

УДК 533.697.4

© 2007 г. А.Н. КРАЙКО, Н.И. ТИЛЛЕВА

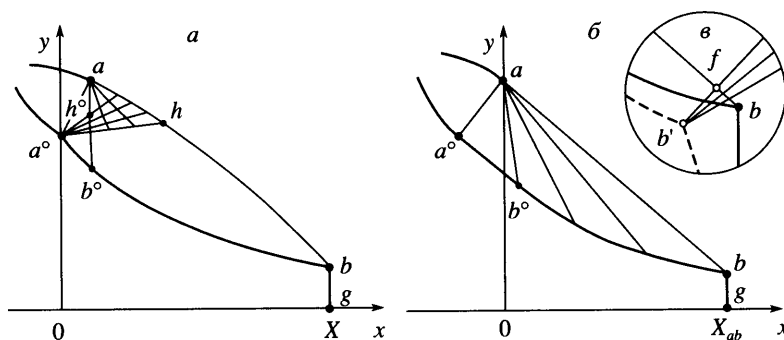
ПРОФИЛИРОВАНИЕ СОПЕЛ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ИХ ПЕРВИЧНЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрены вопросы, связанные с оптимальным профилированием плоских и осесимметричных сопел с центральным телом, которые при заданных габаритах и внешнем давлении реализуют максимум тяги. Рассматриваемые сопла авторегулируемы, что обеспечивается отличным от нуля наклоном их первичного сверхзвукового потока к плоскости (или к оси) симметрии. Наряду с оптимальным профилированием центрального тела (ЦТ) находится оптимальная ориентация “первичного” сопла, создающего первичный поток. В точной постановке его оптимальный наклон определяется перебором конфигураций, которые для заданной длины ЦТ реализуют максимум тяги при разных фиксированных наклонах первичного сопла. У таких конфигураций контуры ЦТ и первичного сопла в общем случае стыкуются с изломом, обтекаемым с образованием пучка волн разрежения. Продемонстрирована работоспособность более простого приближенного способа профилирования ЦТ и определения близкого к оптимальному наклона первичного сопла. В его основе лежит переход к измененной постановке задачи, отличающейся от исходной заданием не полной длины ЦТ, а его части, выступающей за кромку первичного сопла. В измененной постановке излом, обтекаемый с образованием волны разрежения, отсутствует, а угол наклона первичного сопла находится в процессе построения единственной оптимальной конфигурации.

Ключевые слова: оптимальное профилирование, сопла с центральным телом, оптимальное направление первичных сверхзвуковых потоков.

Оптимальным профилированием авторегулируемых сопел с центральным телом (ЦТ) или “шттыревых” сопел занимался широкий круг исследователей (см. работы [1–13], а также [14]). Построенные для этой задачи в [1] в рамках полной системы уравнений течения идеального газа, а в [2, 3] в приближенной постановке оптимальные конфигурации без излома контура ЦТ в точке его стыковки с контуром нижней стенки первичного сопла составляют узкий класс оптимальных образующих ЦТ, реализующихся в особых ситуациях. В общем же случае профилируемый и заданный участки контура ЦТ сопрягаются с изломом или с участком максимально допустимой (по модулю) кривизны. Впервые такие конфигурации рассматривались в [4, 5], а затем и в последующих работах [6–13], посвященных этой задаче. При этом, однако, наклон первичного сопла, как и его степень расширения, выбирались не из требований обеспечения максимума тяги на расчетном режиме, а соображениями, связанными с условиями работы сопла на старте и т.п.

При решении той же задачи авторы [15] вернулись к постановке задачи работы [1] с гладким ЦТ. При этом наклон первичного сопла подбирался из условия удовлетворения одного из условий оптимальности (так называемого условия Буземана). Завязавшаяся дискуссия и расчеты, выполненные в процессе обсуждения с авторами [15], выявили ряд важных и на первый взгляд неожиданных моментов. Прежде всего выяснилось, что при большой длине ЦТ таким способом получают близкие к оптимальному наклон первичного сопла и также близкая к оптимальной гладкая (без начального излома) образующая ЦТ. Что касается его оптимальной образующей, то она начальный излом имеет, однако величина этого излома мала. Приведенные ниже результаты построения опти-



Фиг. 1. Схемы решения исходной (а) и измененной (б, в) задач оптимального профилирования сопла с центральным телом

мальных авторегулируемых плоских сопел с ЦТ и расчета их характеристик проясняют упомянутые выше моменты.

1. Исходная и измененная постановки задачи. Кольцевые сопла с первичным трансзвуковым или сверхзвуковым потоком, направленным к оси симметрии, и их плоский аналог являются авторегулируемыми. На фиг. 1 первичное сопло расположено слева от линии его среза $a^{\circ}a$. Степень разрежения потока в центрированной волне, возникающей при сверхзвуковом обтекании кромки первичного сопла a , определяется уровнем внешнего давления p^+ . При малых p^+ , по крайней мере, конец ЦТ попадает в волну разрежения. С ростом p^+ интенсивность волны разрежения уменьшается, предотвращая заметное перерасширение сверхзвукового потока на ЦТ. Соображения, связанные с обеспечением малых потерь на характерном “нерасчетном” режиме (например, на старте с Земли), определяют связь числа Маха M_0 и угла наклона вектора скорости ϑ_0 на срезе первичного сопла к оси или плоскости симметрии.

В плоском случае первичное щелевое сопло с равномерным сверхзвуковым потоком на срезе получается поворотом симметричного плоского сопла с $M \equiv M_0$ на угол ϑ_0 . Способ профилирования образующих первичных кольцевых осесимметричных сопел с равномерным потоком на срезе развит в работе [16]. В действительности, однако, первичные сопла с равномерным потоком на срезе представляют лишь теоретический интерес. На практике поток на их срезе будет неравномерным. Поэтому далее под M_0 и ϑ_0 понимаются предельные значения M и ϑ на верхней стенке первичного сопла слева от точки a . Для определения M_0 и ϑ_0 одной упомянутой выше связи между ними, естественно, недостаточно.

Если первичное сопло выбрано, то форма ЦТ определяется из решения вариационной задачи обеспечения максимума тяги всей конфигурации (первичное сопло + ЦТ + возможный торец bg , появляющийся из-за ограничения на длину) на “расчетном” режиме с малым и даже нулевым давлением p^+ . В общем случае образующие ЦТ и нижней (ближней к оси или плоскости симметрии) стенки первичного сопла стыкуются с изломом, который обычно обтекается с образованием пучка волн разрежения из S^+ -характеристик (фиг. 1, а). Правда, во всех рассчитанных ранее примерах с длинными ЦТ указанные изломы получались малыми. Суммарная расчетная тяга всего устройства зависит от угла ϑ_0 и определенного по нему из указанной выше связи числа Маха M_0 . Для определения оптимального ϑ_0 нужно для ϑ_0 из возможного интервала его изменения, используя эту связь, найти $M_0 = M_0(\vartheta_0)$ и отвечающие им при заданном расходе G размеры Δ выходных сечений $a^{\circ}a$ первичных сопел, построить оптимальные контуры $a^{\circ}b$ ЦТ заданной длины $X = x_b - x_{a^{\circ}}$, определить их тяги R и найти то значение ϑ_0 , которое обеспечивает максимум R .

Наряду с этим можно воспользоваться иной (измененной) постановкой, которая при $\Delta \ll X$ позволит значительно более просто определять близкие к оптимальным значения ϑ_0 . Существо этой постановки (фиг. 1, б) состоит в переходе от задания длины ЦТ X к заданию $X_{ab} = x_b - x_a$ – длины той его части, которая выступает за кромку первичного сопла, и к формулировке вариационной задачи на некоторой кривой abg . Декартовы или цилиндрические координаты xy с осью x , направленной по плоскости или оси симметрии, теперь выберем так, что $x_a = 0$. Тогда на возможном участке краевого экстремума – торце bg , который образует концевую часть кривой abg , $x = X_{ab}$ при $0 \leq y \leq y_b$. Кривая $x = x(y)$, задающая отрезок ab , который пересекает сверхзвуковой поток, как и в методе неопределенного контрольного контура (МНК) [14], заранее неизвестен. Неизвестны и распределения параметров на ab и ордината y_b верхней точки возможного торца (при $y_g = 0$).

Оптимальные распределения параметров сверхзвукового потока на ab и размер торца (ордината y_b), а также оптимальная величина ϑ_0 определяются из решения вариационной задачи, сформулированной ниже. В этой задаче искомые распределения и величины должны обеспечить минимум функционала

$$R = \int_a^b y^v [\rho V^2 (\cos^2 \vartheta - x' \sin \vartheta \cos \vartheta) + p] dy - \frac{y_b^{1+v} p_+}{1+v} \quad (1.1)$$

с точностью до несущественного при получении условий оптимальности положительно-го множителя – отрицательной тяги оптимизируемого устройства при фиксированных расходе

$$G = \int_a^b y^v \rho V (x' \sin \vartheta - \cos \vartheta) dy \quad (1.2)$$

координатах точки a и максимально допустимой абсциссе точки b : $x_b \leq X_{ab}$ при $y_b \geq 0$, и заданном донном давлении $p_+ \geq 0$. В (1.1) и (1.2) y отсчитывается от плоскости или оси симметрии, ось x направлена вдоль них, $x' = dx/dy$, p , ρ и V – давление, плотность и модуль вектора скорости, $v = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Предполагается, что поток на срезе сопла изоэнергетичен и изэнтропичен, а при $v = 1$ незакручен. Дополнительно предположим, что рассматриваемое течение термодинамически равносильно и не содержит ударных волн. Тогда, если h и s – удельные энтальпия и энтропия, а T – абсолютная температура, то

$$2h + V^2 = \text{const}, \quad s = \text{const}, \quad dh - \frac{1}{\rho} dp = T ds = 0 \quad (1.3)$$

В силу (1.3), уравнений состояния: $h = h(p, s)$ и $\rho = \rho(p, s)$ и определения скорости звука a , давление и плотность – известные функции V , причем

$$\frac{dp}{dV} = -\rho V, \quad \frac{d\rho}{dV} = -\frac{\rho V}{a^2}, \quad \frac{1}{a^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (1.4)$$

2. Условия оптимальности. Для получения условий оптимальности составим вспомогательный функционал $I = R + \lambda G$ с пока неопределенным постоянным множителем Лагранжа λ . При любом выборе конечного λ и фиксированной кривой ab с уравнением $x = x(y)$ и при любых допустимых вариациях параметров на ab и координат точки b , сохраняющих расход G , приращения I и R совпадают, т.е. $\Delta R = \Delta I$. С учетом формул (1.1) и (1.2) и равенств (1.4) получим

$$\Delta R = \Delta I = \int_a^b y^v \rho (A^V \delta V + A^\vartheta \delta \vartheta) dy + y_b^v (A_b^y \Delta y_b + A_b^x \Delta x_b) \quad (2.1)$$

$$A^V = (V \cos \vartheta - \lambda)(1 - M^2)(\cos \vartheta - x' \sin \vartheta) - V(\sin \vartheta + x' \cos \vartheta) \sin \vartheta$$

$$A^\vartheta = V^2[x'(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta] + \lambda V(\sin \vartheta + x' \cos \vartheta)$$

$$A^y = p - p_+ + \rho V(V \cos \vartheta - \lambda) \cos \vartheta, \quad A^x = \rho V(\lambda - V \cos \vartheta) \sin \vartheta$$

Здесь $\Delta y_b = y_{b'} - y_b$ и $\Delta x_b = x_{b'} - x_b$ – приращения координат точки b при допустимых (не увеличивающих длины) варьированиях ЦТ. Их смысл поясняет фиг. 1, в. На ней выходящие из точки b' тонкие линии – C^+ -характеристики пучка волн разрежения, а жирные сплошные (штриховые) линии – исходные (проварьированные) образующие ЦТ. Приращение $\Delta R = \Delta I$ определяется как разность потоков массы и количества движения через ломаную afb' , где af – отрезок начальной C^+ -характеристики пучка волн разрежения и через кривую ab . В (2.1) коэффициенты A_b^y и A_b^x не зависят от формы кривой ab , т.е. от x'_b .

Если искомые распределения параметров на ab и координаты точки b оптимальны (из-за отрицательного направления тяги реализуют минимум R), то при любых их допустимых варьированиях приращения $\Delta R = \Delta I$ должны быть неотрицательны.

В (2.1) коэффициенты перед вариациями V и ϑ на ab и приращениями координат y_b и x_b – функции V и ϑ , множителя Лагранжа λ , функции $x(y)$, а в осесимметричном случае ($v = 1$) еще и координаты y . За счет произвола в выборе $x(y)$ обратим в ноль коэффициент A^V . Это приведет к уравнению

$$(V \cos \vartheta - \lambda)(1 - M^2)(\cos \vartheta - x' \sin \vartheta) = V(\sin \vartheta + x' \cos \vartheta) \sin \vartheta \quad (2.2)$$

для определения кривой ab . Правда, заранее неизвестно, можно ли такой кривой соединить заданную точку a с пока неопределенной точкой b , которая либо лежит на вертикали $x = X_{ab}$, либо заканчивается слева от нее, удовлетворяя в обоих случаях некоторым дополнительным условиям (см. ниже).

Произвол в выборе множителя Лагранжа λ употребим на то, чтобы в некоторой произвольно выбранной (“компенсирующей”) точке k кривой ab обратить в нуль коэффициент A^ϑ . Итак, в точке k положим

$$V[x'(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta] = \lambda(\sin \vartheta + x' \cos \vartheta) \quad (2.3)$$

Разрешив уравнения (2.2) и (2.3) относительно x' и λ , найдем, что в k

$$x' = \operatorname{ctg}(\vartheta \mp \alpha), \quad \frac{\cos(\vartheta \pm \alpha)}{\cos \alpha} = \lambda \quad (2.4)$$

где α – угол Маха: $\sin \alpha = 1/M$. Таким образом, в компенсирующей точке (и пока только в ней) кривая ab касается C^- - или C^+ -характеристики.

После выполненного описанным выше способом выбора x' и λ выражение (2.1) для ΔR станет

$$\Delta R = \int_a^b \rho A^\vartheta \delta \vartheta dy + y_b^y (A_b^y \Delta y_b + A_b^x \Delta x_b) \quad (2.5)$$

В (2.5) $\delta \vartheta$ на ab , Δy_b и Δx_b можно считать независимыми. При этом постоянство расхода обеспечивается тем, что одновременно со знакоопределенным варьированием ϑ в окрестности произвольной, отличной от k точки кривой ab или с изменением координат y_b и x_b также знакоопределенно варьировается ϑ в малой окрестности точки k . Последнее

всегда можно сделать так, чтобы обеспечить заданный расход, не внося в ΔR за счет выполнения равенства $A_k^\vartheta = 0$ вклада первого порядка от знакоопределенного $\delta\vartheta_k$ в окрестности точки k . В силу этого и произвола в выборе $\delta\vartheta$ в окрестности любой отличной от k точки кривой ab необходимое условие оптимальности сведется к равенству (2.3) всюду на ab . Как следствие этого также всюду на ab должны выполняться равенства (2.4), т.е. ab – C^+ - или C^- -характеристика. Применительно к рассматриваемой задаче, связанной с профилированием ЦТ кольцевого сопла или его плоского аналога, ab – C^- -характеристика, на которой должно выполняться условие оптимальности

$$\frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{\cos \alpha} = \lambda \quad (2.6)$$

Согласно [14], из (2.6) и условия совместности для C^- -характеристики на ab имеет место еще один интеграл

$$y^\nu \rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta = \text{const} \quad (2.7)$$

В силу (2.7) на ab либо ϑ сохраняет знак, либо $\vartheta \equiv 0$.

Если точка b лежит на оси x , то допустимые $\Delta y_b \geq 0$. В противном случае (при $y_b > 0$) допустимы Δy_b любого знака. Аналогично, если $x_b = X_{ab}$, то допустимы $\Delta x_b \leq 0$, а при $x_b < X_{ab}$ допустимы Δx_b любого знака. В соответствии с этим из (2.5) после исключения с помощью (2.6) из коэффициентов A^y и A^x множителя λ придем к упоминавшимся ранее дополнительным необходимым условиям минимума R

$$A_b^y \equiv (p - p_+ + \rho V^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \operatorname{tg} \alpha)_b \geq 0 \quad (2.8)$$

$$-A_b^x \equiv (\rho V^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta)_b \geq 0 \quad (2.9)$$

Условие (2.8) со знаком “ \geq ” должно выполняться при $y_b = 0$, а со знаком равенства – при $y_b > 0$. Во втором случае оно служит для определения y_b . Условие (2.9) со знаком “ \geq ” должно выполняться при $x = X_{ab}$, а со знаком равенства – при $x_b < X_{ab}$. Во втором случае, т.е. при $\vartheta_b = 0$, оно служит для определения x_b . В силу сказанного ранее и для плоских, и для осесимметричных сопел при реализации второй возможности ($\vartheta_b = 0$) в согласии с (2.7) $\vartheta \equiv 0$ на всей характеристике ab . При этом из условия совместности на C^- -характеристике на ней постоянно давление, а из (1.3) – и прочие его параметры. Если при этом $y_b > 0$, то из (2.8) со знаком равенства $p \equiv p_+$ на ab . В плоском случае ($v = 0$) согласно (2.6) и (2.7) все параметры изэнтропического и изоэнергетического потока на оптимальной C^- -характеристике постоянны при любом $\vartheta \equiv \vartheta_b$, а не только при $\vartheta \equiv 0$.

Отличие исходной и измененной вариационных задач видно из сопоставления отвечающих им схем, изображенных на фиг. 1. В исходной задаче (фиг. 1, *a*) вместо координат точки a зададим координаты точки a° среза первичного сопла $a^\circ a$, а систему координат выберем так, что $x_{a^\circ} = 0$. Поскольку согласно сказанному ранее решение исходной задачи состоит в последовательном решении задач при фиксированных параметрах на срезе первичного сопла и его положении, то эти отличия непринципиальны. Первое принципиальное отличие исходной задачи состоит в задании длины всего ЦТ $a^\circ b g$, а не его концевой части, выступающей за верхнюю кромку первичного сопла. Второе не менее принципиальное отличие связано с параметрами на срезе первичного сопла: в исходной задаче они, будучи известными (для каждого ϑ_0), определяют течение в характеристическом треугольнике $a^\circ a h^\circ$, а затем и в его расширении – характеристическом треугольнике $a^\circ a h$. Именно по этой причине условия (2.6) и (2.7) в исходной задаче выполняются не на всей замыкающей C^- -характеристике ab , а лишь на ее концевом участке hb .

В измененной задаче (фиг. 1, б) от среза сопла осталась только зависимость параметров в концевой точке его верхней стенки от ее угла наклона ϑ_0 в той же точке. В остальном параметры на заранее неизвестном срезе должны обеспечить минимум R и потому должны быть такими, чтобы на всей характеристике ab выполнялись полученные выше условия оптимальности (2.6) и (2.7), а в ее концевой точке b – условия (2.8) и (2.9). По этой причине при одинаковых длинах X_{ab} и расходах газа G тяга R в измененной задаче по модулю будет больше, чем в исходной, правда, с той же длиной X_{ab} концевого участка ЦТ, а не полной его длины X . Кроме того, для реализации решения измененной задачи необходимо специальное профилирование первичного сопла, обеспечивающего требуемые распределения параметров на его срезе. Такое профилирование далеко неоднозначно. Действительно, для каждого ϑ_0 параметры на искомом прямолинейном срезе $a^\circ a$, составляющем с осью x угол $(\vartheta_0 - \pi/2)$, что, кстати, также необязательно, определяются по найденным из (2.6)–(2.9) параметрам на ab с точностью до задания $\vartheta = \vartheta(y)$ на $a^\circ a$.

В данном случае, однако, тонкости профилирования первичного сопла, обеспечивающего полное решение измененной задачи, излишни. Ведь эта задача была рассмотрена только для того, чтобы дать более простой, хотя и приближенный способ определения оптимального ϑ_0 в исходной задаче. Покажем, как это делается, а затем сравним полученное ϑ_0 с величинами, найденными из полного решения исходной задачи.

Итак, пусть известна зависимость

$$M_0 = M_0(\vartheta_0) \quad (2.10)$$

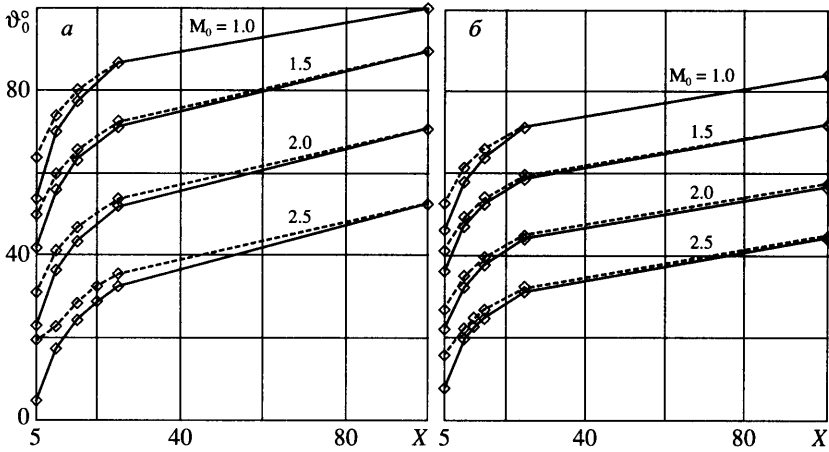
а через M_0 и всех прочих параметров от ϑ_0 . Пусть ϑ_a и аналогично другие величины с индексом a – параметры в точке a C -характеристике ab пучка волн разрежения. В силу (2.10) и условия совместности для C^+ -характеристики, выродившейся в точку a

$$d\vartheta + \frac{\text{ctg} \alpha}{\rho V^2} dp = 0 \quad (2.11)$$

все параметры в точке a – функции только ϑ_0 и ϑ_a . Если ϑ_a отлично от нуля, то согласно сказанному ранее оптимальное $x_b = X_{ab}$, а оптимальное y_b либо равно нулю при неравенстве в условии (2.8), либо определяется им со знаком равенства. В обоих случаях через оптимальную характеристику, которая определяется при выбранных ϑ_0 и ϑ_a уравнениями, справедливыми на C -характеристиках, и любым из условий (2.6) или (2.7) интегрированием по x от $x = x_a = 0$ до $x = x_b = X_{ab}$, должен проходить заданный расход газа G . Следовательно для определения двух неизвестных ϑ_0 и ϑ_a есть два условия: условие заданного расхода и либо $y_b = 0$, либо равенство (2.8). Аналогичным образом рассматривается случай $\vartheta \equiv \vartheta_b = 0$.

Особенно просто описанное выше решение измененной задачи получается для плоской конфигурации, для которой все параметры на ab постоянны. Постоянны они и на всех расположенных левее ab C -характеристиках пучка волн разрежения, в частности, на его начальной характеристике ab° , на которой $\vartheta \equiv \vartheta_0$. Последнее согласуется с равномерным, наклоненным к оси x на угол ϑ_0 потоком на срезе первичного сопла, что в принципе снимает обсуждавшиеся выше проблемы его профилирования. Такой же равномерный поток сохраняется во всем треугольнике $ab^\circ a^\circ$. При этом с учетом постоянства параметров на ab условия, определяющие в случае $y_b > 0$ оптимальные ϑ_0 и ϑ_a , сводятся к (2.10) и равенствам

$$\vartheta_a = \vartheta_0 - \int_{p_0}^{p_a} \frac{\text{ctg} \alpha}{\rho V^2} dp, \quad \frac{G}{X_{ab}} = \frac{(\rho V \sin \alpha)_a}{\cos(\vartheta - \alpha)_a}, \quad (p - p_+ + \rho V^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \text{tg} \alpha)_a = 0 \quad (2.12)$$



Фиг. 2. Зависимость оптимального угла наклона первичного сопла ϑ_0 от X для $\nu = 0$, $\kappa = 1.165$ (а) и $\kappa = 1.4$ (б)

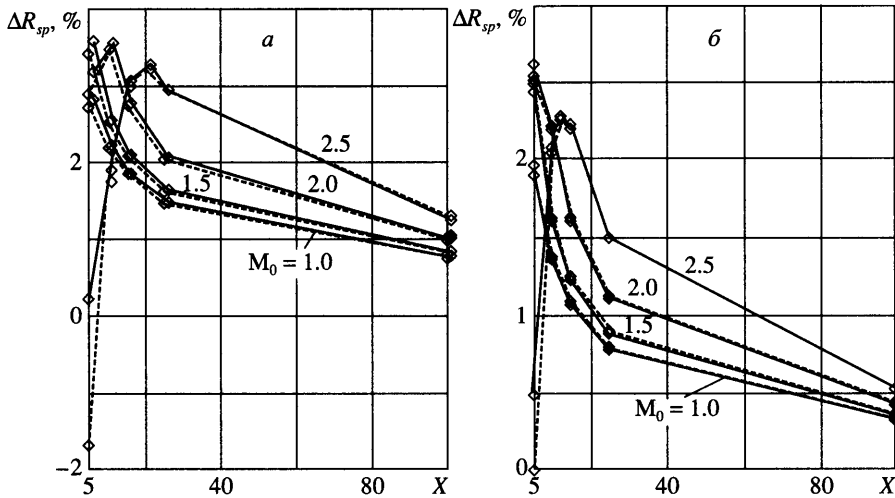
Первое из них – результат интегрирования (2.11), второе – вытекающее из (1.2) следствие задания расхода и длины части ЦТ, выступающей за кромку первичного сопла, а третье – справедливое при $y_b > 0$ равенство из (2.8). Индекс b в равенстве (2.8) заменен на a , ибо в данном случае параметры на ab постоянны.

При заданных G , X_{ab} и донном давлении p_+ равенства (2.10) и (2.12) вместе с условиями изэнтропичности и изоэнергетичности течения определяют оптимальный (для измененной задачи) угол ϑ_0 , число Маха M_0 , давление p_0 и другие параметры потока на срезе первичного сопла, угол ϑ_a и прочие параметры на прямолинейной S -характеристике ab , а также оптимальный размер торца. На самом деле измененная задача рассматривалась как вспомогательная для построения гладкого (без начального излома) контура ЦТ, близкого к оптимальному в исходной задаче. Полная длина ЦТ X связана с X_{ab} очевидной формулой

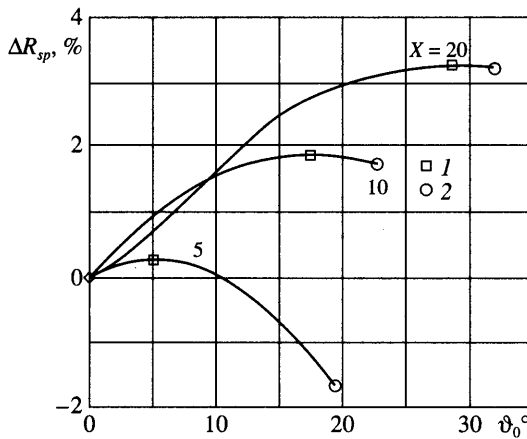
$$X_{ab} = X + \frac{G \sin \vartheta_0}{\rho_0 V_0} \quad (2.13)$$

3. Сравнение результатов решения исходной и измененной задач. Выясним, каковы погрешности определения оптимальных ϑ_0 и отвечающих им значений тяг с помощью описанного выше приближенного подхода. Для этого достаточно в качестве зависимости (2.10) взять $M_0(\vartheta_0) = M_0 = \text{const}$ и провести точный и приближенный расчеты в широком диапазоне X и связанного с ним равенством (2.13) X_{ab} при реальных, отвечающих, например, условиям старта с Земли значениях M_0 . Большого отличия следует ожидать для меньших X и относительно больших M_0 , когда величины первого и второго (отрицательного) слагаемых правой части (2.13) соизмеримы. Если же $X - X_{ab} \ll X$, то различие исходной и измененной задач становится несущественным, а отличие точных и приближенных результатов – незначительным.

Результаты расчетов плоских конфигураций с ЦТ ($\nu = 0$) и совершенного газа с двумя показателями адиабаты $\kappa = 1.165$ и 1.4 приведены на фиг. 2–4. Точки, соединенные сплошными кривыми (штрихами), – результаты решения исходной (измененной) задачи. Полная длина ЦТ отнесена к высоте минимального сечения идеального плоского симметричного первичного сопла l^0 с коэффициентом расхода $\mu = 1$ и равномерным потоком в сечении выхода. Безразмерные значения расхода и тяги получались отнесением



Фиг. 3. Зависимость ΔR_{sp} от X для $\nu = 0$, $\kappa = 1.165$ (а) и $\kappa = 1.4$ (б)



Фиг. 4. Зависимость ΔR_{sp} от ϑ_0 для $\nu = 0$, $M_0 = 2.5$ и $\kappa = 1.165$

их размерных значений соответственно к $\rho_*^\circ V_*^\circ l^\circ$ и к $\rho_*^\circ (V_*^\circ)^2 l^\circ$. Здесь “градус” отмечает размерные величины, а “звездочка” – критические значения плотности и скорости. Поэтому $G = 1$, а тяги R и удельная тяга $R_{sp} = R/G$ совпадают. Донное давление p_+ считалось равным нулю.

На фиг. 2 для $\kappa = 1.165$ (а) и $\kappa = 1.4$ (б) и $M_0 = 1.0, 1.5, 2.0$ и 2.5 приведены зависимости оптимальных углов наклона первичных сопел ϑ_0 от $X \geq 5$. В обоих случаях отличие сплошных и штриховых кривых быстро убывает с ростом длины ЦТ. На фиг. 3 для тех же M_0 и κ даны зависимости от X отличия ΔR_{sp} (в процентах, не путать с приращением ΔR в разд. 2) удельных тяг конфигураций, определенных из решения исходной и измененной задач от тяги кольцевого сопла с осевым входом. Так как длина X_{ab} , задаваемая в измененной задаче, при этом определялась по полной длине ЦТ X с помощью формулы (2.13), то оптимальная тяга в исходной задаче больше, чем в измененной. Однако согласно фиг. 3 это превышение велико лишь для $X < 10$. При $X \geq 10$ оно пренебрежимо

мало даже для $M_0 = 2.5$. Причина этого становится ясной из фиг. 4, которая дает найденную из решения исходной задачи для разных ϑ_0 зависимость ΔR_{sp} от угла наклона первичного сопла. 1 – точный максимум тяги, а 2 – конфигурации без излома контура ЦТ в начальной точке, т.е. решение измененной задачи с последующим определением X по формуле (2.13). Для $X = 20$ при $M_0 = 2.5$ и сравнительно большом размере сечения выхода первичного сопла использование контура ЦТ без начального излома при $\kappa = 1.165$ ведет к дополнительным потерям тяги в 0.14% (при $\kappa = 1.4$ они составляют всего 0.03%).

Если $\vartheta_0 = \pm\pi/2$, M_0 близко к единице, $p^+ = p_- = 0$, а фиксированная длина X невелика, то согласно [17–20] оптимальный контур ЦТ (при $\vartheta_0 = -\pi/2$) или сверхзвуковой части тарельчатого сопла (при $\vartheta_0 = \pi/2$), примыкая к заданному контуру дозвуковой части без излома, начинается с участка краевого экстремума, на котором число Маха постоянно. Для сопел с ЦТ аналогичная ситуация имеет место при ϑ_0 , близких к $-\pi/2$. С другой стороны, достаточно обширные расчеты по определению оптимальных значений ϑ_0 показали, что и при допущении таких конфигураций оптимальным углом ϑ_0 отвечают контуры ЦТ с изломом в начальной точке типа, изображенного на фиг. 1, а. С ростом X величина начального излома быстро уменьшается.

Естественно возникает вопрос о различии условий, определяющих оптимальный угол ϑ_0 ориентации первичного потока в исходной и измененной задачах. В случае фиг. 1, б коэффициенты A^V и A^ϑ на ab для оптимальной конфигурации равны нулю. Поэтому при фиксированных G и M_0 варьирование угла ϑ_0 , возмущая параметры течения на C -характеристике ab , изменяет R на величину порядка $(\Delta\vartheta_0)^2$. Следовательно, $dR/d\vartheta_0 = 0$, т.е. направление первичного потока удовлетворяет условию экстремума.

Для оптимального ЦТ в исходной задаче (фиг. 1, а) те же коэффициенты равны нулю на отрезке hb , а не на всей C -характеристике ab , и условие, определяющее оптимальный угол ϑ_0 , имеет вид

$$\frac{dR}{d\vartheta_0} \approx \frac{\Delta R}{\Delta\vartheta_0} = 0, \quad \Delta R = \Delta I = \int_{a'}^h y^V \Phi(V, \vartheta, \lambda) dy - \int_a^h y^V \Phi(V, \vartheta, \lambda) dy$$

$$\Phi(V, \vartheta, \lambda) = \rho V \frac{\lambda - V \cos \vartheta}{\sin(\vartheta - \alpha)} \sin \alpha + p$$

Здесь a (a') – точка кромки оптимального (повернутого на угол $\Delta\vartheta_0$) первичного сопла, интегралы вычисляются вдоль отрезков $a'h$ и ah C -характеристики, а точка h оптимальной C -характеристики фиксирована. Использование этого условия не проще примененного выше поиска оптимального направления первичного потока простым перебором углов ϑ_0 .

Заключение. Выполненное исследование позволило оценить точность приближенного способа определения оптимального угла наклона первичных сопел авторегулируемых плоских и осесимметричных конфигураций с центральным телом и влияние на тягу замены оптимальных контуров ЦТ с изломом в точке стыковки с нижней стенкой первичного сопла на близкие к оптимальным гладкие контуры. С ростом длины ЦТ погрешность приближенного способа быстро стремится к нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00846) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект: НШ-9902-2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rao G.V.R. Spike nozzle contour for optimum thrust // Planet. and Space Sci. 1961. V. 4. P. 92–101 = Экспресс-информация ВИНТИ. Астронавтика и ракетодинамика. 1961. № 39. С. 1–7.
2. Greer H. Rapid method for plug nozzle design // ARS Journal. 1961. V. 31. № 4. P. 560, 561.

3. *Angelino G.* Approximate method for plug nozzle design // *AIAA Journal*. 1964. V. 2. № 10. P. 1834, 1835.
4. *Борисов В.М.* О системе тел с минимальным волновым сопротивлением // *Инж. ж.* 1965. Т. 5. № 6. С. 1028–1034.
5. *Гонор А.Л., Крайко А.Н.* Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // *Теория оптимальных аэродинамических форм* / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
6. *Humphreys R.P., Thompson H.D., Hoffman J.D.* Design of maximum thrust plug nozzles for fixed inlet geometry // *AIAA Journal*. 1971. V. 9. № 8. P. 1581–1587.
7. *Korte J.J., Salas A.O., Dunn H.J., Alexandrov N.M., Follett W.W., Orient G.E., Hadid A.H.* Multi-disciplinary approach to linear aerospike nozzle design // *NASA Techn. Mem.* 1997. № 110326. 15 p.
8. *Rommel T., Hageman G., Schley C.-A., Krulle G., Manski D.* Plug nozzle flowfield analysis // *J. Propuls. and Power*. 1997. V. 13. № 5. P. 629–634.
9. *Hagemann G., Immich H., Nguyen T.V., Dumnov G.E.* Advanced rocket nozzles // *J. Propuls. and Power*. 1998. V. 14. № 5. P. 620–633.
10. *Baftalovskii S.V., Kraiko A.N., Tillyayeva N.I.* Optimal design of self-controlled spike nozzles and their thrust determination at start // *AIAA 9th Intern. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf.* Norfolk, Virginia USA, 1999. Techn. Paper AIAA 99–4955. 11 p.
11. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I., Baftalovskii S.V.* Optimal design of plug nozzles and their thrust determination at start // *J. Propuls. and Power*. 2001. V. 17. № 6. P. 1347–1352.
12. *Бафталовский С.В., Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Профилирование авторегулируемых сопел с центральным телом, оптимальных при работе в пустоте, и определение их тяги на старте с Земли // *Избр. труды 22 научн. чтений по космонавтике*. М.: Изд-во “Война и мир”, 1999. С. 116–129.
13. *Korte J.J., Salas A.O., Dunn H.J., Alexandrov N.M., Follett W.W., Orient G.E., Hadid A.H.* Multidisciplinary approach to linear aerospace nozzle design // *J. Propuls. and Power*. 2001. V. 17. № 1. P. 93–98.
14. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
15. *Киселев А.С., Луцик В.Г., Стернин Л.Е., Якубенко А.Е.* Потери удельного импульса из-за трения в штыревых соплах // *Изв. РАН. МЖГ*. 2001. № 5. С. 83–91.
16. *Крайко А.Н., Шеломовский В.В.* О профилировании плоских и осесимметричных сопел и каналов, реализующих заданный сверхзвуковой поток в сечении выхода // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1981. № 4. С. 94–102.
17. *Крайко А.Н., Теляковский А.С., Тилляева Н.И.* Профилирование оптимального контура сверхзвукового сопла при значительном повороте потока // *Ж. вычисл. математики и мат. физики*. 1994. Т. 34. № 10. С. 1444–1460.
18. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 6. С. 172–184.
19. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. 2002. № 4. С. 145–157.
20. *Мышенков Е.В., Мышенкова Е.В., Тилляева Н.И.* Численное исследование течения в кумулятивных соплах с коротким центральным телом в рамках уравнений Рейнольдса // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 3. С. 150–159.