В общем случае, когда оба определяющих параметра имеют порядок единицы, нестационарное решение для фронта солидификации найдено численно. На основе сопоставления численного решения с полученными асимптотическими решениями показано, что все качественные особенности распространения фронта солидификации в общем случае хорошо описываются с помощью аналитических решений.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину и О.Э. Мельнику за обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00228 и № 05-01-02901-ЯФ) и Президентского гранта для ведущих научных школ (проект НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Rev. Mod. Phys.* 1997. V. 69. № 3. P. 931–980.
2. *King J.R., Riley D.S., Sansom A.* Gravity currents with temperature-dependent viscosity // *Comp. Assist. Mech. Eng. Sci.* 2000. V. 7. № 3. P. 251–277.
3. *Sansom A., King J.R., Riley D.S.* Degenerate-diffusion models for the spreading of thin non-isothermal gravity currents // *J. Eng. Math.* 2004. V. 48. № 1. P. 43–68.
4. *Bercovici D.* A theoretical model of cooling viscous gravity currents with temperature dependent viscosity // *Geophys. Res. Lett.* 1994. V. 21. № 12. P. 1177–118.
5. *Balmforth N.J., Craster R.V.* Dynamics of cooling domes of viscoplastic fluid // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 422. P. 225–248.
6. *Balmforth N.J., Craster R.V., Sassi R.* Dynamics of cooling viscoplastic domes // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 499. P. 149–182.
7. *Myers T.G., Charpin J.P.F., Chapman S.J.* The flow and solidification of a thin fluid film on an arbitrary three-dimensional surface // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. № 8. P. 2788–2803.

8. *Smith W.R.* The propagation and basal solidification of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents // *J. Eng. Math.* 2004. V. 50. P. 359–378.
9. *Huppert H.E.* The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 121. P. 43–58.
10. *Griffiths R.W.* The dynamics of lava flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 477–518.
11. *Осипцов А.А.* Неизотермические течения лавы на конической подстилающей поверхности // *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. № 2. С. 62–75.
12. *Lister J.R., Dellar P.J.* Solidification of pressure-driven flow in a finite rigid channel with application to volcanic eruptions // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 323. P. 267–283.
13. *Delaney P.T., Pollard D.D.* Solidification of basaltic magma during flow in a dike // *Amer. J. Sci.* 1982. V. 282. № 6. P. 856–885.
14. *Bruce P.M., Huppert H.E.* Thermal control of basaltic fissure eruptions // *Nature.* 1989. V. 342. P. 665–667.
15. *Lister J.R.* The solidification of buoyancy-driven flow in a flexible-walled channel. Pt 1. Constant-volume release // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 272. P. 21–44.
16. *Lister J.R.* The solidification of buoyancy-driven flow in a flexible-walled channel. Pt 1. Continual release // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 272. P. 45–65.
17. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
18. *Осипцов А.А.* Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 6. С. 24–31.
19. *Graetz L.* Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten // *Ann. Phys. Chem.* 1885. V. 25. P. 337–357.
20. *Nusselt W.* Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge // *Z. Ver. Deut. Ing.* 1910. V. 54. P. 1154–1158.
21. *Epstein M., Cheung F.B.* Complex freezing-melting interfaces in fluid flow // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1983. V. 15. P. 293–319.
22. *Zerkle R.D., Sunderland J.E.* The effect of liquid solidification in a tube upon laminar-flow heat transfer and pressure drop // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1968. V. 90. № 2. P. 183–190.
23. *Lévêque M.A.* Les lois de la transmission de chaleur par convection // *Ann. Mines Mem.* 1928. V. 13. P. 201–299, 305–362, 381–415.
24. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
25. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовитца, И. Стигана.* М.: Наука, 1979. 830 с.
26. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 504 с.
27. *Peterson D.W., Holcomb R.T., Tilling R.I., Christiansen R.L.* Development of lava tubes in the light of observations at Mauna Ulu, Kilauea Volcano, Hawaii // *Bull. Volcanol.* 1994. V. 56. P. 343–360.
28. *Lipman P.W., Banks N.G.* Aa flow dynamics, Mauna Loa 1984 // *US Geol. Surv. Prof. Pap.* 1987. P. 1350. P. 1527–1567.
29. *Cashman K.V., Pinkerton H., Stephenson P.J.* Long lava flows // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. № 11. P. 27281–27289.
30. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
31. *Griffiths R.W., Kerr R.C., Cashman K.V.* Patterns of solidification in channel flows with surface cooling // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 496. P. 33–62.
32. *Harris A.J.L., Rowland S.K.* FLOWGO: a kinematic thermo-rheological model for lava flowing in a channel // *Bull. Volcanol.* 2001. V. 63. № 1. P. 20–44.