

УДК 533.6.013.2

© 2007 г. А.Н. ХРАБРОВ

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КРЫЛА БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ

Рассмотрена линейная задача обтекания крыла большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости при наличии угла атаки и установившегося вращения по тангажу и крену. Основное интегральное уравнение задачи без использования метода сращиваемых асимптотических разложений сведено к последовательности одномерных интегральных уравнений. Рассчитаны несколько первых членов ряда для распределения циркуляции по поверхности крыла. Для эллиптического крыла большого удлинения вычислены соответствующие аэродинамические нагрузки. Найден производные аэродинамических коэффициентов крыла по углу атаки и угловым скоростям вращения. Полученные асимптотические выражения сравниваются с результатами численных расчетов соответствующих производных по методу дискретных вихрей.

Ключевые слова: идеальная жидкость, теория крыла большого удлинения, асимптотические методы, вращательные производные.

Классическая теория несущей линии Прандтля [1] явилась началом систематических теоретических исследований по аэродинамике крыла большого удлинения. Полученные результаты используются до сих пор при оценочных расчетах в процессе проектирования крыла. Гораздо позднее Ван-Дайком [2] задача была решена с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений. Было показано, что результаты Прандтля являются членами первого порядка по малому параметру ϵ , в качестве которого выбиралось обратное удлинение крыла. Несмотря на сложность и громоздкость вычислений, Ван-Дайком было найдено несколько первых членов асимптотического ряда. В дальнейшем в [3] та же задача была решена с помощью асимптотического разложения интегрального уравнения теории несущей поверхности. Результаты Ван-Дайка были повторены без использования метода сращиваемых асимптотических разложений и найдена ошибка в члене порядка ϵ^2 . Следует отметить, что в [2, 3] исследовалось только влияние угла атаки на аэродинамику крыла большого удлинения. В качестве же аэродинамических нагрузок рассматривалась только подъемная сила крыла. Позднее в [4] была получена регулярная формула для асимптотического разложения по малому параметру сингулярных интегралов определенного вида, к которому можно свести и основной член интегрального уравнения теории несущей поверхности. При выводе этой формулы широко использовано понятие конечной части расходящегося интеграла по Адамару [5].

В настоящей работе с использованием результатов [4] рассматривается задача аналогичная [3], но с учетом установившегося вращения крыла. Вследствие некоторого упрощения вычислений появилась возможность исследовать не только влияние угла атаки, но и угловых скоростей вращения крыла по тангажу и крену. Кроме коэффициента подъемной силы находятся также асимптотические выражения для коэффициентов момента крена и тангажа, действующих на крыло.

Вращательные аэродинамические производные крыла определяют его демпфирующие свойства при возмущенных движениях около некоторых установившихся балансировочных режимов. Эти производные важны для исследования динамики полета самолета. Для тонкого крыла под малым углом атаки в идеальной жидкости важно исследо-

вать демпфирование по тангажу и крену. Вращательные производные по угловой скорости рыскания для крыла определяются в основном разностью сопротивлений левой и правой консолей крыла, вследствие их различных скоростей. В идеальной жидкости этот эффект не может быть учтен, поэтому наличие угловой скорости рыскания в настоящей работе не исследуется.

1. Рассматривается задача обтекания тонкого прямого (без стреловидности) крыла большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости. Удлинение крыла вводится обычным образом $\lambda = l^2/S \gg 1$, где l – размах крыла, а S – его площадь. Для обезразмеривания задачи считается, что поступательная скорость движения крыла $U_0 = 1$. В качестве линейного масштаба выбирается размах крыла $l = 1$. Поверхность крыла наклонена к направлению скорости потока под малым углом атаки $\alpha \ll 1$. Крыло также вращается с угловыми скоростями Ω_x и Ω_z по крену и тангажу относительно начала связанной системы координат, которое находится в центре корневой хорды крыла. Дополнительные безразмерные малые параметры, соответствующие угловым скоростям вращения крыла по крену и тангажу, вводятся [10] следующим образом: $\omega_x = \Omega_x l / 2U_0$, $\omega_z = \Omega_z b_a l / U_0$. Здесь b_a – безразмерная средняя аэродинамическая хорда крыла, зависящая от его формы в плане. Вследствие установившегося вращения, движение крыла в общем случае происходит по некоторой пространственной спирали. Так как угловые скорости вращения малы, шаг и радиус спирали будут большими и вихревой след за крылом в первом приближении можно считать плоским.

Течение потенциально везде за исключением поверхности крыла S и вихревого следа за крылом Σ . Для возмущенного потенциала течения ϕ справедливо

$$\Delta\phi = 0 \quad (1.1)$$

Для решения задачи используются различные граничные условия. Отсутствие перепада давления на следе приводит здесь к граничному условию $d\phi/dx = 0$. Условие Жуковского о конечности скорости дает на задней кромке крыла условие $|\nabla\phi| < \infty$. Вследствие затухания возмущений на бесконечности должно выполняться условие $\phi \rightarrow 0$. Если крыло плоское (без крутки), для безразмерной нормальной скорости на его поверхности в линейном приближении должно выполняться условие

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\alpha - 2\omega_x z - \frac{\omega_z}{b_a} x \quad (1.2)$$

Решение поставленной краевой задачи для гармонической функции ϕ может быть получено с помощью формулы Грина

$$\phi(x, y, z) = \oint_{S+\Sigma} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \frac{1}{4\pi r} ds, \quad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \quad (1.3)$$

где интеграл берется по верхней и нижней поверхности крыла и следа, а (x_1, y_1, z_1) – точка на поверхности интегрирования. Аналогичная формула справедлива и для другой гармонической функции – горизонтальной компоненты возмущенной скорости $u = \partial\phi/\partial x$. Учитывая непрерывность этой функции при переходе через след, в формуле для u можно избавиться от интегрирования по следу. А условие отсутствия завихренности в свою очередь приводит к исчезновению второго члена в оставшемся интеграле по крылу [6]. Таким образом можно получить

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \gamma(x_1, z_1) \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r} \right) dx_1 dy_1 \quad (1.4)$$

Здесь введено обозначение $\gamma = u_+ - u_-$ для разрыва горизонтальной компоненты возмущенной скорости сверху и снизу поверхности крыла. В этом выражении интегрирование по поверхности крыла проводится уже только один раз. Возвращаясь к возмущенному потенциалу с помощью формулы

$$\varphi = \int_{-\infty}^x u(\xi, y, z) d\xi$$

можно записать

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{y\gamma(x_1, z_1)}{y^2 + (z - z_1)^2} \left[1 + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + (z - z_1)^2}} \right] dx_1 dz_1$$

Используя это выражение можно вычислить нормальную скорость на поверхности крыла $v = \lim_{y \rightarrow 0} \partial\varphi/\partial y$. В результате получаем

$$v(x, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\gamma(x_1, z_1)}{(z - z_1)^2} \left[1 + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}} \right] dx_1 dz_1$$

Для уменьшения степени сингулярности под интегралом проведем интегрирование по частям, что приводит к окончательному выражению

$$v(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b_0/2}^{b_0/2} dx_1 \int_{-l(x_1)/2}^{l(x_1)/2} \frac{\partial\gamma}{\partial z_1} \frac{1}{z - z_1} \left[1 + \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}}{x - x_1} \right] dz_1 \quad (1.5)$$

Здесь b_0 – корневая хорда крыла, а $l(x_1)$ – местный размах крыла. Сравнение этого выражения с условием непротекания (1.2) дает в результате основное интегральное уравнение для нахождения функции разрыва скорости на крыле γ . Ниже данное интегральное уравнение решается с использованием асимптотических методов.

2. Введем в рассмотрение малый параметр $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, обратный удлинению крыла. С использованием этого параметра сделаем замену переменных $x = \varepsilon X$, $\xi = \varepsilon x_1$, $z_1 = \eta$ в интеграле (1.5), форма крыла при этом задается функцией $b(z) = \varepsilon B(z)$. В результате получим

$$v = -\frac{1}{4\pi} \int_{-B_0/2}^{B_0/2} d\xi \left[\varepsilon \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \frac{d\eta}{z - \eta} + \frac{1}{X - \xi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \frac{\sqrt{\varepsilon^2(X - \xi)^2 + (z - \eta)^2}}{z - \eta} d\eta \right] \quad (2.1)$$

Здесь $B_0 = b_0/\varepsilon = O(1)$. Введем обозначение

$$I(\varepsilon_0) = - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (z - \eta)^2}}{z - \eta} d\eta$$

для второго интеграла в квадратных скобках выражения (2.1). Здесь принята также сокращенная запись $\varepsilon_0 = \varepsilon(X - \xi)$. При замене переменных $\vartheta = z - \eta$ последний интеграл может быть записан в виде

$$I(\varepsilon_0) = \int_D f(\vartheta) K(\varepsilon_0, \vartheta) d\vartheta \quad (2.2)$$

где $f(\vartheta) = \gamma$ – неизвестная функция, а ядро равно $K(\epsilon_0, \vartheta) = \sqrt{\epsilon_0^2 + \vartheta^2} / \vartheta$. Знак D у интеграла обозначает интегрирование по размаху. Для интегралов вида (2.2) в [4] развита регулярная теория разложения в асимптотический ряд, справедливая при условии, что ядро является однородной функцией заданного порядка, т.е.

$$K(\alpha\epsilon_0, \alpha\vartheta) = \alpha^\beta s(\alpha)K(\epsilon_0, \vartheta)$$

Здесь β – порядок однородности, а $s(\alpha)$ либо единичная функция, либо $\text{sign } \alpha$. Легко заметить, что в рассматриваемом здесь случае ядро, действительно, является однородной функцией нулевого порядка. Применяя подход, развитый в [4], для разложения второго порядка получим сразу

$$I = FP \int_D \gamma' \text{sign } \vartheta d\vartheta + \frac{1}{2} \epsilon_0^2 FP \int_D \gamma' \frac{\text{sign } \vartheta}{\vartheta^2} d\vartheta + \epsilon_0 \gamma' FP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta} d\vartheta + \epsilon_0^2 \gamma'' FP \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta - \epsilon_0^2 \ln \epsilon_0 \gamma'' + o(\epsilon_0^2) \quad (2.3)$$

Знак FP перед интегралами указывает, что данные интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару [5]. При выводе формулы (2.3) учтено, что разложение ядра по малому параметру имеет вид

$$K(\epsilon_0, \vartheta) = \text{sign } \vartheta \sqrt{1 + \frac{\epsilon_0^2}{\vartheta^2}} = \text{sign } \vartheta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{\vartheta^2} \right) + O(\epsilon_0^4)$$

Также использованы производные ядра по малому параметру

$$\frac{dK}{d\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0^2 + \vartheta^2}}, \quad \frac{d^2K}{d\epsilon_0^2} = \frac{\vartheta}{(\epsilon_0^2 + \vartheta^2)^{3/2}}$$

и их пределы

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{dK}{d\epsilon_0} = 0, \quad \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{d^2K}{d\epsilon_0^2} = \frac{\text{sign } \vartheta}{\vartheta^2}$$

Таким образом, для нахождения явного вида разложения интеграла $I(\epsilon_0)$ осталось найти значения интегралов, входящих в выражение (2.3). Первый интеграл вычисляется непосредственно

$$I_1 = FP \int_D \gamma' \text{sign } \vartheta d\vartheta = - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \text{sign}(z - \eta) d\eta = -2\gamma(z)$$

Второй интеграл находится в соответствии с правилами вычисления конечной части расходящихся интегралов ([5] стр. 143–152)

$$I_2 = FP \int_D \gamma' \text{sign } \vartheta \frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = -FP \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \text{sign}(z - \eta) \frac{d\eta}{(z - \eta)^2} = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{z+\delta}^{1/2} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(z - \eta)^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{1}{\delta} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} \ln \delta \right] - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-1/2}^{z-\delta} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(z - \eta)^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{1}{\delta} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} \ln \delta \right]$$

Опуская некоторые элементарные вычисления получим

$$I_2 = 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \eta^2} - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^3 \gamma}{\partial \eta^3} \text{sign}(\eta - z) \ln|\eta - z| d\eta$$

Для третьего интеграла имеем

$$I_3 = FP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \vartheta^2}}{\vartheta} d\vartheta = 0$$

так как подынтегральная функция нечетная.

Для четвертого интеграла с помощью замены переменных $1 + \vartheta^2 = 1/t$ можно записать

$$I_4 = FP \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta = FP \int_0^1 \frac{dt}{t^2 \sqrt{1-t}}$$

Последний интеграл табличный

$$\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{1-t}} = -\sqrt{\frac{1-t}{t}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}} \quad (2.4)$$

По определению конечной части интеграла [5] для интегралов со степенной функцией в знаменателе

$$FP \int_0^a \frac{\Phi(t) dt}{t^n} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\delta}^a \frac{\Phi(t) dt}{t^n} + \Phi(0) \binom{(0)}{1-n} \delta^{1-n} + \dots + \Phi(0) \binom{(n-1)}{(n-1)!} \frac{\ln \delta}{(n-1)!} \right\}$$

В соответствии с этим определением и выражением (2.4) получим

$$FP \int_0^1 \frac{dt}{t^2 \sqrt{1-t}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1-\delta}}{\delta} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-\delta}}{1+\sqrt{1-\delta}} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \delta \right\} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Следовательно, все четыре интеграла, входящие в выражение (2.3), вычислены и асимптотическое разложение основного интегрального уравнения (2.1) может быть переписано в виде

$$v = -\frac{1}{4\pi} \int_{-B_0/2}^{B_0/2} d\xi \left\{ \varepsilon \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\gamma' d\eta}{z-\eta} + \frac{2\gamma}{X-\xi} + \varepsilon^2 \ln \varepsilon (X-\xi) \gamma'' - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 (X-\xi) \left[\gamma'' \left(\ln 2 + \frac{3}{2} - \ln |X-\xi| \right) - \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \gamma''' \text{sign}(\eta - z) \ln|\eta - z| d\eta \right] \right\} \quad (2.5)$$

Необходимо учесть также, что в асимптотических переменных в левой части уравнения (2.5), согласно (1.2), стоит известная функция, зависящая от угла атаки и угловых скоростей вращения крыла. С учетом того, что $b_a = \varepsilon B_a \ll 1$ ($B_a \sim 1$), эта функция имеет нулевой порядок по ε

$$v = -\alpha - 2\omega_{xz} - \frac{\omega_z}{B_a} X$$

3. Исходя из вида разложения по степеням малого параметра ϵ уравнения (2.5) его решение можно искать в виде

$$\gamma(X, z) = \gamma_0(X, z) + \epsilon\gamma_1(X, z) + \epsilon^2 \ln\epsilon\gamma_2(X, z) + \dots \quad (3.1)$$

оставляя в качестве старшего член порядка $\epsilon^2 \ln\epsilon$. При этом с изменением порядка интегрирования основное интегральное уравнение (2.5) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} -\alpha - 2\omega_x z - \frac{\omega_z}{B_a} X &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \frac{\gamma(\xi, z) d\xi}{X - \xi} - \\ -\frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\eta}{z - \eta} \int_{-B/2}^{B/2} \gamma' d\xi - \frac{\epsilon^2 \ln\epsilon}{4\pi} \int_{-B/2}^{B/2} (X - \xi) \gamma'' d\xi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя разложение (3.1) в уравнение (3.2), получим в нулевом порядке интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \frac{\gamma_0(\xi, z) d\xi}{X - \xi} = \alpha + 2\omega_x z + \frac{\omega_z}{B_a} X \quad (3.3)$$

Это уравнение аналогично основному интегральному уравнению теории тонкого профиля [8]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma d\xi}{x - \xi} = -v(x) \quad (3.4)$$

которое имеет единственное решение регулярное вблизи задней кромки и с интегрируемой сингулярностью вблизи передней кромки

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \int_{-a}^a \frac{v(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}}{\xi - x} d\xi \quad (3.5)$$

Отсюда решение уравнения (3.3) может быть записано в виде

$$\gamma_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{B/2 - X}{B/2 + X}} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\alpha + 2\omega_x z + \omega_z \xi / B_a}{\xi - x} \sqrt{\frac{B/2 + \xi}{B/2 - \xi}} d\xi \quad (3.6)$$

Взятие табличных интегралов в выражении (3.6) приводит к двумерному распределению циркуляции по крылу

$$\gamma_0 = (2\alpha + 4\omega_x z) \sqrt{\frac{B/2 - X}{B/2 + X}} + \frac{2\omega_z}{B_a} \sqrt{B^2/4 - X^2}$$

Таким образом, в нулевом приближении имеем распределение циркуляции, соответствующее двумерной задаче в каждом сечении с поправкой для местного угла атаки, вызванной вращением крыла по крену. Интегрированием по хорде крыла предыдущего соотношения может быть легко получено распределение по размаху суммарной циркуляции крыла в данном приближении

$$\Gamma_0 = \int_{-B/2}^{B/2} \gamma_0 dX = \pi\alpha B(z) + 2\pi\omega_x z B(z) + \frac{\pi}{4} \omega_z \frac{B^2}{B_a} \quad (3.7)$$

В первом приближении по ϵ после подстановки разложения (3.1) в уравнение (3.2) получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \frac{\gamma_1(\xi, z) d\xi}{X - \xi} + \frac{1}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\eta}{z - \eta} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \gamma_0' d\xi = 0$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \frac{\gamma_1(\xi, z) d\xi}{X - \xi} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\Gamma_0' d\eta}{\eta - z} \quad (3.8)$$

Правая часть этого уравнения – уже известная функция, поэтому это уравнение также – интегральное уравнение вида (3.4). Его решение в этом случае

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{B/2 - X}{B/2 + X}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\Gamma_0' d\eta}{\eta - z} \quad (3.9)$$

Суммарная циркуляция по размаху в этом приближении вычисляется аналогично

$$\Gamma_1 = \int_{-B/2}^{B/2} \gamma_1 dX = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\Gamma_0' d\eta}{\eta - z} \int_{-B(z)/2}^{B(z)/2} \sqrt{\frac{B/2 - X}{B/2 + X}} dX = \frac{B}{4} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\Gamma_0' d\eta}{\eta - z} \quad (3.10)$$

Этот член соответствует поправке теории несущей линии Прандтля.

Члены порядка $\epsilon^2 \ln \epsilon$ в уравнении (3.2) приводят к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{\gamma_2(\xi, z) d\xi}{X - \xi} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dz^2} \int_{-B/2}^{B/2} (X - \xi) \gamma_0' d\xi \quad (3.11)$$

Это уравнение также имеет вид (3.4) и его решение может быть получено аналогичным (3.5) образом для известной правой части. Обратимся к вычислению интеграла, входящего в правую часть этого уравнения

$$\begin{aligned} \int_{-B/2}^{B/2} (X - \xi) \gamma_0' d\xi &= X \Gamma_0 - \int_{-B/2}^{B/2} \xi \gamma_0' d\xi = \\ &= X \Gamma_0 - (2\alpha + 4\omega_x z) \int_{-B/2}^{B/2} \xi \sqrt{\frac{B/2 - \xi}{B/2 + \xi}} d\xi - \frac{4\omega_x z}{B_a} \int_{-B/2}^{B/2} \xi \sqrt{\frac{B^2}{4} - \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении равен нулю вследствие нечетности подынтегральной функции. Предпоследний интеграл – табличный, отсюда

$$\int_{-B/2}^{B/2} (X - \xi) \gamma_0' d\xi = X \Gamma_0 + \frac{\pi B^2}{4} (\alpha + 2\omega_x z)$$

Последнее выражение определяет правую часть интегрального уравнения (3.11), решение которого может быть выписано в виде

$$\gamma_2 = -\sqrt{\frac{B/2 - X}{B/2 + X}} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\alpha B^2}{8} + \frac{\omega_x z B^2}{4} \right) - \sqrt{\frac{B^2}{4} - X^2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\alpha B}{2} + \omega_x z B + \frac{\omega_x B^2}{4 B_a} \right) \quad (3.12)$$

Таким образом получено, что асимптотическое решение основного интегрального уравнения крыла (3.2) и в случае установившихся вращений сводится к решению ряда простых сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, аналогичных интегральному уравнению двумерного тонкого профиля. Более высокие члены ряда в настоящей работе не получены в связи с возрастающей трудоемкостью аналитических вычислений.

4. Обратимся к вычислению аэродинамических нагрузок, действующих на крыло в рассматриваемом случае установившегося движения. Искомые безразмерные коэффициенты подъемной силы, а также моментов крена и тангажа могут быть вычислены с помощью интегралов

$$\begin{aligned} c_y &= \frac{2}{S} \int_{-1/2}^{1/2} d\eta \int_{-b/2}^{b/2} \gamma(\xi, \eta) d\xi \\ m_x &= -\frac{2}{S} \int_{-1/2}^{1/2} \eta d\eta \int_{-b/2}^{b/2} \gamma(\xi, \eta) d\xi \\ m_z &= -\frac{2}{S b_a} \int_{-1/2}^{1/2} d\eta \int_{-b/2}^{b/2} \xi \gamma(\xi, \eta) d\xi \end{aligned} \quad (4.1)$$

В нулевом приближении по ε с учетом выражения (3.6) интегралы для c_y и m_z легко вычисляются и приводят к следующим результатам, независимо от формы крыла в плане

$$c_{y0} = 2\pi\alpha + \frac{\pi}{2}\omega_z, \quad m_{z0} = \frac{\pi}{2}\alpha \quad (4.2)$$

Члены, содержащие угловую скорость вращения крыла по крену ω_x , исчезают для крыла симметричной формы в плане. В выражении для момента тангажа член, содержащий угловую скорость вращения крыла по тангажу ω_z , равен нулю только в случае вращения крыла относительно центра корневой хорды. При вычислении выражений (4.2) использовались соотношения

$$S = \int_{-1/2}^{1/2} b(\eta) d\eta, \quad b_a = \frac{1}{S} \int_{-1/2}^{1/2} b^2(\eta) d\eta$$

Для коэффициента момента крена из выражения (4.1) следует

$$m_{x0} = -\frac{4\pi\omega_x}{S} \int_{-1/2}^{1/2} \eta^2 b(\eta) d\eta$$

Последний интеграл зависит от формы крыла в плане. Рассмотрим, например, эллиптическое крыло, для которого

$$b(z) = b_0 \sqrt{1 - 4z^2} \quad (4.3)$$

где b_0 – корневая хорда крыла.

Для такого крыла коэффициент момента крена в нулевом приближении принимает вид

$$m_{x0} = -\frac{\pi\omega_x}{4} \quad (4.4)$$

Для эллиптического крыла можно вычислить и члены более высоких порядков для разложения коэффициентов аэродинамических нагрузок. При вычислении членов порядка ϵ необходимо сначала с использованием выражения (3.9) найти распределение $\gamma(x, z)$. С использованием выражений (3.7) и (4.3) после некоторых преобразований можно получить

$$\gamma_1 = - \left[\pi \alpha b_0 + 4\pi \omega_x b_0 z - \frac{\omega_z b_0^2}{b_a} \left(z \ln \frac{1/2 - z}{1/2 + z} - 1 \right) \right] \sqrt{\frac{b/2 - x}{b/2 + x}}$$

Подстановка этого выражения в интегралы (4.1) позволяет найти члены c_{y1} , m_{z1} и m_{x1} , имеющие первый порядок по ϵ в соответствующих разложениях для аэродинамических коэффициентов. Так для коэффициента подъемной силы вычисления дают в результате

$$c_{y1} = -\pi^2 B_0 \alpha - \frac{\pi^2 B_0^3}{3 B_a} \omega_z$$

При нахождении данного выражения кроме табличных был использован определенный интеграл

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2} \left(\eta \ln \frac{1/2 - \eta}{1/2 + \eta} - 1 \right) d\eta = -\frac{\pi}{6}$$

который вычисляется с использованием формулы интегрирования по частям (см. [9] с. 240).

Для эллиптического крыла размахом $l = 1$ и удлинением $1/\epsilon$ корневая хорда $-B_0 = 4/\pi$ и средняя аэродинамическая хорда $-B_a = 8B_0/(3\pi)$. Подстановка этих значений в выражение для c_{y1} приводит к

$$c_{y1} = -4\pi\alpha - \pi\omega_z$$

Аналогичные вычисления интегралов для коэффициентов момента тангажа и крена дают в результате

$$m_{z1} = -\pi\alpha - \frac{5}{2\pi}\omega_z$$

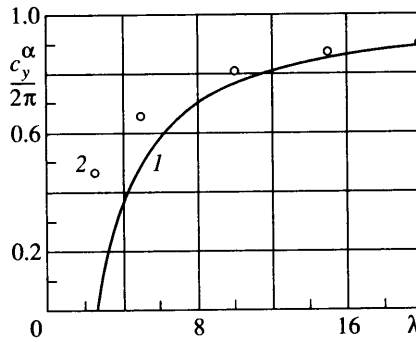
$$m_{x1} = \pi\omega_x$$

Подстановка выражения для члена циркуляции γ_2 порядка $\epsilon^2 \ln \epsilon$ (3.12) в интегралы (4.1) позволяет определить соответствующие составляющие в аэродинамических нагрузках. После вычисления интегралов имеем

$$c_{y2} = \frac{32}{\pi}\alpha + \frac{4}{\pi}\omega_z$$

$$m_{z2} = -\frac{4}{\pi}\alpha$$

$$m_{x2} = \frac{8}{\pi} \left(1 + \frac{8}{5\pi} \right) \omega_x$$



Фиг. 1. Сравнения полученных асимптотических результатов (1) с численными расчетами по теории несущей поверхности (2) для производной c_y^α

Собирая члены всех вычисленных порядков по ε , можно найти аэродинамические производные по углу атаки α и угловым скоростям вращения крыла по тангажу и крену — ω_z , ω_x . Для коэффициента подъемной силы эти производные имеют вид

$$c_y^\alpha = 2\pi \left(1 - 2\varepsilon + \frac{16}{\pi^2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right) \quad (4.5)$$

$$c_y^{\omega_z} = \frac{\pi}{2} \left(1 - 2\varepsilon + \frac{8}{\pi^2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right)$$

Следует отметить, что полученная производная c_y^α совпадает с производной, найденной в [2] и [3]. Производная для коэффициента подъемной силы по угловой скорости ω_x равна нулю вследствие симметричности задачи.

Производные для коэффициента момента тангажа для рассматриваемого положения центра тяжести в центре корневой хорды получаются аналогично

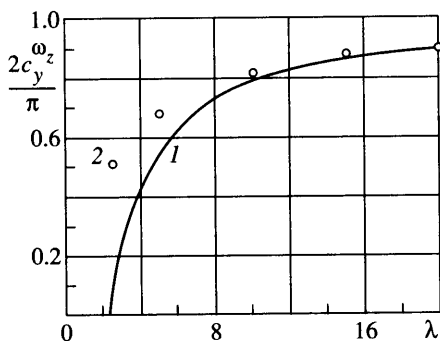
$$m_z^\alpha = \frac{\pi}{2} \left(1 - 2\varepsilon - \frac{8}{\pi^2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right) \quad (4.6)$$

$$m_z^{\omega_z} = -\frac{5}{2\pi} \varepsilon$$

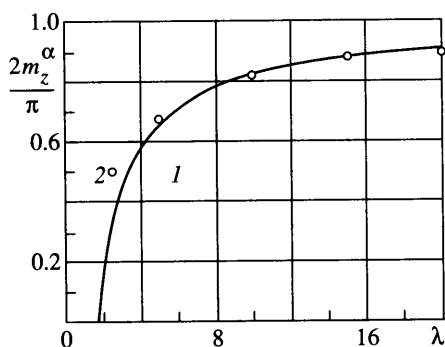
И наконец, для коэффициента момента крена вследствие симметрии отлична от нуля только одна производная по угловой скорости крена

$$m_x^{\omega_x} = -\frac{\pi}{4} \left[1 - 4\varepsilon - \frac{8}{\pi} \left(1 + \frac{8}{5\pi} \right) \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right] \quad (4.7)$$

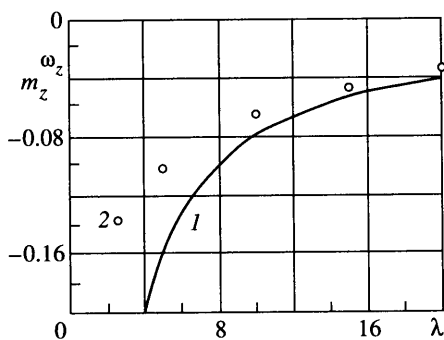
Были проведены также сравнения полученных асимптотических выражений (4.5)–(4.7) с результатами численных расчетов соответствующих производных для эллиптического крыла по методу дискретных вихрей [10]. Данный численный метод представляет собой одну из разновидностей метода несущей поверхности [6]. Результаты сравнения представлены на фиг. 1–5. Сопоставление результатов численных расчетов по методу дискретных вихрей с кривыми, соответствующими асимптотическим выражениям, показывает, что в целом явные выражения для различных аэродинамических производ-



Фиг. 2. То же, что на фиг. 1 для производной $c_y^{\omega_z}$



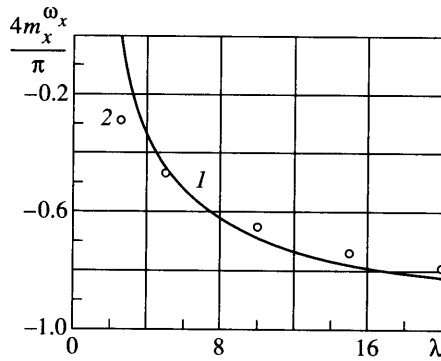
Фиг. 3. То же, что на фиг. 1 для производной m_z^{α}



Фиг. 4. То же, что на фиг. 1 для производной $m_z^{\omega_z}$

ных по углу атаки и угловым скоростям вращения крыла хорошо совпадают с результатами численных расчетов для достаточно больших удлинений крыла.

Заклучение. Рассмотрена асимптотическая теория обтекания потоком идеальной жидкости крыла большого удлинения под малым углом атаки при наличии установив-



Фиг. 5. То же, что на фиг. 1 для производной $m_x^{\omega_x}$.

шихся вращений по тангажу и крену. Основное интегральное уравнение теории без использования метода сращиваемых асимптотических разложений сведено к последовательности одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, хорошо известных из теории тонкого профиля. Решение последовательности этих интегральных уравнений находится в квадратурах. На основании этих решений построено начало асимптотического ряда для двумерного распределения циркуляции по поверхности крыла. С точностью до $\epsilon^2 \ln \epsilon$ рассчитаны аэродинамические нагрузки, действующие на крыло. Для эллиптического крыла большого удлинения получены явные выражения для аэродинамических производных по углу атаки и рассматриваемым угловым скоростям вращения. Показано, что асимптотические выражения при больших удлинениях хорошо совпадают с результатами численных расчетов по методу дискретных вихрей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 03-01-00918), а также гранта поддержки ведущих научных школ НШ-8597.2006.1 (школа академика Г.С. Бюшгенса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 576 с.
2. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
3. *Kida T., Miyai Y.* An alternative treatment of lifting-line theory as a perturbation problem // ZAMP. 1978. V. 29. № 4. P. 591–607.
4. *Guermond J.L.* A systematic formula for the asymptotic expansion of singular integrals // ZAMP. 1987. V. 38. № 5. P. 717–729.
5. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
6. *Эшли Х., Лэндал М.* Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 318 с.
7. *Mangler K.W.* Improper integrals in theoretical aerodynamics // ARC CP № 94. 1952. 35 p.
8. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448с.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
10. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К.* Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М.: Наука, 1975. 424 с.