

УДК 532.546

© 2007 г. Н.Н. СМИРНОВ, В.Р. ТАГИРОВА

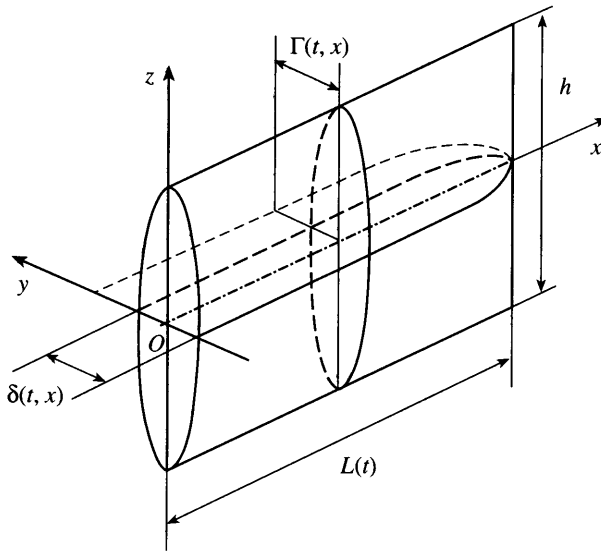
АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМИРОВАНИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Исследуется задача о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде в приближении малого раскрытия трещины и безынерционного течения несжимаемой ньютоновской жидкости внутри нее и случаи асимптотически малого либо большого просачивания жидкости через стенки трещины в окружающий пласт. Показано, что система уравнений, описывающая распространение трещины, имеет автомодельные решения только степенного либо экспоненциального вида. Построено семейство автомодельных решений для определения эволюции ширины и длины трещины, скорости жидкости в трещине и глубины пропитки, когда на входе в трещину заданы либо расход жидкости, либо давление как степенная или экспоненциальная функция времени. В случае конечного просачивания жидкости в грунт система уравнений имеет только степенное автомодельное решение, например, когда на входе в трещину задан расход жидкости как квадратичная функция времени. Для одного из режимов просачивания численно найдены решения полученных автомодельных уравнений.

Ключевые слова: автомодельность, трещина гидроразрыва, вязкая жидкость, фильтрация.

Формирование трещины гидроразрыва в нефтесодержащем пласте является одним из способов эффективного повышения нефтеотдачи скважины. Собственно процесс распространения трещины в упругопористой среде является составной частью общего процесса гидроразрыва, который состоит из нескольких стадий, а именно: течение вязкой жидкости гидроразрыва в скважине, и раскрытие трещины под действием напора жидкости, фильтрация жидкости через стенки трещины в пласт и последующее ее вытеснение менее вязкой нефтесодержащей жидкостью, возникновение и развитие неустойчивости поверхности раздела, образование “пальцев” и т.д. Задаче о формировании трещины гидроразрыва посвящен ряд теоретических работ [1–8], в которых построены различные модели распространения трещины в зависимости от величины коэффициента интенсивности напряжений породы, асимптотической величины оттока жидкости через стенки трещины и реологии жидкости.

В [1, 2] построена классическая модель распространения трещины в пористой среде, которая основывается на предположении малой ширины трещины по сравнению с ее длиной и высотой. Это предположение позволяет, во-первых, принять гипотезу плоского деформированного состояния для каждого сечения, перпендикулярного к линии распространения трещины, и, во-вторых, свести соотношение между шириной трещины и давлением жидкости к локальному оператору. Именно последнее предположение существенно упростило постановку задачи [1, 2], что позволило широко использовать данную модель в прикладных областях нефтегазовой индустрии. В работе [3] впервые была предложена постановка плоской задачи гидроразрыва с учетом влияния прочностных характеристик на раскрытие трещины в носике. В [4] приводится дальнейшее развитие задачи о влиянии прочности породы и наличия предвестника на распространение трещины. Решение задачи о формировании трещины с учетом нелинейной реологии жидкости гидроразрыва приводится в [5, 6].



Фиг. 1. Схема трещины гидроразрыва: $\delta(t, x)$ – ширина трещины, $\Gamma(t, x)$ – глубина просачивания жидкости гидроразрыва в грунт, $L(t)$ – длина трещины

В [7] найдены автомодельные решения задачи в случаях асимптотически малого либо большого просачивания жидкости в грунт через стенки трещины, когда на входе в трещину был задан постоянный расход (либо постоянное давление). В случае конечного просачивания было найдено автомодельное решение, когда на входе в трещину задано давление как линейная функция времени. В [7] коэффициент интенсивности напряжений в носике трещины равен нулю. Решение задачи в постановке [3] с учетом проницаемости среды и конечных значений коэффициента интенсивности напряжений приведено в [8].

В настоящей работе в рамках модели [7] решена задача для асимптотических случаев большого и малого просачивания жидкости в пласт, когда на входе в трещину задан расход (либо давление) как произвольная степенная либо экспоненциальная функция времени. Показано, что для режима конечного просачивания имеет место автомодельное решение и в том случае, когда на входе в трещину задан расход как квадратичная функция времени.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать процесс формирования трещины в проницаемой пористой среде в рамках модели [7], основанной на следующих предположениях: характерный масштаб ширины трещины δ много меньше ее высоты h , а высота трещины много меньше ее характерной длины L : $\delta \ll h \ll L$. Это предположение позволяет принять гипотезу плоских сечений [1], согласно которой напряженные состояния двух сечений, перпендикулярных линии распространения трещины, можно считать независимыми. Тогда связь между напряжениями и деформациями в сечениях будем считать такой же, как для однородной в направлении x (плоской) трещины (фиг. 1). Считаем, что высота трещины постоянна $h = \text{const}$, сжимаемостью и инерцией жидкости пренебрегаем. Будем предполагать, что направление фильтрации жидкости из трещины в пористую среду перпендикулярно плоскости xz . Упругопористая среда изначально пропитана жидкостью, вязкость которой меньше, чем вязкость жидкости гидроразрыва. Это допущение позволяет обосновать устойчивость вытеснения в процессе фильтрации и считать поверхности пропитки гладкой.

Введем следующие обозначения: $\delta(t, x)$ – ширина трещины, осредненная по высоте трещины, $\Gamma(t, x)$ – глубина просачивания жидкости гидроразрыва в пласт, отсчитываемая от середины трещины, $L(t)$ – длина трещины. Движение жидкости в трещине и фильтрация в пласте описываются уравнениями [7]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(Fu)}{\partial x} = -v \cdot 2h, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2}u, \quad \frac{\partial P_r}{\partial y} = -\frac{\mu}{k}v, \quad F = h\delta \quad (1.1)$$

где F – площадь поперечного сечения, $v = v(t, x)$ – скорость жидкости по нормали к берегам трещины, $u = u(t, x)$ – средняя скорость течения жидкости вдоль трещины, P – избыточное давление жидкости гидроразрыва в трещине, P_r – избыточное давление жидкости гидроразрыва в грунте, μ – вязкость жидкости, k – проницаемость грунта.

Предположение о малом раскрытии трещины позволяет использовать гипотезу плоских сечений, на основании которой связь между напряжениями и деформациями в двух различных сечениях, перпендикулярных линии распространения трещины, можно считать такой же, как для плоской трещины [7, 9]

$$P = p\delta, \quad b = \frac{4\mu\sigma}{\pi(1-\nu_\sigma)h} \quad (1.2)$$

где ν_σ – коэффициент Пуассона, μ_σ – модуль сдвига материала.

Будем отсчитывать давление от величины литостатического давления вдали от трещины.

Из (1.1), (1.2) получена система уравнений [7]

$$u = -K\delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad K = \frac{b}{12\mu} = \text{const} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Gamma^2}{\partial t} = 2\frac{kb}{\mu}\delta \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} - 3K\delta^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\right)^2 - K\delta^3 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + 2\frac{kb}{\mu}\bar{\Gamma} = 0 \quad (1.5)$$

Граничные условия на конце трещины $x = L(t)$

$$\Gamma(L) = 0, \quad \delta(L) = 0, \quad \left(\frac{\partial \delta}{\partial x}\bigg|_{x=L}\right)^{-1} = -0$$

В качестве граничного условия в начале трещины $x = 0$ задаем либо расход жидкости $Q(t, 0) = Q_0 t^\alpha$ (или $Q(t, 0) = Q_0 e^{\alpha t}$), либо давление $P(t, 0) = P_0 t^\alpha$ (или $P(t, 0) = P_0 e^{\alpha t}$), где α , $P_0 > 0$, $Q_0 > 0$ заданные константы.

2. Анализ безразмерной системы уравнений. Введем безразмерные переменные

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u^*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}$$

$$\bar{y} = \frac{\Gamma}{y^*}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q^*}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P^*}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V^*}$$

$$Q^* = h\delta^*u^*, \quad \delta^* = \left(\frac{Q^*L^*}{hK}\right)^{1/4}, \quad u^* = \left(\frac{K(Q^*)^3}{h^3L^*}\right)^{1/4}$$

$$y^* = \left(\frac{(kbt^*)^2 Q^* L^*}{\mu^2 Kh} \right)^{1/8}$$

где Q^* – характерный расход жидкости на входе в трещину, L^* – характерная длина трещины, δ^* – характерная ширина трещины, u^* – характерная скорость жидкости вдоль трещины, t^* – характерное время процесса, y^* – характерная глубина пропитки.

В пренебрежении просачиванием через стенки трещины характерное время процесса равно времени раскрытия трещины $t^* = L^*/u^*$. В случае, когда просачивание существенно, $t^* \gg L^*/u^*$. Характерное давление на входе в трещину $P^* = b\delta^*$. Константы в граничном условии на входе в трещину задаем в виде $Q_0 = Q^*/(t^*)^\alpha$ или $P_0 = P^*/(t^*)^\alpha$. Характерный объем жидкости, закачиваемой в трещину, равен $V^* = Q^*t^*$. Поскольку часть жидкости теряется при просачивании через стенки трещины, то $V < V^*$ или $\bar{V} < 1$. В дальнейшем для простоты изложения черту над безразмерными переменными будем опускать, считая все переменные по умолчанию безразмерными.

Система (1.3)–(1.5) в безразмерных переменных принимает вид

$$u = -\delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \frac{\partial y^2}{\partial t} = 2\delta \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 3\delta^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 + \delta^3 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - \frac{2\delta}{By} \tag{2.2}$$

$$G = \frac{u^* t^*}{L^*} = \text{Sh}^{-1} = \frac{h\delta^* u^* t^*}{h\delta^* L^*}, \quad B = \frac{\mu y^* u^*}{kbL^*} \tag{2.3}$$

Параметр подобия G представляет собой отношение объема жидкости, втекающей в трещину за все время процесса, к объему трещины. Из определения характерного времени процесса следует, что $G \geq 1$. В самом деле, случай $G < 1$ соответствует течению, при котором объем трещины больше, чем объем жидкости в трещине, что противоречит условию нулевого зазора между жидкостью и концом трещины. Параметр B можно представить как отношение характерного объемного расхода жидкости, втекающей в трещину, к характерному объемному расходу жидкости, уходящей через стенки в пористую среду.

$$B = \frac{kb\delta^* u^*}{v^* kbL^*} = \frac{h\delta^* u^*}{hL^* v^*}$$

Из условия, что характерный расход жидкости, просачивающейся в стенки трещины, не может превышать характерный расход жидкости, втекающей через входное сечение трещины, получаем неравенство $B \geq 1$.

Рассмотрим следующие асимптотические случаи.

I. Малое просачивание жидкости в грунт $B \gg 1$, $G \sim 1$. Тогда в уравнении (2.2) слагаемое с B в знаменателе отсутствует. Однако при этом глубина просачивания остается конечной и определяется из уравнения (2.1).

II. Интенсивное просачивание жидкости в грунт $G \gg 1$, $B \sim 1$. В этом случае последнее уравнение системы не содержит слагаемого с G в знаменателе.

III. Конечное просачивание $B \sim 1$, $G \sim 1$. В этом наиболее общем случае все члены уравнений системы (2.1), (2.2) имеют порядок единицы.

3. Автомодельные решения. Покажем, что система (2.1), (2.2) имеет автомодельные решения только двух видов: со степенной и с экспоненциальной зависимостью от време-

ни. Введем автомодельную продольную координату $\xi = x/M(t)$. Решение системы (2.1), (2.2) будем искать в виде [10, 11]

$$\delta = N(t)D(\xi), \quad u = R(t)U(\xi), \quad y = S(t)Y(\xi)$$

Пусть все функции M, N, R, S, D, U, Y , как и t, x, δ, u, y , безразмерные.

В случае малого просачивания жидкости в грунт уравнения (2.1), (2.2) переписутся в виде

$$R(t)U(\xi) = -\frac{N^3(t)}{M(t)}D^2(\xi)\frac{dD}{d\xi}$$

$$S(t)\frac{dS}{dt}Y^2(\xi) - \frac{S^2(t)}{M(t)}\frac{dM}{dt}\xi Y(\xi)\frac{dY}{d\xi} = N(t)D(\xi)$$

$$\frac{1}{G}\frac{dN}{dt}D(\xi) - \frac{N(t)}{GM(t)}\frac{dM}{dt}\xi\frac{dD}{d\xi} = \frac{3N^4(t)}{M^2(t)}D^2(\xi)\left(\frac{dD}{d\xi}\right)^2 + \frac{N^4(t)}{M^2(t)}D^3(\xi)\frac{d^2D}{d\xi^2}$$

Для существования автомодельных решений необходимо, чтобы система уравнений (3.1)–(3.3) зависела только от переменной ξ . Отсюда получим условия пропорциональности (символ “ \sim ” означает равенство с точностью до умножения на константу)

$$R \sim \frac{N^3}{M}, \quad S\frac{dS}{dt} \sim \frac{S^2}{M}\frac{dM}{dt} \sim N, \quad \frac{dN}{dt} \sim \frac{N}{M}\frac{dM}{dt} \sim \frac{N^4}{M^2} \quad (3.1)$$

Из третьего соотношения пропорций (3.1) получаем равенство $d\ln N = \gamma d\ln M$, где коэффициент пропорциональности $\gamma = \text{const}$. Следовательно, верно соотношение $N \sim M^\gamma$. Тогда из (3.5) следуют пропорции

$$\frac{dM}{dt} \sim M^{3\gamma-1} \sim R; \quad S \sim M^{1-\gamma}$$

$$\gamma = 2/3: M \sim e^{\beta t}, \quad N \sim e^{2\beta t/3}, \quad R \sim e^{\beta t}, \quad S \sim e^{\beta t/3}, \quad \beta = \text{const}$$

$$\gamma \neq 2/3: M \sim (t+c)^{1/(2-3\gamma)}, \quad N \sim (t+c)^{\gamma/(2-3\gamma)}, \quad R \sim (t+c)^{(3\gamma-1)/(2-3\gamma)}$$

$$S \sim (t+c)^{(1-\gamma)/(2-3\gamma)}, \quad c = \text{const} \quad (c = 0)$$

Аналогично рассматривается случай большого просачивания. Тогда получим, что в предельных случаях протекания существуют только либо степенные, либо экспоненциальные автомодельные решения. Далее будет показано, что для каждого граничного условия на входе в трещину существует однопараметрическое семейство степенных (либо экспоненциальных) автомодельных решений.

В случае конечного просачивания в грунт получим, что функции N и S линейны и пропорциональны друг другу, M – квадратичная функция, R – линейная. Следовательно, в общем случае возможны только степенные автомодельные решения: одно для граничного условия в начале трещины на расход жидкости, другое – на давление [7].

4. Построение автомодельных решений. В случае малого просачивания жидкости в грунт ($B \gg 1$, $G \sim 1$) при степенной автомодельной замене система (2.1), (2.2) имеет вид

$$\xi = \frac{x}{t^m}, \quad u(t, x) = t^r U(\xi), \quad y(t, x) = t^s Y(\xi), \quad \delta(t, x) = t^n D(\xi) \quad (4.1)$$

$$U = -D^2 \frac{dD}{d\xi}, \quad m\xi \frac{dY^2}{d\xi} - 2sY^2 + D = 0 \quad (4.2)$$

$$D^3 \frac{d^2 D}{d\xi^2} + 3D^2 \left(\frac{dD}{d\xi} \right)^2 + m\xi \frac{dD}{d\xi} - nD = 0 \quad (4.3)$$

Граничные условия в конце трещины $\xi = \xi_0$

$$Y(\xi_0) = 0, \quad D(\xi_0) = 0, \quad \left(\frac{dD}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_0} \right)^{-1} = -0 \quad (4.4)$$

Величина ξ_0 находится из решения задачи.

Зададим на входе в трещину расход жидкости. В силу выбора размерной постоянной Q_0 граничное условие в безразмерных переменных имеет вид $Q(t) = t^\alpha$, где α известная константа. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$D^3(0) \frac{dD}{d\xi}(0) = -1 \quad (4.5)$$

$$n = \frac{2\alpha + 1}{5}, \quad r = \frac{3\alpha - 1}{5}, \quad m = \frac{3\alpha + 4}{5}, \quad s = \frac{\alpha + 3}{5} \quad (4.6)$$

Если в начале трещины задано давление жидкости $P(t) = t^\alpha$, то верно следующее:

$$D(0) = 1$$

$$n = \alpha, \quad r = \frac{3\alpha - 1}{2}, \quad m = \frac{3\alpha + 1}{2}, \quad s = \frac{\alpha + 1}{2} \quad (4.7)$$

Трех граничных условий на конце трещины и одного на входе в трещину достаточно для однозначного решения системы уравнений (4.2)–(4.3) и определения неизвестной величины ξ_0 .

Анализ условий (4.6) представлен в табл. 1, которая показывает, при каких значениях α поставленная задача имеет физический смысл. Значения параметра α в первом и втором столбце противоречат физическому смыслу задачи, поскольку в этих случаях длина трещины L уменьшается со временем. Четвертый столбец содержит в себе случай $\alpha = 0$, рассмотренный в статье [7]. Значения α в третьем и пятом столбце не противоречат поставленной задаче. В рамках случая малого просачивания при заданном степенном расходе жидкости на входе ограничимся рассмотрением случаев $\alpha > -1$, при которых за конечное время в трещину поступает конечный объем жидкости.

На примере случая малого просачивания жидкости в грунт при степенной автономной замене и при заданном расходе жидкости на входе в трещину приведем численный расчет задачи. Чтобы решить систему (4.2), (4.3) с граничными условиями (4.4) в конце трещины и с условием на входе (4.5), (4.6), в настоящей работе предложен следующий метод: переход от краевой задачи к задаче Коши.

Запишем краевую задачу для нахождения функции D .

$$D^3 D'' + 3D^2 (D')^2 + m\xi D' - nD = 0 \quad (4.8)$$

$$D(\xi_0) = 0, \quad (D'(\xi_0))^{-1} = -0, \quad D^3(0)D'(0) = -1 \quad (4.9)$$

Если на входе в трещину задано давление, то $D(0) = 1$

Таблица 1

1	2	3	4	5
$\alpha < -3$ $m, n, r, s < 0$	$-3 < \alpha < -4/3$ $m, n, r < 0$ $s > 0$	$-4/3 < \alpha < -1/2$ $m, s > 0$ $n, r < 0$	$-1/2 < \alpha < 1/3$ $m, n, s > 0$ $r < 0$	$1/3 < \alpha$ $m, n, r, s > 0$

Граничное условие в нуле необходимо для последующего определения величины ξ_0 . Заметим, что выражение

$$D(\xi) = \xi_0^{2/3} F(\eta), \quad \eta = \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0} \quad (4.10)$$

будет решением задачи (4.8), (4.9), тогда и только тогда, когда функция $F(\eta)$ удовлетворяет задаче

$$F^3 F'' + 3F^2 (F')^2 - m(1 - \eta)F' - nF = 0 \quad (4.11)$$

$$F(0) = 0, \quad (F'(0))^{-1} = +0 \quad (4.12)$$

$$F^3(1)F'(1) = \xi_0^{-5/3}$$

Если на входе в трещину задано давление, то $F(1) = \xi_0^{-2/3}$.

Задача (4.11) представляет собой задачу Коши для нахождения функции $F(\eta)$. Решая ее численно, определим значение $F(1)$, и с помощью (4.12) определим ξ_0 .

Найдем асимптотическое приближение функции F в окрестности носика трещины: $F(\eta) = C\eta^p$, где C и p константы. Значение степени $p = 1/3$ оправдывает использование бесконечного значения производной ширины трещины в граничном условии в носике трещины (4.9). Асимптотические приближения имеют вид

$$F(\eta) = (3m\eta)^{1/3}, \quad \frac{dF}{d\eta} = m(3m\eta)^{-2/3}$$

При известном $F(\eta)$ функции $D(\xi)$ и $U(\xi)$ определяются из (4.10) и (4.2). Подставляя $D(\xi)$ во второе уравнение (4.2) и интегрируя его, получим функцию $Y(\xi)$.

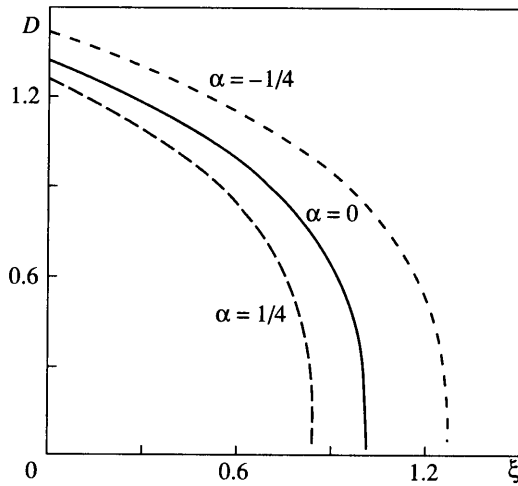
Задача Коши (4.11) решалась численно методом Рунге – Кутты. Значения параметров m и n вычислены при граничном условии на расход (4.6). Графики функций $D(\xi)$ и $U(\xi)$ для $\alpha = -1/4, 0, 1/4$ представлены на фиг. 2, 3.

При одинаковом значении ξ (фиксированном x и $t = 1$) ширина трещины убывает, а скорость жидкости возрастает с изменением параметра α от отрицательных значений к положительным (фиг. 2, 3). Этот результат объясняется тем, что значение $t = 1$ попадает в интервал времени, при котором объем закачанной жидкости возрастает с убыванием параметра α .

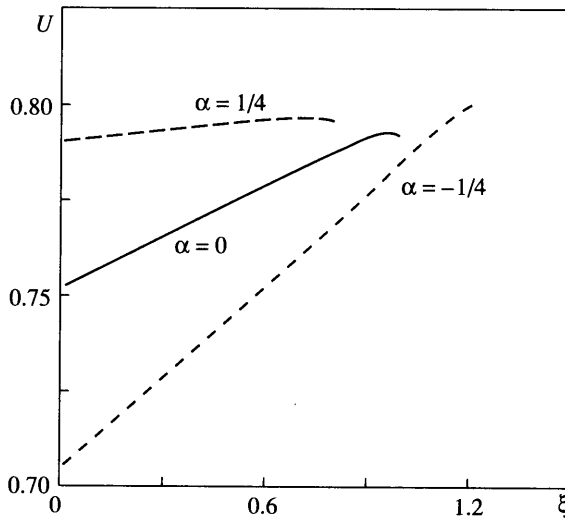
Действительно, безразмерный объем жидкости, заполняющий трещину за время t , равен

$$V(t, \alpha) = \int_0^t \tau^\alpha d\tau = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1$$

На фиг. 4 изображен график функции $V(t)$ при положительном, нулевом и отрицательном значении параметра α . Существует интервал времени $(0, t_1)$, на котором

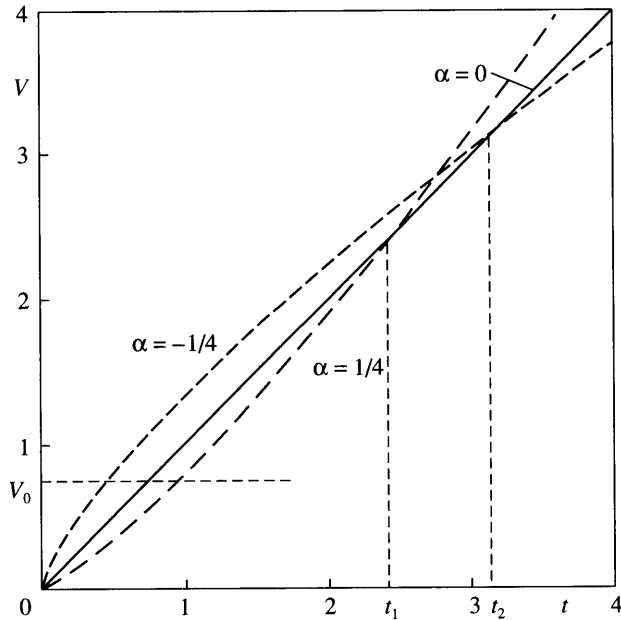


Фиг. 2. Зависимость ширины трещины D от продольной координаты ξ при $B \gg 1$, $G \sim 1$, $Q(t, 0) = t^\alpha$



Фиг. 3. Зависимость скорости жидкости в трещине U от продольной координаты ξ при $B \gg 1$, $G \sim 1$, $Q(t, 0) = t^\alpha$

$V(t, 0 < \alpha) < V(t, 0) < V(t, \alpha < 0)$, при этом $1 < t_1$. Таким образом, толщина трещины удовлетворяет неравенству $D(t, 0 < \alpha) < D(t, 0) < D(t, \alpha < 0)$ при $t \in (0, t_1)$, где t_1 – абсцисса точки пересечения графиков функции $V(t, 0 < \alpha)$ и $V(t, 0)$. При этом t_1 меньше значения t_2 – абсциссы точки пересечения $V(t, \alpha < 0)$ и $V(t, 0)$ (фиг. 4). Скорость жидкости при отрицательных α будет меньше, чем при нулевом и положительном α , т.е. $U(t, \alpha < 0) < U(t, 0) < U(t, 0 < \alpha)$, поскольку интенсивность подачи жидкости на входе в трещину падает со временем (фиг. 3). Скорость жидкости в окрестности конца трещины в автомодельных переменных равна $U(\xi) \approx m\xi_0$.



Фиг. 4. Зависимость объема жидкости в трещине V от безразмерного времени t

Используя результаты расчетов задачи Коши (4.11) в случае, когда на входе в трещину задан расход, получим

$$\alpha = -1/4, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = 1/4$$

$$\xi_0 \approx 1.247931, \quad \xi_0 \approx 1.002625, \quad \xi_0 \approx 0.844714$$

Пусть для различных значений параметра α на входе в трещину подается одинаковый объем жидкости V_0 (фиг. 4). Безразмерная длина трещины зависит от параметра α и заданного объема V_0 по закону

$$L = \xi_0 [V_0(\alpha + 1)]^{(3\alpha + 4)/(5\alpha + 5)}$$

Сравним длины трещины при $\alpha = -1/4, 0, 1/4$; $L_- = L(-1/4)$; $L_0 = L(0)$; $L_+ = L(1/4)$. Из табл. 2 видно, что для значений V_0 из первого интервала длина трещины больше в том случае, когда на входе в трещину расход жидкости возрастает со временем ($\alpha = 1/4$). Для значений V_0 , удовлетворяющих второму и третьему интервалу, длина трещины больше при постоянном режиме подачи жидкости со временем. Когда V_0 превышает некоторое критическое значение, безразмерная длина трещины больше при $\alpha = -1/4$.

При введении безразмерных переменных полагалось, что безразмерный объем жидкости $V < 1$. Таким образом, из рассмотренных в табл. 2 случаев наиболее близким к реальным задачам является первый, в котором закачивание жидкости при возрастании расхода позволяет получить большую длину трещины при одном и том же закачиваемом объеме жидкости.

Случай $\alpha = 0$ при постоянном заданном расходе рассмотрен в работе [7]. Для других случаев приведем вид автомодельных систем уравнений с граничными условиями и соотношениями для показателей n, m, r, s . Способ численного решения этих задач аналогичен изложенному выше.

Таблица 2

1	2	3	4
$0 < V_0 \leq 0.956$ $L_- < L_0 \leq L_+$	$0.956 < V_0 \leq 1.308$ $L_- < L_+ \leq L_0$	$1.308 < V_0 \leq 1.579$ $L_+ < L_- \leq L_0$	$1.579 < V_0$ $L_+ < L_0 \leq L_-$

Таблица 3

A	Граничное условие	n	m	r	s
$B \gg 1, G \sim 1, A = e^{\alpha t}$					
Q	$D^3(0)D'(0) = -1$	$2\alpha/5$	$3\alpha/5$	$3\alpha/5$	$\alpha/5$
P	$D(0) = 1$	α	$3\alpha/2$	$3\alpha/2$	$\alpha/2$
$G \gg 1, B \sim 1, A = t^{\alpha}$					
Q	$D^3(0)D'(0) = -1$	$(4\alpha + 1)/9$	$(7\alpha + 4)/9$	$(5\alpha - 1)/9$	$(2\alpha + 5)/9$
P	$D(0) = 1$	α	$(7\alpha + 1)/4$	$(5\alpha - 1)/4$	$(\alpha + 1)/2$
$G \gg 1, B \sim 1, A = e^{\alpha t}$					
Q	$D^3(0)D'(0) = -1$	$4\alpha/9$	$7\alpha/9$	$5\alpha/9$	$2\alpha/9$
P	$D(0) = 1$	α	$7\alpha/4$	$5\alpha/4$	$\alpha/2$

В случае малого просачивания жидкости в грунт ($B \gg 1, G \sim 1$) при экспоненциальной автомодельной замене система (2.1), (2.2) имеет вид

$$\xi = \frac{x}{e^{mt}}, \quad \delta(t, x) = e^{nt}D(\xi), \quad y(t, x) = e^{st}Y(\xi), \quad u(t, x) = e^{rt}U(\xi)$$

$$U = -D^2 \frac{dD}{d\xi}, \quad 3\xi \frac{dY^2}{d\xi} - 2Y^2 + D = 0 \tag{4.13}$$

$$D^3 \frac{d^2D}{d\xi^2} + 3D^2 \left(\frac{dD}{d\xi} \right)^2 + \frac{3}{2} \xi \frac{dD}{d\xi} - D = 0$$

Данная система в отличие от (4.2), (4.3) не зависит явно от степеней n, m, r, s , а следовательно, и от параметра α . Граничные условия в конце трещины задаются условием (4.4).

На входе в трещину $\xi = 0$ задан либо расход, либо давление жидкости как функция $A(t)$. Граничные условия на входе в трещину и зависимость степеней n, m, r, s от α представлены в табл. 3, когда $B \gg 1, G \sim 1, A = e^{\alpha t}$.

Перейдем к рассмотрению случая интенсивного просачивания жидкости в грунт ($G \gg 1, B \sim 1$) при степенной автомодельной замене (4.1).

Уравнения (2.1) соответствуют (4.2), уравнение (2.2) примет вид

$$D^3 \frac{d^2D}{d\xi^2} + 3D^2 \left(\frac{dD}{d\xi} \right)^2 - 24 \frac{D}{Y} = 0 \tag{4.14}$$

Граничные условия в конце трещины $\xi = \xi_0$ совпадают с (4.4).

В начале трещины $\xi = 0$ задан либо расход, либо давление жидкости как степенная функция вида $A = t^{\alpha}$. Соответствующие граничные условия и соотношения для степеней представлены в табл. 3 при $G \gg 1, B \sim 1$.

Автомодельные решения в случае большого просачивания и степенного граничного условия на расход не противоречат физической постановке задачи, когда $m > 0$, следовательно $\alpha > -4/7$.

Полученную краевую задачу (4.2), (4.14), (4.4), (4.5) или (4.7) сведем к задаче Коши следующей заменой. Представим искомые функции $D(\xi)$ и $Y(\xi)$ в виде

$$D(\xi) = \xi_0^{4/7} F(\eta), \quad Y(\xi) = \xi_0^{2/7} T(\eta), \quad \eta = \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0} \quad (4.15)$$

Чтобы функции $D(\xi)$ и $Y(\xi)$ в таком виде удовлетворяли уравнениям (4.2) и (4.14), необходимо и достаточно, чтобы новые функции $F(\eta)$ и $T(\eta)$ являлись решением задачи

$$m(\eta - 1) \frac{dT^2}{d\eta} - 2sT^2(\eta) + F(\eta) = 0$$

$$F^2 \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 3F \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 - \frac{24}{T} = 0 \quad (4.16)$$

$$T(0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad (F'(0))^{-1} = +0$$

Решая задачу Коши (4.16), найдем значение $F(1)$, с помощью которого определим ξ_0 из соотношений на входе в трещину, соответствующих либо заданному расходу, либо давлению

$$\xi_0 = (F^3(1)F'(1))^{-7/9}, \quad \xi_0 = (F(1))^{-7/4}$$

Асимптотическое приближение функций $F(\eta)$ и $T(\eta)$ в окрестности носика имеет вид

$$T(\eta) \approx 1.6m^{-3/7} \eta^{5/7}, \quad F(\eta) \approx 3.659m^{1/7} \eta^{3/7}$$

Искомые функции $D(\xi)$ и $Y(\xi)$ вычисляются из соотношений (4.15). Функция $U(\xi)$ находится непосредственно из (4.2).

В случае интенсивного просачивания жидкости в грунт ($G \gg 1, B \sim 1$) при экспоненциальной автомодельной замене (4.13) система (2.1), (2.3) соответствует (4.14), первому уравнению (4.2) и уравнению

$$\frac{7}{2} \xi \frac{dY^2}{d\xi} - 2Y^2 + D = 0$$

Граничные условия в конце трещины совпадают с условием (4.4).

В начале трещины $\xi = 0$ задано экспоненциальное граничное условие $A = e^{\alpha \xi}$ и соотношения для степеней (табл. 3, $G \gg 1, B \sim 1$).

Рассмотрим общий случай конечного просачивания жидкости в грунт. Автомодельное решение в общем случае конечного просачивания существует только в степенном виде, причем автомодельная переменная растет со временем по квадратичному закону, а остальные искомые автомодельные функции – по линейному. При этом для используемой далее степенной замены (4.1) система уравнений примет вид (4.2) и

$$D^3 \frac{d^2 D}{d\xi^2} + 3D^2 \left(\frac{dD}{d\xi} \right)^2 + 2\xi \frac{dD}{d\xi} - D - 24 \frac{D}{Y} = 0 \quad (4.17)$$

Таким образом, можно получить автомодельные решения задачи. Представим их в размерном виде

$$x = K^2 \left(\frac{k}{24} \right)^{3/2} t^2 \xi, \quad u = K^2 \left(\frac{k}{24} \right)^{3/2} t U(\xi), \quad y = k K t Y(\xi) \quad (4.18)$$

$$\delta = K \frac{k}{24} t D(\xi)$$

Граничным условиям в конце трещины $\xi = \xi_0$ соответствует (4.4).

Существуют два автомодельных решения, поскольку для каждого из граничных условий в начале трещины, на расход жидкости и давление, имеет место свое решение системы (4.2), (4.17).

В начале трещины $\xi = 0$ зададим расход жидкости $Q = t^\alpha$, $\alpha = n + r = 2$. Автомодельное решение общей задачи конечного просачивания существует только при конкретном расходе, представленном в размерном виде как

$$Q = Q_0 t^2, \quad Q_0 = h K^3 \left(\frac{k}{24} \right)^{5/2}$$

При заданном давлении жидкости на входе трещины автомодельное решение задачи в общем случае существует только, когда давление растёт по линейному закону с течением времени [7].

Заключение. Система уравнений, описывающая распространение трещины гидроразрыва в пористой среде в приближении гипотезы плоских сечений, имеет автомодельные решения только двух видов: степенного или экспоненциального. Для предельных случаев малого или большого просачивания жидкости сквозь стенки трещины в пласт на входе в трещину заданы граничные условия как произвольные степенные или экспоненциальные функции времени. В режиме конечного просачивания существует только степенное автомодельное решение, когда на входе в трещину задан расход жидкости (давление) как квадратичная (линейная) функция времени.

В приближении асимптотически малого или большого просачивания жидкости сквозь стенки трещины получено однопараметрическое семейство автомодельных решений обоих видов для ширины трещины, скорости движения жидкости в трещине и глубины пропитки пласта жидкостью гидроразрыва. Параметр α – показатель в степенном (или экспоненциальном) законе изменения расхода (или давления) со временем на входе в трещину.

Предложен численный метод решения полученной краевой задачи. В качестве примера представлено численное решение для случая малого просачивания при степенной зависимости расхода жидкости на входе в трещину от времени ($\alpha = -1/4, 0, 1/4$). В этом случае при одинаковом закачиваемом объеме жидкости гидроразрыва длина трещины больше, когда жидкость поступает в трещину по возрастающему, нежели по убывающему или постоянному закону по времени.

Работа выполнена в рамках грантов РФФИ (№№ 05-08-01435, 06-08-00009) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ – 8270.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. № 9. P. 937–949.
2. Nordgren R. Propagation of vertical hydraulic fractures // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1972. V. 12. № 4. P. 306–314.
3. Khristianovich S.A., Zheltov Y.P. Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid // Proc. 4th World Petrol. Congr., Rome, 1955. V. 2. P. 579–586.

4. *Lister J.R.* Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low viscosity precursors // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 210. P. 263–280.
5. *Adachi J.I., Detournay E.* Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // *Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2002. V. 26. № 6. P. 579–604.
6. *Garagash D. I.* Evolution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid // *Proc. ASCE Eng. Mech. Conf. Washington, 2003.*
7. *Иващнев О.Е., Смирнов Н.Н.* Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // *Вестн. МГУ. Математика, механика.* 2003. № 6. С. 28–36.
8. *Hu J., Garagash D. I.* Plane-strain fluid-driven fracture propagation in a permeable rock of finite toughness // *Proc. ASCE Eng. Mech. Conf. (on CDROM). Delaware, 2004.* P. 1–8.
9. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
10. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
11. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоздат, 1978. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.2006