

УДК 533.6.011.8

© 2007 г. П.В. МУКИН, А.И. ОСИПОВ, А.В. УВАРОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ГАЗА В ВОЛНОВОДЕ

В линейном приближении проведен анализ устойчивости неоднородного дозвукового потока колебательно-неравновесного газа. Показано, что устойчивость потока неравновесного газа с увеличением начальной скорости потока и ширины зоны накачки энергии снижается. Это объясняется влиянием обратной связи, осуществляемой за счет звуковых возмущений, распространяющихся против потока. Расчет был проведен для разных моделей накачки.

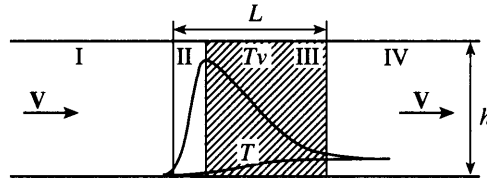
Ключевые слова: неравновесный газ, гидродинамическая устойчивость, проточный лазер.

Для увеличения мощности лазерных систем и предотвращения срыва генерации за счет нагрева системы используется проточная схема, когда холодный газ вводится в систему, затем в нем возбуждаются внутренние степени свободы молекул (при сохранении поступательной температуры на максимально низком уровне), после чего он используется для генерации излучения. Релаксационные процессы приводят к постепенному нагреву газа и, как следствие, к уменьшению инверсной заселенности. Газ выводится из рабочей области, охлаждается и снова используется для генерации излучения. При такой схеме генерации излучения возникают те же проблемы, что и для лазеров с диффузионным охлаждением. При увеличении мощности происходит быстрый разогрев системы, возникают тепловые неустойчивости, усиление которых приводит к срыву генерации.

Этот факт хорошо исследован экспериментально, при этом выделены общие качественные закономерности [1, 2]. Но при теоретическом рассмотрении, как правило, рассматривают однородную проточную систему [3, 4], малые возмущения в которой даже при условии их усиления выносятся вместе с потоком из рабочей области. Однако оказывается, что в таких системах ключевую роль играет неоднородность неравновесной среды вдоль потока. Эта неоднородность принципиальна для всех проточных систем, поскольку связана с релаксацией энергии. Для возникновения неустойчивости в таких системах необходима обратная связь. Неоднородность приводит к появлению отраженных звуковых волн, которые эту связь обеспечивают. Проблема взаимодействия неравновесной области с возмущениями, которые падают на эту область извне, была рассмотрена в [5]. Было показано, что за счет неоднородности генерируется полный набор гидродинамических мод, и, например, дополнительная турбулизация потока с целью улучшения теплоотвода влечет за собой появление и тепловых возмущений, которые дестабилизируют систему.

В данной работе будет показано, что именно за счет неоднородности, тесно связанной с неравновесностью, в системе может возникнуть неустойчивость, т.е. генерация усиливающихся возмущений самой неравновесной областью.

1. Постановка задачи. На фиг. 1 представлена схема рассматриваемой проточной системы. Поток равновесного холодного газа в плоском волноводе поступает из равновесной области I в область накачки энергии II. На выходе из области II поток газа становится колебательно-неравновесным и релаксирует в зоне III, переходя в область IV – область равновесного состояния.



Фиг. 1. Схема проточной системы с типичным распределением колебательной T_v и поступательной температуры T : I и IV – области равновесно холодного и нагретого газа, II – область накачки энергии, III – колебательно-неравновесная область

Рассматривается одномерный дозвуковой поток колебательно-неравновесного неоднородного газа в волноводе с абсолютно жесткими стенками, т.е. нормальные составляющие возмущений скорости на стенке полагаются равными нулю [6] (ось x расположена вдоль потока, ось y – поперек, фиг. 1) и исследуется устойчивость потока по отношению к двумерным возмущениям.

Неравновесный поток описывается в двухтемпературном приближении. Считается, что накачка энергии в колебательные степени свободы молекул в зоне II и последующая релаксация в зоне III обеспечивает однородное распределение колебательной энергии с колебательной температурой T_v . В зоне III за счет процессов VT-обмена происходит переход энергии из колебательных степеней свободы молекул в поступательно-вращательные. Газ нагревается и приходит в состояние равновесия, т.е. колебательная и поступательно-вращательная температуры сравниваются.

Исходная система гидродинамических уравнений с учетом энерговыделения и релаксации имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v &= 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} p \\ \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{dt} - \frac{T d\rho}{\rho dt} &= \frac{m \varepsilon - \varepsilon_{eq}}{k_B \tau} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{\varepsilon - \varepsilon_{eq}}{\tau} + I_p \end{aligned} \tag{1.1}$$

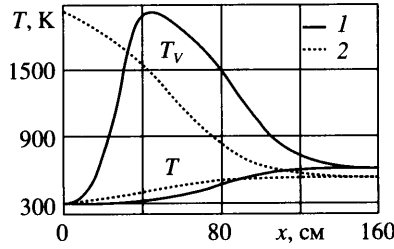
Здесь p, ρ, T, v – давление, плотность, поступательно-вращательная температура, скорость, τ – время релаксации, γ – показатель адиабаты, m – масса молекулы, k_B – постоянная Больцмана, I_p – мощность накачки энергии,

$$\varepsilon(T_v) = \frac{\hbar \tilde{\omega}}{m} \left(\exp\left(\frac{\hbar \tilde{\omega}}{k_B T_v}\right) - 1 \right)^{-1}$$

– текущая колебательная энергия газа, $\hbar \tilde{\omega}$ – величина колебательного кванта, $\varepsilon_{eq} = \varepsilon(T)$ – равновесное значение колебательной энергии.

Система гидродинамических уравнений (1.1) должна быть дополнена уравнением состояния газа. Рассматриваемые системы хорошо описываются уравнением состояния совершенного газа $p = \rho k_B T/m$, которое связывает давление, плотность и поступательную температуру.

Рассматриваются две модели накачки энергии. В модели локальной накачки зона подвода энергии гораздо уже зоны релаксации и ее можно считать поверхностью, на которой колебательная температура испытывает скачок. В модели протяженной накачки область подвода энергии имеет конечную ширину. В этом случае можно выбрать гауссовскую форму источникового члена $I_p = I_0 \exp(-(x - x_0)^2/d^2)$.



Фиг. 2. Профили поступательной и колебательной температуры: 1 – для модели протяженной накачки энергии ($d = 10$ см), 2 – для модели локальной накачки энергии при начальной колебательной температуре $T_v = 2000$ К

2. Анализ устойчивости. Решение системы (1.1) в стационарном случае определяет профили невозмущенных параметров. На фиг. 2 представлены профили колебательной и поступательной температуры для начальной скорости потока 10000 см/с. Расчеты проведены для O_2 с

$$p\tau = 1.14 \cdot 10^{-10} \exp(19.57(T/T_0)^{-1/3}) \text{ атм} \cdot \text{с}. \quad (2.1)$$

При линеаризации системы (1.1) для возмущений вида:

$$a'(x, y) = a'_0(x) \cos\left(\frac{\pi l y}{h}\right) \exp(i\omega t), \quad v'_y(x, y) = v'_{y0}(x) \sin\left(\frac{\pi l y}{h}\right) \exp(i\omega t) \quad (2.2)$$

где $a' = \rho', T', v'_x, \epsilon', l$ – номер нормальной волны ($l = 1$), h – поперечный размер волновода (фиг. 1), получим систему уравнений для возмущений гидродинамических параметров

$$\begin{aligned} i\omega\rho'_0 + \rho'_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'_0}{\partial x} + v'_{0x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v'_{0x}}{\partial x} + \frac{\pi l}{h} \rho v'_{0y} &= 0, \\ i\omega\rho v'_{0x} + \rho v \frac{\partial v'_{0x}}{\partial x} + (\rho v'_{0x} + \rho'_0 v) \frac{\partial v}{\partial x} + \\ + \rho \frac{\partial T'_0}{\partial x} + T'_0 \frac{\partial \rho'_0}{\partial x} + T'_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho'_0 \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ i\omega\rho v'_{0y} + \rho v \frac{\partial v'_{0y}}{\partial x} - \frac{\pi l}{h} \rho T'_0 - \frac{\pi l}{h} \rho'_0 T &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} \left(i\omega T'_0 + v'_{0x} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T'_0}{\partial x} \right) - \left(\frac{T'_0}{\rho} + \frac{T \rho'_0}{\rho^2} \right) v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \\ - \frac{T}{\rho} \left(i\omega \rho'_0 + v \frac{\partial \rho'_0}{\partial x} + v'_{0x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= \frac{\epsilon'_0}{\tau} - \frac{\epsilon - \epsilon_{eq}}{\tau^2} \frac{dT}{dT} T'_0 - \frac{\epsilon'_{eq}}{\tau} \\ i\omega \epsilon'_0 + v \frac{\partial \epsilon'_0}{\partial x} + v'_{0x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} &= -\frac{\epsilon'_0}{\tau} + \frac{\epsilon - \epsilon_{eq}}{\tau^2} \frac{dT}{dT} T'_0 + \frac{\epsilon'_{eq}}{\tau} \end{aligned}$$

Решение линеаризованной системы (2.3) можно представить в виде набора собственных функций. Это утверждение справедливо как в неравновесных областях II и III, так и в равновесных зонах I и IV. Однако в равновесных зонах коэффициенты в линейной системе (2.3) становятся постоянными, и набор собственных функций (мод) хорошо известен [7]. Это две звуковые, тепловая, вихревая и релаксационная моды.

Появление неустойчивости означает, что в неравновесных областях II и III генерируются усиливающиеся по времени возмущения. Эти возмущения распространяются в равновесные области I и IV, однако в этом случае возмущения в этих областях должны быть линейной комбинацией только отходящих от неравновесных областей мод. В области равновесного нагретого газа IV – это звуковая, вихревая, тепловая и релаксационная моды, которые распространяются в направлении потока газа. В холодном газе I – это только звуковая волна, распространяющаяся против течения, так как поток дозвуковой.

Для нахождения возмущений основных гидродинамических параметров в равновесных областях необходимо найти дисперсионные уравнения для каждой моды. В равновесных областях I и IV основные параметры не зависят от x , возмущения можно представить в виде $a'_0(x) = a' \exp(k_x x)$, поэтому система (2.3) будет иметь вид:

$$i\omega\rho' + \nu k_x \rho' + \rho k_x v'_x + ik_y \rho v'_y = 0$$

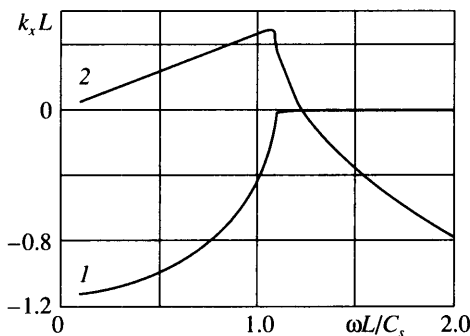
$$i\omega\rho v'_x + \rho \nu k_x v'_x + T k_x \rho' + \rho k_x T' = 0$$

$$i\omega\rho v'_y + \rho \nu k_x v'_y + ik_y \rho T' + ik_y \rho' T = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (i\omega T' + \nu k_x T') - \frac{T}{\rho} (i\omega \rho' + \nu k_x \rho') = \frac{\varepsilon'}{\tau} - \frac{c_v T'}{\tau}$$

$$i\omega \varepsilon' + \nu k_x \varepsilon' = -\frac{\varepsilon'}{\tau} + \frac{c_v T'}{\tau}, \quad c_v T' = \varepsilon'_{eq}(T)$$

Каждая мода характеризуется своим дисперсионным соотношением и своими связями между параметрами. Только один параметр в каждой моде задается произвольно, остальные жестко связаны с ним. Так, например, для рассмотренных тепловой и вихревой мод $\omega = k_x v$. Разбиение на моды и число мод сохраняется и в неравновесной неоднородной области (II и III), поскольку система уравнений (2.3) – линейна. Поэтому в неравновесной области существуют только моды, которые являются продолжением отходящих мод. Это тепловая, вихревая, релаксационная и звуковая моды, распространяющиеся вниз по потоку в области IV, и звуковая мода, распространяющаяся вверх по потоку в область I. Эти моды неравновесной области имеют более сложный вид, чем в равновесных зонах, но они могут быть получены путем интегрирования системы уравнений для возмущений из равновесной области с начальными условиями, соответствующими единичной амплитуде возмущения, и равновесными соотношениями между возмущениями в моде методом Рунге – Кутты. Рассмотрим сначала границу областей I и II. Слева от границы должна существовать только отходящая звуковая мода, справа – только набор из четырех мод, распространяющихся направо. Эти моды могут быть получены путем интегрирования. Если накачка протяженная, то условием существования решения является равенство возмущений слева и справа от границы. Если в качестве независимых параметров для описания возмущений, генерируемых неравновесными областями II и III, выбрать возмущения плотности, температуры, колебательной энергии и поперечной и продольной компонент скорости, то получим систему из пяти уравнений с



Фиг. 3. Графики зависимости реальной (1) и мнимой (2) части безразмерного волнового вектора $k_x L$ в зависимости от безразмерной частоты $\omega L / C_s$ для звуковой волны, распространяющейся в области IV, ($v = 10000$ см/с, $T_{v \max} = 1730$ К $\$$ и $\pi l / h = 1$)

пятью неизвестными амплитудами мод. Система эта однородна и имеет решение только в случае, когда ее детерминант равен нулю.

Для модели локальной накачки энергии на рассматриваемой границе испытывает разрыв возмущение колебательной энергии, поэтому условие равенства возмущений колебательной энергии заменяется более сложным соотношением. В этом случае амплитуда возмущения колебательной энергии в равновесной холодной зоне будет связана с амплитудой возмущения ε'_{eq_0} на левой границе неравновесной зоны соотношением:

$$\varepsilon'_{eq_0} = (-\varepsilon(T_V) - \varepsilon_{eq}(T_0))v'_{x0}/v + \varepsilon'_0,$$

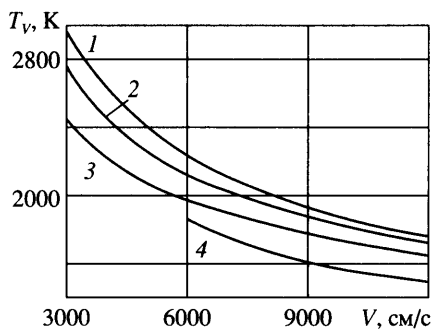
где ε'_0 – возмущение колебательной энергии в равновесной холодной зоне I, а ε'_{eq_0} – возмущение в начале зоны III (зона II в этом случае становится бесконечно малой).

Это соотношение получается из системы гидродинамических уравнений при условии, что за время накачки все параметры среды, кроме колебательной энергии, остаются постоянными.

Равенство нулю детерминанта позволяет определить комплексную частоту возмущений и в случае, если мнимая часть частоты становится отрицательной, будет наблюдаться усиление возмущений, генерируемых неравновесной областью. Граничные значения частоты, соответствующие условию $\text{Im}(\omega) = 0$, определяют кривую нейтральной устойчивости, которая отделяет устойчивую область от неустойчивой. Таким образом, задача сводится к нахождению таких параметров системы, при которых $\text{Im}(\omega) = 0$.

Более простой с технической точки зрения анализ правой границы между областями III и IV и приравнивание амплитуд возмущений на этой границе. В этом случае интегрирование требуется только для одной звуковой моды, которая отходит налево в область I.

Рассмотрим теперь особенности рассматриваемых возмущений, связанные с их свойствами и дисперсионным соотношением. На фиг. 3 представлены зависимости реальной и мнимой частей безразмерного волнового вектора $k_x L$ (L – длина релаксационной зоны) для звуковой моды, распространяющейся в области равновесного нагретого потока в зависимости от безразмерной частоты $\omega L / C_s$ (C_s – скорость звука) при условии, что $\text{Im}(\omega) = 0$. Для значений $\pi l / h = 1$ существуют такие значения ω , при которых звуковая мода, распространяющаяся в области нагретого газа IV, меняет свое направление и начинает распространяться против потока. Однако при этом резко уменьшается реальное значение $k_x L$, т.е. в этом случае волна, распространяющаяся против потока, усиливается. Именно в этом случае детерминант матрицы, которая состоит из амплитуд мод, зануля-



Фиг. 4. Кривые нейтральной устойчивости: 1 – модель локальной накачки энергии; 2, 3 и 4 – модель протяженной накачки энергии, ($d = 3, 10, 30$ см)

ется. Это наблюдается в области, где ширина релаксационной зоны порядка длины звуковой волны, т.е. имеет место резонансное взаимодействие возмущений с релаксационной зоной ($\omega \tau \sim 1$).

3. Результаты расчетов. На фиг. 4 представлены кривые нейтральной устойчивости для разных моделей накачки энергии. Значения параметров T_v и V , лежащие ниже кривой, соответствуют затуханию, а выше – усилению возмущений.

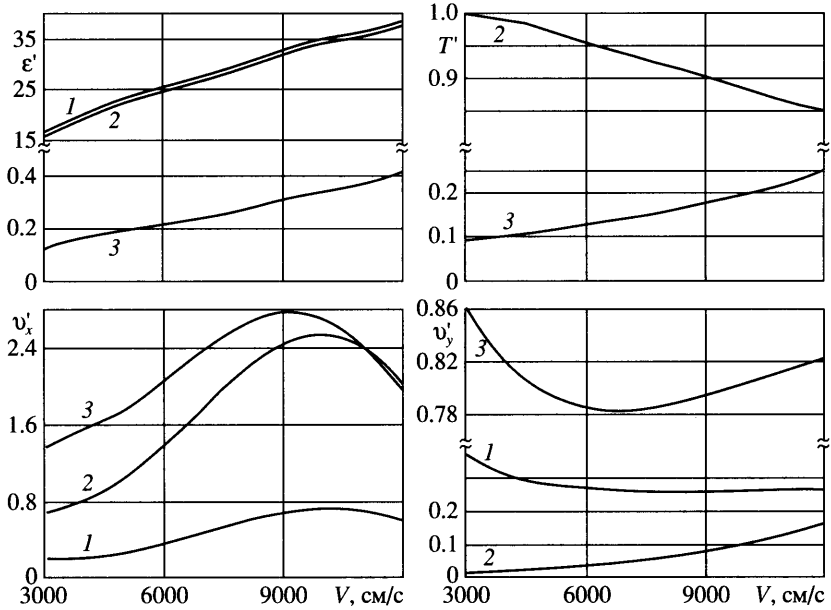
В условиях эксперимента фиксированным параметром, как правило, является ширина зоны накачки, а скорость потока и степень неравновесности можно варьировать. На фиг. 4 кривая 1 соответствует бесконечно малой длине зоны накачки. При увеличении этой длины кривые смещаются вниз (кривые 2–4).

С точки зрения физики протекающих процессов основную роль играет соотношение длин зоны накачки и релаксации. С увеличением ширины зоны накачки газ становится менее устойчивым (фиг. 4).

Результаты, представленные на фиг. 4, выглядят несколько неожиданными. Оказывается, что увеличение скорости потока приводит к уменьшению критической колебательной температуры. Этот факт можно объяснить изменением условий обратной связи. Похожая ситуация возникает и при анализе взаимодействия малых возмущений с неоднородной неравновесной областью [5]. Применительно к лазерам потеря устойчивости потока еще не означает срыва генерации. Если усиливается вихревая мода, то в возникающем турбулентном потоке теплообмен улучшается, т.е. улучшаются условия генерации. Напротив, усиление тепловой и релаксационной мод может привести к тепловому взрыву и, как следствие, к срыву генерации. Проведенный анализ лишь указывает, что выше кривой нейтральной стабильности одномерное течение становится неустойчивым. Для ответа на вопрос о последствиях потери устойчивости для генерации необходимо рассмотреть более сложную нелинейную задачу. Однако качественные выводы могут быть сделаны уже из анализа амплитуд гидродинамических мод в точках нейтральной стабильности.

На фиг. 5 представлены результаты расчета для возмущений колебательной энергии, температуры и компонент скорости для модели локальной накачки энергии (кривая 1 на фиг. 4). Все амплитуды отнесены к амплитуде звуковой моды, распространяющейся против потока. На графиках представлены модули этого комплексного отношения в зависимости от скорости потока.

Критические возмущения возникают в области, где ширина релаксационной зоны порядка длины звуковой волны. По-видимому, речь не идет о тепловом взрыве и контракции, поскольку температурные возмущения имеют конечные значения амплитуды как для тепловой, так и для звуковой мод (отношение к звуковой волне, распространяющейся против потока, равно единице даже при малых скоростях потока). Кроме того, с



Фиг. 5. Зависимость модулей амплитуд возмущений мод от начальной скорости потока для модели локальной накачки энергии (единица условная): 1 – тепловая мода, 1' – вихревая мода, 2 – релаксационная мода, 3 – звуковая мода, распространяющаяся по потоку

увеличением скорости роль тепловой моды в формировании температурных возмущений уменьшается. Аналогичные выводы можно сделать и для модели протяженной накачки энергии, поскольку графики для амплитуд возмущений имеют такой же вид.

Заключение. В линейном приближении проведен анализ устойчивости неоднородного дозвукового потока неравновесного газа. Показано, что устойчивость потока снижается при увеличении скорости потока и ширины зоны накачки. Рассчитаны кривые нейтральной устойчивости для простейших моделей накачки энергии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 06-01-00203-а, № 05-08-49988-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко А.В., Голубев В.С., Даньщиков Е.В., Лебедев Ф.В., Рязанов А.В. О влиянии турбулентности на устойчивость самостоятельного разряда в потоке воздуха // Физика плазмы. 1979. Т. 5. Вып. 3. С. 687–692.
2. Абильтитов Г.А., Велихов Е.П., Голубев В.С., Григорянц А.Г., Лебедев Ф.В., Николаев Г.А. Мощные газоразрядные СО-лазеры и их применение в технологии М.: Наука, 1984. 106 с.
3. Sharma V. D., Madhumita G., Manickam S.A.V. Dissipative Waves in a Relaxing Gas Exhibiting Mixed Nonlinearity // Nonlinear Dynamics. 2003. V. 33. P. 283–299.
4. Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физ. наук, 1992. Т. 162. № 11. С. 1–42.
5. Мукин Р.В., Осипов А.И., Уваров А.В. Взаимодействие малых гидродинамических возмущений с неравновесной областью в потоке газа // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 6. С. 58–64.
6. Исакович М.А. Общая акустика М.: Наука, 1973, 495 с.
7. Haas R.A. Plasma stability of electric discharge in molecular gases // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. № 2. P. 1017–1043.