

УДК 532.546

© 2007 г. М.М. АЛИМОВ

## РОСТ ПУЗЫРЯ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ–ШОУ

Для задачи о развитии пузыря в лотке Хеле–Шоу получен общий вид решения из класса параметризованных решений, характеризуемых тем свойством, что частные производные отображающей функции рациональны во вспомогательной плоскости. Для свободных параметров решения выписана обобщенная задача динамики системы, показана ее полная интегрируемость. Приведен пример развития несимметричного пузыря с образованием единственного фиорда.

*Ключевые слова:* задачи со свободными границами, задача Хеле–Шоу, неустойчивость Саффмана–Тейлора.

В отсутствие капиллярных сил эволюция границы раздела воздуха и вязкой жидкости при их совместном течении в лотке Хеле–Шоу описывается идеализированной математической моделью [1]. Задача о пузыре представляет собой частный случай такого течения, когда жидкость занимает внешность некоторой односвязной области (пузыря), причем воздух внутри пузыря свободно связан с атмосферой, а жидкость отбирается или нагнетается равномерно по периферии лотка [2]. Наиболее интересен случай раздувающегося пузыря, когда жидкость отступает и имеет место неустойчивость межфазной границы. При этом в экспериментах наблюдаются регулярные или почти регулярные пальцеобразные структуры [2, 3]. Образование таких структур – характерная особенность многочисленных процессов, математические модели которых сводятся к идеализированной модели [1] и ее обобщениям [4, 5].

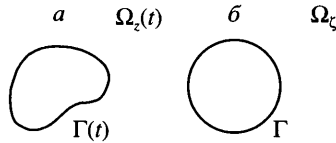
Первые точные решения задачи о стягивании контура нефтеносности, родственной задаче о развитии пузыря в лотке Хеле–Шоу, найдены в работах [6–8]. Непосредственно для задачи о раздувающемся пузыре ряд частных решений получен в работах [9–12]. Все они принадлежат классу решений, представленных параметризованной функцией, отображающей вспомогательную плоскость на физическую, причем частные производные отображающей функции рациональны во вспомогательной плоскости. В работе [13] предложен подход, позволивший построить общее решение из указанного класса для задачи пальцеобразования в канале Хеле–Шоу. В данной работе этот подход применен к задаче о раздувающемся пузыре.

**1. Определяющие соотношения.** Математическая формулировка задачи о росте пузыря в лотке Хеле–Шоу (фиг. 1, а) имеет вид [10]

$$\Omega_z(t): \Delta p = 0, \quad \Gamma(t): -\frac{\partial p}{\partial n} = v_n, \quad p = 0 \quad (1.1)$$

$$|x^2 + y^2| \rightarrow \infty: 4\pi p \approx Q(t) \ln|x^2 + y^2|$$

Здесь  $\Omega_z(t)$  – область, занятая жидкостью;  $\Gamma(t)$  – межфазная граница между жидкостью и воздухом;  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\Gamma(t)$ ;  $p(x, y, t)$  – давление в жидкости;  $v_n$  – нормальная составляющая скорости движения межфазной границы;  $Q(t) > 0$  – суммарный расход отбираемой на бесконечности жидкости (пока неопределенная функция времени).



Фиг. 1. Вид физической плоскости  $z$  (а) и вспомогательной плоскости  $\zeta$  (б)

Задача (1.1) позволяет ввести комплексную физическую плоскость  $z = x + iy$  и комплексный потенциал течения  $W = \varphi + i\psi$ , где  $\varphi = -p$ ,  $\psi$  – функция тока [14], причем  $W = W(z, t)$  и в бесконечности выполняется

$$|z| \rightarrow \infty: 2\pi z \frac{\partial W}{\partial z} = Q(t) \quad (1.2)$$

Целесообразно [6–8] ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного  $\zeta$ , в которой области  $\Omega_z(t)$  отвечает область  $\Omega_\zeta$  канонического вида – в данном случае внешность единичного круга (фиг. 1, б). Свободной границе соответствует окружность  $|\zeta| = 1$ , а бесконечности в плоскости  $z$  – бесконечность в плоскости  $\zeta$ . Аналитическую функцию, конформно отображающую область  $\Omega_\zeta$  на область  $\Omega_z(t)$ , обозначим через  $g(\zeta, t)$

$$z = g(\zeta, t), \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} \neq 0, \infty; \quad \zeta \in \Omega_\zeta \quad (1.3)$$

Конформность отображения предполагает отсутствие в области  $\Omega_\zeta$  сингулярностей функции  $g(\zeta, t)$ , что подчеркнуто в выражении (1.3) [15]. Как следствие существует и обратное отображение

$$\zeta = f(z, t), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0, \infty; \quad z \in \Omega_z \quad (1.4)$$

Нормируем конформное отображение (1.3) так, что при  $|\zeta| \rightarrow \infty$   $\arg(\partial g/\partial \zeta) \rightarrow 0$  и производная  $\partial g/\partial \zeta$  будет вещественной функцией только времени  $t$ . Выберем эту функцию вполне определенной и равной  $(1+t)$ . В результате условие нормировки примет вид

$$|\zeta| \rightarrow \infty: \frac{\partial g}{\partial \zeta} = (1+t) \quad (1.5)$$

Учитывая его и используя граничные условия задачи (1.1), а также канонический вид области  $\Omega_\zeta$ , сразу можем определить вид функции  $W(\zeta, t)$

$$2\pi W(\zeta, t) = Q(t) \ln \zeta$$

Тогда краевая задача (1.1) приводит к граничному эволюционному уравнению Полу-барьиновой – Галина [6, 7]

$$\zeta = e^{i\sigma}: \operatorname{Re} \left\{ \overline{\left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)}_\zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \frac{Q(t)}{2\pi} \quad (1.6)$$

Введем функцию Шварца  $S(z, t)$  [16]. Она получается подстановкой  $x = (z + \bar{z})/2$ ,  $y = (z - \bar{z})/2i$  в уравнение  $F(x, y, t) = 0$  свободной границы  $\Gamma(t)$  и разрешением его относительно  $\bar{z}$ :  $\bar{z} = S(z, t)$ . Обозначим через  $r$  образ функции Шварца во вспомогательной

плоскости  $r(\zeta, t) = S(g(\zeta, t), t)$ . Функция  $r(\zeta, t)$  получается применением к функции  $g(\zeta, t)$  преобразования [11]

$$r(\zeta, t) = g^*(\zeta^{-1}, t) \equiv I[g(\zeta, t)] \quad (1.7)$$

которое определим как оператор  $I$ . Звездочка здесь и далее обозначает операцию сопряжения только по параметрам (а не переменным) функции. Отметим очевидное свойство оператора  $I$ : двукратное применение его к любой функции эквивалентно тождественному преобразованию.

С помощью функции  $r(\zeta, t)$  граничное эволюционное уравнение (1.6) может быть переписано в виде [8]

$$\zeta = e^{i\sigma}: \pi\Phi(\zeta, t) = Q(t) \quad (1.8)$$

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta \frac{\partial r \partial g}{\partial t \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial g \partial r}{\partial t \partial \zeta} \quad (1.9)$$

Оператор  $I$  позволяет представить функцию  $\Phi(\zeta, t)$  результатом некоторого преобразования функции  $g(\zeta, t)$

$$\Phi(\zeta, t) = I \left[ \frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial g}{\partial t} I \left[ \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right] \quad (1.10)$$

и, соответственно, установить инвариантность функции  $\Phi(\zeta, t)$  относительно преобразования  $I$ . Используя этот факт (подробности см. [13]), можно доказать следующее.

**Утверждение.** Пусть частные производные функции  $g(\zeta, t)$  по переменным  $\zeta$  и  $t$  – рациональные функции в плоскости  $\zeta$ . Тогда функция  $\Phi(\zeta, t)$ , как результат преобразования (1.10), также рациональна и является комбинацией парных нулей  $\{c_j, \bar{c}_j^{-1}\}$  и парных полюсов  $\{b_j, \bar{b}_j^{-1}\}$ , отличных от нуля и бесконечности плоскости  $\zeta$ :

$$\Phi(\zeta, t) = \alpha(t) \prod_{j=1}^{J_n} [\zeta - c_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{c}_j^{-1}(t)] / \prod_{j=1}^{J_p} [\zeta - b_j(t)] [\zeta^{-1} - \bar{b}_j^{-1}(t)]$$

где  $\alpha(t)$  – некоторая вещественная функция  $t$ . При этом количество нулей  $2J_n$  и полюсов  $2J_p$  может не совпадать. Знак разности  $J_n - J_p$  определяет поведение функции  $\Phi(\zeta, t)$  в нуле и бесконечности: если он положителен, там будут полюса порядка  $J_n - J_p$ , если отрицателен, – нули порядка  $J_p - J_n$ .

**2. Параметризация и вид решения.** Используя известные результаты [9–12], целесообразно сразу заложить структуру решения задачи, т.е. общий параметрический вид функции  $g(\zeta, t)$ , обеспечивающий условие рациональности ее частных производных в плоскости  $\zeta$ . С учетом нормировки (1.5) общий вид производной  $\partial g / \partial \zeta$  необходим такой:

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = (1+t) \zeta^{-M} \prod_{n=1}^N (\zeta - a_n) / \prod_{j=1}^J (\zeta - b_j) \quad (2.1)$$

Здесь  $M = N - J \geq 0$ , а через  $a_n = a_n(t)$  и  $b_j = b_j(t)$  обозначены, соответственно, нули и полюса функции (если нули и полюса кратны, то они просто повторяются). Предполагается, что полюса строго отличны от точки  $\zeta = 0$ . Возможный полюс в этой точке выделен отдельно. Нули  $a_n(t)$  в какой-то момент времени могут совпасть с точкой  $\zeta = 0$  так, что после сокращения степеней  $\zeta$  в числителе и знаменателе у функции  $\partial g / \partial \zeta$  в этой точке в этот момент времени на самом деле может оказаться не полюс порядка  $M$ , а, например, нуль порядка не выше  $J$ .

Как сингулярности отображающей функции  $g(\zeta, t)$ , нули и полюса производной  $\partial g/\partial \zeta$  должны лежать внутри единичного круга  $|\zeta| < 1$ :

$$\forall t: |a_n| < 1, \quad n = 1, \dots, N; \quad |b_j| < 1, \quad j = 1, \dots, J \quad (2.2)$$

Рациональная функция (2.1) допускает и аддитивное представление, причем вместо нулей  $a_k(t)$  параметрами становятся моменты при каждом слагаемом [15]. Анализ этого представления с учетом некоторой свободы в выборе параметров приводит к такому общему виду функции  $g(\zeta, t)$

$$g(\zeta, t) = (1+t)\zeta + \sum_{j=1}^J \left\{ d_{j,0} \ln[(1+t)(\zeta^{-1} - b_j^{-1})] - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d_{j,k}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^k} \right\} + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\zeta^{m-1}} \quad (2.3)$$

Здесь  $d_{j,0}$ ,  $d_{j,k}$ ,  $b_j$ ,  $\beta_m$  – свободные параметры, причем  $d_{j,0}$  – комплексные константы,  $d_{j,k} = d_{j,k}(t)$ ,  $b_j = b_j(t)$ ,  $\beta_m = \beta_m(t)$  – комплекснозначные функции времени  $t$ . В отличие от течения в канале Хеле – Шоу, где у параметризованного решения была определенная симметрия во вспомогательной плоскости, здесь ее нет, и соответственно независимы будут все свободные параметры:

$$[b_j(t), d_{j,k}(t), j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K_j], \quad [\beta_m(t), m = 1, \dots, M] \quad (2.4)$$

В соответствии с основной идеей метода функции Шварца [16], удовлетворим граничное уравнение (1.8), обеспечив его выполнение всюду в плоскости  $\zeta$ . Рассуждая аналогично случаю течения Хеле – Шоу в канале [13], можно показать, что из утверждения разд. 1 для рассматриваемой задачи о раздувающемся пузыре вытекает следующее утверждение.

Пусть функция  $g(\zeta, t)$  имеет вид (2.3), а функция  $\Phi(\zeta, t)$  является образом функции  $g(\zeta, t)$  при преобразовании (1.10). Если, управляя свободными параметрами (2.4), добиться выполнения совокупности локальных условий в окрестности особых точек функции  $\Phi(\zeta, t)$

$$\Phi(\zeta, t)|_{\zeta=b_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J; \quad \Phi(\zeta, t)|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(1) \quad (2.5)$$

то функция  $g(\zeta, t)$  будет решением задачи о раздувающемся пузыре с некоторым вполне определенным законом отбора жидкости  $Q(t)$ .

Вид закона  $Q(t)$  определяется выбором конкретной функции времени в нормировке (1.5). В дальнейшем заменой переменной  $t \rightarrow \theta(t)$  можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона  $Q(\theta) > 0$  [17].

Зная вид решения  $g(\zeta, t)$  и комплексного потенциала  $W(\zeta)$ , можно найти комплексно сопряженную скорость потенциального движения

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{Q(t)}{2\pi\zeta} \left( \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Таким образом, с помощью параметризации решения в виде (2.3) краевая задача (1.1) сводится к задаче локального анализа поведения функции  $\Phi(\zeta, t)$  в окрестности ее особых точек. Вместе с тем такой непосредственный путь связан с громоздкими выкладками. Избежать этих неудобств позволяет следующий формализм.

**3. Формализм.** Использование комплексных переменных делает целесообразным и введение комплекснозначных аналогов векторных полей [13]. Если в плоскости  $\mathbf{R}^2$  действует векторное поле  $(v_x, v_y)$ , то, очевидно, можно говорить о действующем в комплексной плоскости  $C$  векторном поле  $\mathbf{V}(z, \bar{z}, t)$ , которое получается подстановкой

$x = (z + \bar{z})/2, y = (z - \bar{z})/2$  в векторное поле  $u_x(x, y, t) + iv_y(x, y, t)$ . Тогда для скорости потенциального течения можно использовать формулу  $V_p = \overline{\partial W / \partial z}$ , откуда, в частности, следует  $V_p = V_p(\bar{z}, t)$ .

Пусть в плоскости  $\mathbf{R}^2$  задано гладкое векторное поле  $(v_x, v_y)$ . Следуя [18, 19], можно ввести расширенное пространство  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ , действующее в нем векторное поле  $(1, v_x, v_y)$  и производную Ли относительно векторного поля  $(1, v_x, v_y)$ . Соответственно, можно ввести расширенное пространство  $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$  и действующее в нем векторное поле  $(1, \mathbf{V})$  и производную Ли относительно этого векторного поля. Если  $f(z, t)$  – аналитическая функция комплексного переменного  $z$  и действительного переменного  $t$ , то производная Ли скалярного поля  $f$  относительно векторного поля  $(1, \mathbf{V})$  имеет вид [13]

$$L_{(1, \mathbf{V})} f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.1)$$

Пусть в соответствии с разд. 1 функция  $f(z, t)$  в момент времени  $t \in T \subset \mathbf{R}$  реализует конформное отображение области  $\Omega_z(t)$  на  $\Omega_\zeta$ , а функция  $g(\zeta, t)$  – обратное отображение. Вводя тождественное преобразование времени  $\phi(t) \equiv t$ , определим взаимно обратные отображения  $(\phi, f)$  и  $(\phi, g)$

$$(\phi, f): T \times \Omega_z(t) \rightarrow T \times \Omega_\zeta; \quad (\phi, g): T \times \Omega_\zeta \rightarrow T \times \Omega_z(t)$$

В области  $T \times \Omega_z(t)$  действует векторное поле  $(1, \mathbf{V})$ . В результате отображения  $(\phi, f)$  в области  $T \times \Omega_\zeta$  ему будет отвечать векторное поле  $(1, \mathbf{U})$ . В механической интерпретации поле  $\mathbf{V}(z, \bar{z}, t)$  задает движение материальных точек области  $\Omega_z(t)$ , а поле  $\mathbf{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t)$  – движение их образов в области  $\Omega_\zeta$  при отображении  $(\phi, f)$ . Взаимосвязь этих полей и отображений выражает производная Ли:  $(1, \mathbf{U}) = L_{(1, \mathbf{V})}(\phi, f)$ . С учетом формулы (3.1) будем иметь

$$1 \equiv L_{(1, \mathbf{V})} \phi(t), \quad \mathbf{U}(\zeta, \bar{\zeta}, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{z=g(\zeta, t)} \quad (3.2)$$

Зависящее от времени  $t$  как от параметра конформное отображение (1.3) задает группу преобразований, которой отвечает некоторое конформное движение точек физической плоскости. Вспомогательная плоскость  $\zeta$  при этом выступает в качестве плоскости лагранжевых переменных. Скорость такого движения обозначим через  $\mathbf{V}_g(z, t)$  и по определению имеем

$$\mathbf{V}_g(z, t) = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{\zeta=f(z, t)} \quad (3.3)$$

В плоскости  $\zeta$  этому движению отвечает векторное поле  $\mathbf{U}_g(\zeta, t) \equiv 0$ . Подставляя его в формулы (3.2), получим другую формулу для поля  $\mathbf{V}_g(z, t)$

$$\mathbf{V}_g(z, t) = -\frac{\partial f}{\partial t} / \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.4)$$

Аналогично можно определить другое конформное движение, порожденное отображением (1.4), когда  $z$  выступает плоскостью лагранжевых переменных. В этой плоскости ему отвечает поле скоростей  $\mathbf{V}_f(z, t) \equiv 0$ , а в плоскости  $\zeta$  – поле  $\mathbf{U}_f(\zeta, t)$ , по аналогии с (3.3), (3.4) имеющее вид

$$\mathbf{U}_f(\zeta, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{z=g(\zeta, t)} = -\frac{\partial g}{\partial t} / \frac{\partial g}{\partial \zeta} \quad (3.5)$$

Из формул (1.9), (3.5) найдем новое представление функции  $\Phi(\zeta, t)$

$$\Phi(\zeta, t) \equiv \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} L_{(1, U, \rho)} r(\zeta, t) \quad (3.6)$$

Тогда граничное уравнение (1.8) можно записать в терминах производной Ли

$$\zeta = e^{i\sigma}: L_{(1, U, \rho)} r(\zeta, t) = \frac{Q(t)}{\pi \zeta} \left( \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

**4. Запись условий (2.5) в терминах производной Ли.** Используя конкретный вид (2.3) функции  $g(\zeta, t)$ , найдем ее частные производные функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \zeta + \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{k=0}^{K_j} \frac{b_j'(t) d_{j,k}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^{k+1} b_j^2} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d'_{j,k}(t)}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^k k} + \frac{d_{j,0}}{1+t} \right] + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m'(t)}{\zeta^{m-1}} \\ \frac{\partial g}{\partial \zeta} &= (1+t) - \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{K_j} \frac{d_{j,k}}{(\zeta^{-1} - b_j^{-1})^{k+1}} - \sum_{m=2}^M \frac{(m-1)\beta_m}{\zeta^m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Следовательно функция  $U_f(\zeta, t)$  вида (3.5) рациональна в плоскости  $\zeta$ , причем в бесконечности имеет простой полюс. Все остальные ее полюса лежат внутри единичного круга в силу требования (2.2). Соответственно, функция  $U_f(\zeta, t)$  регулярна всюду в области  $\Omega_\zeta$ , но не в замыкании  $\bar{\Omega}_\zeta$ .

Согласно утверждению разд. 2, удовлетворить его можно, выполнив для функции  $\Phi(\zeta, t)$  условия (2.5). Учитывая представление (3.6) последней и тот факт, что все полюса рациональной функции  $\partial g/\partial \zeta$  лежат вне замыкания области  $\bar{\Omega}_\zeta$ , это равносильно совокупности условий

$$L_{(1, U, \rho)} r(\zeta, t)|_{\zeta \sim \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J; \quad L_{(1, U, \rho)} r(\zeta, t)|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = O(\zeta^{-1}) \quad (4.2)$$

С помощью преобразования (1.7) построим функцию Шварца, отвечающую виду (2.3) функции  $g$ , с точностью до несущественной константы

$$r(\zeta, t) = \frac{1+t}{\zeta} + \sum_{j=1}^J \left\{ \bar{d}_{j,0} \ln[(1+t)(\zeta - \bar{b}_j^{-1})] - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}_{j,k}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right\} + \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \quad (4.3)$$

С учетом формулы (3.1) проанализируем левые части условий (4.2) на наличие особенностей в замыкании области  $\bar{\Omega}_\zeta$ . Они могут быть порождены особенностями функции  $U_f(\zeta, t)$  и частных производных функции  $r(\zeta, t)$ . Как уже отмечалось выше, функция  $U_f(\zeta, t)$  в замыкании  $\bar{\Omega}_\zeta$  имеет единственную особенность – простой полюс в бесконечности. Далее непосредственным дифференцированием выражения (4.3) найдем частные производные  $\partial r/\partial t$ ,  $\partial r/\partial \zeta$ . Обе частные производные представимы в виде суммы слагаемых, каждое из которых имеет особенность в той точке  $\bar{b}_j^{-1}$ , которую явно содержит. Соответственно, в левые части  $j$ -го локального условия (4.2) существенный вклад могут дать только те слагаемые представления (4.3), которые явно содержат  $\bar{b}_j^{-1}$ . В результате первая группа условий (4.2) дает

$$L_{(1, U, \rho)} \left[ \bar{d}_{j,0} \ln(\zeta - \bar{b}_j^{-1}) - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}_{j,k}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right] \Big|_{\zeta \sim \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J \quad (4.4)$$

Несколько сложнее с условием (4.2) в бесконечности. С учетом выражений (3.5), (4.1) оценим поведение поля  $U_f(\zeta, t)$  в бесконечности

$$|\zeta| \sim \infty: U_f(\zeta, t) = -\zeta(1+t)^{-1} + O(1) \quad (4.5)$$

Исключая из функции  $r(\zeta, t)$  сумму, содержащую  $\beta_m$ , получим оценку

$$\left\{ L_{(1, U_f)} \left[ r(\zeta, t) - \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \right] \right\}_{|\zeta| \sim \infty} \approx \frac{1}{1+t} \left( \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} - \sum_{j=1}^J \frac{\zeta \bar{d}_{j,0}}{\zeta - \bar{b}_j^{-1}} \right) = O(\zeta^{-1})$$

Используя ее, последнее условие в (4.2) можно записать в виде

$$\left\{ L_{(1, U_f)} \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \right\}_{|\zeta| \sim \infty} = O(\zeta^{-1}) \quad (4.6)$$

Таким образом, совокупность локальных условий (2.5) сведена к более простой совокупности локальных условий (4.4), (4.6).

**5. Формулировка динамической задачи.** Свободные параметры решения (2.4) можно трактовать как фазовые координаты некоторой обобщенной динамической системы [9], иначе говоря, как компоненты фазового вектора  $\mathbf{X}(t)$  размерности  $N_x$ . Покажем, что наложение локальных условий (4.4), (4.6) приводит к обобщенной задаче динамики системы вида

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{X}'(t) = \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{H}$  – вектор размерности  $N_x$ , а  $\mathbf{A}$  – матрица размерности  $N_x \times N_x$ .

Распишем условие (4.4) с учетом формулы (3.1):

$$\left\{ \left[ U_f(\zeta, t) - \frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} \right] \sum_{k=1}^{K_j+1} \frac{\bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right\}_{|\zeta \sim \bar{b}_j^{-1}} = O(1), \quad j = 1, \dots, J \quad (5.2)$$

Ввиду регулярности функции  $U_f(\zeta, t)$  в окрестности точек  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}$  справедливы ее разложения в ряд Тейлора с коэффициентами  $C_{j,n}(t)$

$$U_f(\zeta, t)|_{\zeta \sim \bar{b}_j^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{j,n}(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^n, \quad j = 1, \dots, J \quad (5.3)$$

Подставим разложение (5.3) в  $j$ -е условие (5.2). При этом существенный вклад, т.е. старше  $O(1)$ , в левую часть условия дают только аддитивные члены порядка  $(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^{-k}$ , где  $k = 1, \dots, K_j + 1$

$$\left\{ \left[ \sum_{n=0}^{K_j} C_{j,n}(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^n - \frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} \right] \sum_{k=1}^{K_j+1} \frac{\bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right\}_{|\zeta \sim \bar{b}_j^{-1}} = O(1) \quad (5.4)$$

Чтобы найти условия выполнения (5.4), сгруппируем члены одного порядка и приравняем нулю результирующий коэффициент при нем. По числу значимых порядков  $k = 1, \dots, K_j + 1$  получим  $K_j + 1$  уравнений.

Сначала выпишем уравнение для старшего порядка  $k = K_j + 1$

$$\frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} = C_{j,0}(t), \quad j = 1, \dots, J \quad (5.5)$$

Учитывая его, перепишем условие (5.4) в более простом виде

$$\left[ \sum_{k=2}^{K_j+1} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{C_{j,n} \bar{d}_{j,k-1}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^{k-n}} - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}'_{j,k}(t)}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k} \right] \Big|_{|\zeta| \sim \bar{b}_j^{-1}} = O(1)$$

и, группируя в нем члены порядка  $k = 1, \dots, K_j$ , найдем

$$\bar{d}'_{j,k}(t) = k \sum_{n=1}^{K_j+1-k} C_{j,n}(t) \bar{d}_{j,n+k-1}(t), \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K_j \quad (5.6)$$

Соотношения (5.5), (5.6) дают эволюционные уравнения для компонентов  $b_j(t)$  и  $d_{j,k}(t)$  вектора  $\mathbf{X}(t)$ . Осталось получить эволюционные уравнения для совокупности компонентов  $\beta_m(t)$  вектора  $\mathbf{X}(t)$ . Действуя аналогичным образом, распишем условие (4.6)

$$\sum_{m=1}^M \zeta^{m-1} [\bar{\beta}'_m(t) + m \bar{\beta}_{m+1} U_f(\zeta, t)] \Big|_{|\zeta| \sim \infty} = O(\zeta^{-1}) \quad (5.7)$$

где для сокращения записи введен фиктивный параметр  $\beta_{M+1} \equiv 0$ .

В окрестности бесконечности ввиду оценки (4.5) справедливо разложение функции  $U_f(\zeta, t)$  в ряд с коэффициентами  $C_{\infty,n}(t)$

$$U_f(\zeta, t) \Big|_{|\zeta| \sim \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\infty,n} \zeta^{1-n} \quad (5.8)$$

Подставим разложение (5.8) в условие (5.7). При этом существенный вклад дают только аддитивные члены порядка  $\zeta^k$ , где  $k = 0, \dots, M-1$

$$\sum_{m=1}^M \left[ \bar{\beta}'_m(t) \zeta^{m-1} + m \bar{\beta}_{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{\infty,n} \zeta^{m-n} \right] \Big|_{|\zeta| \sim \infty} = O(\zeta^{-1})$$

Группируя члены одного порядка по  $\zeta$  и приравнивая результирующий коэффициент при каждом члене нулю, получим

$$\bar{\beta}'_m(t) = - \sum_{n=m}^M (n-1) \bar{\beta}_n(t) C_{\infty,n-m}(t), \quad m = 1, \dots, M \quad (5.9)$$

Следовательно, для компонентов (2.4) вектора  $\mathbf{X}(t)$  фазового пространства получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (5.5), (5.6), (5.9). В формальной записи  $C_{j,n}(t)$ ,  $C_{\infty,n}(t)$  – зависимостей коэффициентов разложений (5.3), (5.8) от времени  $t$  – скрывается фактическая зависимость от компонентов векторов  $\mathbf{X}(t)$  и даже  $\mathbf{X}'(t)$ , причем вследствие формулы (3.5) для поля  $U_f(\zeta, t)$  зависимость от компонентов  $\mathbf{X}'(t)$  линейная. Таким образом, рассматриваемая краевая задача сведена к задаче типа обобщенной задачи динамики системы (5.1).

**6. Интегрирование динамической системы.** Пусть свободные параметры удовлетворяют динамической системе (5.5), (5.6), (5.9). Тогда граничное уравнение (3.7) выполня-



ется всюду в плоскости  $\zeta$ . С помощью отображения  $(\phi, g)$  (см. разд. 3) перейдем из области  $T \times \Omega_\zeta$  в область  $T \times \Omega_z(t)$ . С учетом инвариантности производной Ли относительно отображений [19] и определения функции Шварца  $r(\zeta, t)$  найдем

$$z \in \Gamma(t): \{L_{(1, v_f)} r(\zeta, t)\}_{\zeta = f(z, t)} = L_{(1, v_f)} S(z, t) \equiv \partial S / \partial t$$

Тогда, из уравнения (3.7) при учете выражения (2.6) получим еще один вид граничного эволюционного уравнения

$$z \in \Gamma(t): \frac{\partial S}{\partial t} = 2 \frac{\partial W}{\partial z} \tag{6.1}$$

Такой вид уравнения использовался С.Д. Ховисоном, и последующее интегрирование системы (5.5), (5.6), (5.9) является формализацией идей [11].

Уравнение (3.7) выполняется всюду в плоскости  $\zeta$ . Функция  $\zeta(\partial g / \partial \zeta)$ , а значит и  $\partial W / \partial z$ , регулярна всюду в замыкании  $\bar{\Omega}_\zeta(t)$ . Поэтому уравнение (6.1) выполняется не только на границе  $\Gamma$ , но также и в замыкании области  $\bar{\Omega}_z(t)$  (но не во всей плоскости  $z$ ).

Учитывая формулу (2.6) и нормировку (1.5), оценим поведение  $\partial W / \partial z$  в бесконечности:  $\partial W / \partial z = O(z^{-1})$ . Поскольку в конечных точках плоскости  $z$  выполняется  $O(z^{-1}) = O(1)$  из (6.1) следует оценка

$$z \in \bar{\Omega}_z(t): \partial S / \partial t = O(z^{-1}) \tag{6.2}$$

Функция  $r(\zeta, t)$  имеет особенности в бесконечности и в точках  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$ . Тогда функция  $S(z, t)$  будет иметь особенности в бесконечности и точках  $z = B_j(t)$  – образах точек  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$  при отображении  $g(\zeta, t)$

$$B_j(t) = g(\zeta, t)|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)} \tag{6.3}$$

Проанализируем поведение функции  $S(z, t)$  в окрестности точек  $B_j(t)$ . Ввиду регулярности функции  $g(\zeta, t)$  в точке  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$  можно выписать ряд Бурмана–Лагранжа [15] (штрих обозначает производную по  $\zeta$ )

$$\zeta - \bar{b}_j^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n}(t)(z - B_j)^n, \quad A_{j,1}(t) = \frac{1}{g'|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}}}, \quad A_{j,2}(t) = -\frac{g''}{2(g')^3} \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}}, \dots$$

Подставляя его в выражение (4.3), найдем главную часть лорановского разложения комбинации  $S(z, t) - \bar{d}_{j,0} \ln[z - B_j(t)]$  в окрестности точки  $B_j(t)$

$$S(z, t)|_{z=B_j} = \bar{d}_{j,0} \ln[z - B_j(t)] + \sum_{k=1}^{K_j} D_{j,k}(t)[z - B_j(t)]^{-k} + O(1) \tag{6.4}$$

где коэффициенты разложения  $D_{j,k}(t)$  могут быть выражены через компоненты вектора  $\mathbf{X}$  и совокупность коэффициентов  $A_{j,n}(t)$ ,  $n = 1, \dots, K_j$ .

Из представления (6.4) функции Шварца  $S(z, t)$  следует, что соотношение (6.2) в окрестности точки  $B_j(t)$  может быть удовлетворено только при выполнении следующих условий типа закона сохранения

$$\begin{aligned} B_j(t) &= B_j(0), \quad j = 1, \dots, J \\ D_{j,k}(t) &= D_{j,k}(0), \quad j = 1, \dots, J; \quad k = 1, \dots, K_j \end{aligned} \tag{6.5}$$

Аналогичным образом можно получить законы сохранения из анализа поведения функции Шварца  $S(z, t)$  в окрестности бесконечности. Однако бесконечность не является точкой регулярности отображающей функции  $z = g(\zeta, t)$ . Поэтому сначала введем вспомогательные переменные  $\omega = \zeta^{-1}$  и  $\sigma = z^{-1}$ . Используя вид (2.3) функции  $g(\zeta, t)$ , найдем вид функции  $\sigma(\omega, t)$

$$\sigma(\omega, t) = \omega \left\{ (1+t) + \omega \sum_{j=1}^J d_{j,0} \ln[(1+t)(\omega - b_j^{-1})] - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d_{j,k} \omega}{(\omega - b_j^{-1})^k k} + \sum_{m=1}^M \beta_m \omega^m \right\}^{-1}$$

Бесконечности в плоскости  $\zeta$  отвечает  $\omega = 0$  – точка регулярности функции  $\sigma(\omega, t)$ . Поэтому можно выписать ряд Бурмана–Лагранжа [15]

$$\sigma(\omega, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\infty, n}(t) \sigma^n, \quad A_{\infty, 1}(t) = \frac{1}{\sigma'} \Big|_{\omega=0}, \quad A_{\infty, 2}(t) = -\frac{\sigma''}{2(\sigma')^3} \Big|_{\omega=0}, \dots \quad (6.6)$$

В частности легко найти первые два коэффициента этого ряда

$$A_{\infty, 1}(t) = 1+t, \quad \frac{A_{\infty, 2}(t)}{1+t} = \sum_{j=1}^J \left\{ d_{j,0} \ln \left[ -\frac{1+t}{b_j(t)} \right] - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{d_{j,k}(t)}{k} [-b_j(t)]^k \right\} + \beta_1(t) \quad (6.7)$$

После обратного перехода к  $\zeta$  и  $z$ , соответственно, из разложения (6.6) получим разложение функции  $\zeta(z, t)$  в бесконечности  $|z| \sim \infty$

$$\zeta(z, t) \Big|_{|z| \sim \infty} = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} A_{\infty, n}(t) z^{-n} \right]^{-1} = \frac{z}{1+t} - \frac{A_{\infty, 2}(t)}{(1+t)^2} + O(z^{-1}) \quad (6.8)$$

Далее, разбивая функцию  $r(\zeta, t)$  вида (4.3) на две части  $P, R$  и переходя к переменной  $z$ , представим функцию Шварца  $S(z, t)$  в виде суммы

$$S(z, t) = P(z, t) + R(z, t) \quad (6.9)$$

$$P(z, t) = \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \Big|_{\zeta = \zeta(z, t)} \quad (6.10)$$

$$R(z, t) = \frac{(1+t)}{\zeta} + \sum_{j=1}^J \left\{ \bar{d}_{j,0} \ln[(1+t)(\zeta - \bar{b}_j^{-1})] - \sum_{k=1}^{K_j} \frac{\bar{d}_{j,k}}{(\zeta - \bar{b}_j^{-1})^k k} \right\} \Big|_{\zeta = \zeta(z, t)}$$

Подставляя в первое выражение (6.10) функцию  $\zeta(z, t)$  вида (6.8), представим функцию  $P(z, t)$  в окрестности  $|z| \sim \infty$  в виде ряда Лорана [15]

$$P(z, t) \Big|_{|z| \sim \infty} = \sum_{m=1}^M D_{\infty, m-1}(t) z^{m-1} + \frac{D_{\infty, -1}(t)}{z} + O(z^{-2}) \quad (6.11)$$

где коэффициенты  $\{D_{\infty, k}(t), k = 0, \dots, M-1\}$  разложения могут быть выражены через совокупность коэффициентов  $\{\beta_m(t), A_{\infty, m}(t), m = 1, \dots, M\}$ .

Для нахождения вида функции  $R(z, t)$  в окрестности бесконечности  $|z| \sim \infty$  достаточно воспользоваться приближенным (двучленным) представлением функции  $\zeta(z, t)$  в выражении (6.8). Будем иметь

$$R(z, t)|_{|z| \rightarrow \infty} = \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \ln z + \frac{R_{\infty,-1}(t)}{z} + O(z^{-2}) \quad (6.12)$$

$$R_{\infty,-1}(t) = (1+t)^2 - \frac{A_{\infty,2}(t)}{1+t} \left( \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \right) - (1+t) \sum_{j=1}^J \left[ \frac{\bar{d}_{j,0}}{\bar{b}_j(t)} + \bar{d}_{j,1}(t) \right] \quad (6.13)$$

Подставляя найденные выражения (6.11), (6.12) в формулу (6.9), получим оценку поведения функции Шварца  $S(z, t)$  в бесконечности

$$S(z, t)|_{|z| \rightarrow \infty} = \sum_{j=1}^J \bar{d}_{j,0} \ln z + \sum_{m=1}^M z^{m-1} D_{\infty, m-1}(t) + z^{-1} [D_{\infty,-1}(t) + R_{\infty,-1}(t)] + O(z^{-2}) \quad (6.14)$$

из которой следует, что соотношение (6.2) в окрестности бесконечности может быть удовлетворено только при выполнении законов сохранения

$$D_{\infty, m-1}(t) = D_{\infty, m-1}(0), \quad m = 1, \dots, M \quad (6.15)$$

Число законов сохранения (6.5), (6.15) совпадает с числом свободных параметров (2.4). Следовательно, динамическая задача полностью проинтегрирована. Коэффициенты  $D_{\infty,-1}(t)$  разложения (6.11) и  $R_{\infty,-1}(t)$  разложения (6.12), вносящие в функцию  $S(z, t)$  вклад  $O(z^{-1})$  и представляющиеся здесь избыточными, необходимы для нахождения вида зависимости  $Q(t)$ .

**7. О законе отбора жидкости на бесконечности.** Выбор конкретной функции времени в нормировке (1.5) определяет вид закона  $Q(t)$ . В то же время, как правило, этот закон бывает задан изначально. Заменой переменной времени  $t$  на время  $\theta$  можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона  $Q(\theta) > 0$  [17].

Пусть новое время  $\theta$  связано со старым  $t$  взаимнооднозначным соответствием  $\theta = \theta(t)$  так, что  $\theta'(t) > 0$  для  $\forall t > 0$  и  $\theta(t) = 0$  при  $t = 0$ . Функция  $\theta(t)$  удовлетворяет соотношению [13]

$$\int_0^t Q(t) dt = \int_0^\infty Q(\theta) d\theta \quad (7.1)$$

Это выражение позволяет установить взаимнооднозначное соответствие  $\theta(t)$  до тех пор, пока выполняется условие  $Q(t) > 0$ . Таким образом, из решения задачи вида (2.3), отвечающего определенному закону отбора жидкости на бесконечности  $Q(t)$  с помощью выражения (7.1), можно получить решение задачи для любого наперед заданного закона  $Q(\theta) > 0$ .

Как правило, в задаче о раздуваемом пузыре отбор жидкости на бесконечности фиксирован:  $Q(\theta) = Q_0$ . Тогда из выражения (7.1) сразу следует

$$\theta(t) = \frac{1}{Q_0} \int_0^t Q(t) dt \quad (7.2)$$

Очевидно, эта формула будет эффективна в том случае, когда выражение  $Q(t)$  представляет собой производную по времени  $t$  некоторой функции. Подходящее выражение

для  $Q(t)$  можно получить путем дополнительного анализа уравнения (6.1) в бесконечности плоскости  $z$ .

Поведение производной  $\partial W/\partial z$  в бесконечности выражается формулой (1.2). Подставляя ее, а также найденную в виде (6.14) функцию Шварца  $S(z, t)$  в уравнение (6.1), сразу определим подходящий вид функции  $Q(t)$

$$\frac{Q(t)}{\pi} = \frac{d}{dt} [D_{\infty, -1}(t) + R_{\infty, -1}(t)]$$

Тогда формула (7.2) сразу же дает вид зависимости  $\theta(t)$

$$\theta(t) = \pi Q_0^{-1} [D_{\infty, -1}(t) - D_{\infty, -1}(0) + R_{\infty, -1}(t) - R_{\infty, -1}(0)] \quad (7.3)$$

В разд. 6 вид коэффициента  $R_{\infty, -1}(t)$  был найден, а для  $D_{\infty, -1}(t)$  указана процедура его получения в числе прочих коэффициентов  $D_{\infty, m}(t)$  разложения (6.11). Однако сама процедура сложна. В то же время замкнутый вид зависимости  $\theta(t)$  чрезвычайно полезен при анализе конкретных примеров. Поэтому укажем альтернативный способ определения  $D_{\infty, -1}(t)$ . По смыслу этот коэффициент равен вычету функции  $-P(z, t)$  в бесконечно удаленной точке [15]

$$D_{\infty, -1}(t) = -\operatorname{res}_{\infty} [P(z, t)] \equiv -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_z} P(z, t) dz$$

где  $\gamma_z$  – достаточно большая окружность в плоскости  $z$ . Переходя к интегрированию по переменной  $\zeta$ , в плоскости которой окружности  $\gamma_z$  будет отвечать окружность  $\gamma_{\zeta}$ , получим, учитывая первое выражение в (6.10)

$$D_{\infty, -1}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\zeta}^{m=1}} \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta \equiv -\operatorname{res}_{\infty} \left[ \sum_{m=1}^M \bar{\beta}_m \zeta^{m-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right] \quad (7.4)$$

Следовательно, достаточно найти вычет в бесконечности представленной в квадратных скобках функции переменной  $\zeta$ , иначе говоря, найти коэффициент при  $\zeta^{-1}$  лорановского разложения этой функции в бесконечности  $|\zeta| \sim \infty$ .

Сначала найдем разложение регулярной в бесконечности функции  $\partial g/\partial \zeta$  по степеням  $\zeta$  с точностью до членов  $O(\zeta^{-M-1})$ . Перепишем производную  $\partial g/\partial \zeta$  вида (4.1) следующим образом

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = (1+t) - \sum_{m=2}^M \frac{(m-1)\beta_m}{\zeta^m} - \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{K_j} \frac{(-b_j)^{k+1} d_{j,k}}{(1-b_j \zeta^{-1})^{k+1}} \quad (7.5)$$

Теперь используем разложение биннома [20]

$$(1 - b_j \zeta^{-1})^{-k-1} \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{M-2} \binom{k+n}{n} \frac{b_j^n}{\zeta^n} + O(\zeta^{-M+1})$$

Подставим его в выражение (7.5) и перейдем от индекса суммирования  $n$  к индексу суммирования  $m = n + 2$ . В результате найдем искомое разложение

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} \Big|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = (1+t) + \sum_{m=2}^M \frac{g_m(t) - (m-1)\beta_m(t)}{\zeta^m} + O(\zeta^{-M-1}) \quad (7.6)$$

где через  $g_m(t)$  обозначено выражение

$$g_m(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{K_j} (-1)^k \binom{k+m-2}{k} d_{j,k}(t) b_j^{k+m-1}(t), \quad m = 2, \dots, M \quad (7.7)$$

Подставляя разложение (7.6) в формулу (7.4) можем определить  $D_{\infty,-1}(t)$  как коэффициент при  $\zeta^{-1}$  в лорановском разложении в окрестности бесконечности  $|\zeta| \sim \infty$  функции, представленной в квадратных скобках в (7.4)

$$D_{\infty,-1}(t) = \sum_{m=2}^M \bar{\beta}_m(t) [g_m(t) - (m-1)\beta_m(t)] \quad (7.8)$$

В результате формула (7.3) с учетом выражений (6.7), (6.13), (7.7) и (7.8) дает замкнутый вид функции  $\theta(t)$ . С ее помощью решение задачи о раздуваемом пузыре при нормировке (1.5) распространяется на случай фиксированного отбора жидкости на бесконечности:  $Q(\theta) = Q_0$ .

**8. Обсуждение результатов.** Первая группа законов сохранения в выражении (6.5) непосредственно следует и из динамических уравнений (5.5). Действительно, учитывая, что первый коэффициент имеет вид  $C_{j,0}(t) = U_f(\zeta, t)$ , где  $\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)$ , уравнение (5.5) преобразуется к виду

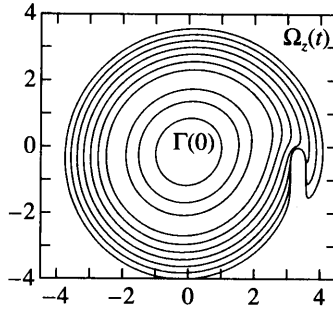
$$\frac{\partial \bar{b}_j^{-1}}{\partial t} = U_f(\zeta, t) \Big|_{\zeta = \bar{b}_j^{-1}(t)}, \quad j = 1, \dots, J$$

Это означает, что точки  $\bar{b}_j^{-1}(t)$  плоскости  $\zeta$  переносятся векторным полем  $U_f(\zeta, t)$ . В соответствии с механической аналогией разд. 3, отображение  $(\phi, g)$  переводит точки  $\bar{b}_j^{-1}(t)$  плоскости  $\zeta$  в их образы  $B_j(t)$  в плоскости  $z$ , движение которых описывается векторным полем  $V_A(z, t)$ . Поскольку  $V_A(z, t) \equiv 0$ , эти образы фактически остаются неподвижными [11], что и выражает первая группа законов сохранения (6.5).

Потребовать выполнения условия (2.2) можно только в начальный момент времени выбором начальных значений свободных параметров. С течением времени положение сингулярностей меняется, и по непрерывности условие (2.2) удовлетворяется еще, по крайней мере, некоторое время. В какой-то момент к границе единичного круга могут приблизиться и нули  $a_n(t)$ , и полюса  $b_j(t)$  производной  $dg/d\zeta$ . В первом случае ситуация критична: на межфазной границе образуется точка заострения и классическое решение задачи перестает существовать [17] (пример – решение П.Я. Полубариновой-Кочиной [6] для кардиоиды).

Во втором случае ситуация не критична: полюс приближается к межфазной границе  $\Gamma(t)$ , но никогда не достигает ее [10, 11]. При этом на  $\Gamma(t)$  формируется “фиорд” (иначе – щель). Действительно, в соответствии с формулой (6.3) образы  $B_j$  необходимо принадлежат области  $\Omega_z(t)$ . В совокупности с условием их неподвижности в плоскости  $z$  это означает, что свободная граница  $\Gamma(t)$  не может перевалить точки  $z = B_j$ , т.е. каждый полюс  $b_j(t)$  производной  $dg/d\zeta$  является “фиордообразующим”. Два соседних фиорда фактически формируют пальцеобразную структуру.

Заметим, что по построению решения [9–12] обязательно обладают определенной симметрией и число “фиордообразующих” особенностей производной  $dg/d\zeta$  не может быть меньше двух. Полученное здесь точное решение задачи о раздуваемом пузыре общего вида содержит все известные точные решения [9–12], но помимо этого допускает несимметрию, наличие произвольного количества “фиордообразующих” особенно-



Фиг. 2. Эволюция раздувающегося несимметричного пузыря с образованием единственного фиорда

стей  $b_j(t)$  (начиная с одного, а не с двух), а также свободу в выборе порядка полюсов – сингулярностей отображающей функции. Для свободных параметров решения выписана обобщенная задача динамики системы, показана ее полная интегрируемость. В конкретных расчетах удобнее использовать динамическую формулировку задачи, а законы сохранения, по сути нелинейные алгебраические уравнения, привлекать для оценки точности интегрирования.

В качестве примера рассмотрим случай единственной “фиордообразующей” особенности  $b(t)$ , т.е.  $J = 1$ ,  $K_1 = 0$ ,  $M = 1$ . Выберем константу  $d_0 = -i0.15$ , а начальное значение параметра  $b(0) = 0.3$ . Решение имеет вид

$$g(\zeta, t) = (1+t)\zeta + d_0 \ln\{(1+t)[\zeta^{-1} - b^{-1}(t)]\} + \beta(t)$$

Из соотношения (5.9) сразу следует, что свободный параметр  $\beta(t)$  будет константой, которую естественно выбрать нулевой:  $\beta(t) \equiv 0$ . Другой свободный параметр  $b(t)$  меняется в соответствии с законом сохранения (6.5)

$$\frac{1+t}{\bar{b}(t)} + d_0 \ln(1+t) + d_0 \ln[\bar{b}(t) - b^{-1}(t)] = \frac{1}{\bar{b}(0)} + d_0 \ln[\bar{b}(0) - b^{-1}(0)]$$

Примем, что жидкость на бесконечности отбирается с единичным расходом  $Q(\theta) = Q_0 \equiv 1$ . Тогда из формулы (7.3) найдем вид зависимости  $\theta(t)$

$$\theta(t) = \pi t(2+t) + \pi |d_0|^2 \{ \ln[1 - |b(t)|^2] - \ln[1 - |b(0)|^2] \}$$

Расчеты проводились до момента времени  $t_1 = 2.8$  и, соответственно, времени  $\theta_1 = 41.278$ . На фиг. 2 приведены конфигурации межфазной границы  $\Gamma(\theta)$  с шагом по времени  $\theta_1/10$ , начиная с  $\Gamma(0)$ .

**Заключение.** Для задачи о пузыре, растущем в лотке Хеле–Шоу, получено точное решение достаточно общего вида, неограниченное никакими искусственными требованиями симметрии. В сравнении с имеющимися частными решениями оно позволяет полнее оценить возможности идеализированной модели течений Хеле–Шоу [1]. В частности, приведенный пример показывает, что модель может описывать и такие наблюдаемые в экспериментах [2] структуры, как несимметричные и непарные фиорды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00516).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
2. *Paterson L.* Radial fingering in a Hele Shaw cell // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 513–529.
3. *Couder Y., Cardoso O., Dupuy D., Tavernier P., Thorn W.* Dendritic growth in the Saffman–Taylor experiment // Europhys. Letters. 1986. V. 2. № 6. P. 437–443.
4. *Окендон Дж.Р., Ховисон С.Д.* П.Я.Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 515–524.
5. *Alexandrou A.N., Entov V.M., Kolganov S.S., Kolganova N.V.* On bubble rising in a Hele–Shaw cell filled with a non-Newtonian fluid // Europ. J. Appl. Math. 2004. V. 15. № 3. P. 315–327.
6. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254–257.
7. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 246–249.
8. *Куфарев П.П.* Решение задачи о контуре нефтеносности для круга // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 8. С. 1333–1334.
9. *Shraiman B., Bensimon D.* Singularities in nonlocal interface dynamics // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. № 5. P. 2840–2842.
10. *Howison S.D.* Fingering in Hele-Shaw cell // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 439–453.
11. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Europ. J. Appl. Math. 1992. V. 3. № 3. P. 209–224.
12. *Dai W.-S., Kadanoff L.P., Zhou S.-M.* Interface dynamics and the motion of complex singularities // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. № 12. P. 6672–6682.
13. *Алимов М.М.* Общее решение задачи Хеле–Шоу для течений в канале // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 384–399.
14. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1932 = *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
15. *Лаврентьев М.А., Шабам Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
16. *Davis P.J.* The Schwarz Function and its Applications. Washington: Math. Assoc. of America. 1974. 228 p.
17. *Hohlov Y.E., Howison S.D.* On the classification of solutions to the zero–surface–tension model for Hele-Shaw free boundary flows // Quart. Appl. Math. 1993. V. 51. № 4. P. 777–789.
18. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 272 с.
19. *Schutz B.F.* Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge: Univ. Press, 1982. = *Шутиц Б.* Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984. 303 с.
20. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Казань

Поступила в редакцию  
19.VI.2006