

УДК 532.526.3.013.4

© 2006 г. М. В. УСТИНОВ

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ПОВЫШЕННОЙ СТЕПЕНИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПОТОКА

С помощью численного решения уравнений Навье–Стокса найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в пограничном слое на плоской пластине внезапно приведенной в движение. В качестве начальных условий использованы результаты прямого численного моделирования изотропной однородной турбулентности. Найденное решение моделирует ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на плоской пластине при повышенной степени турбулентности набегающего потока, причем время с начала движения играет роль продольной координаты. Оно позволяет оценить влияние различных факторов: нестационарности, нелинейности и характеристик спектра пульсаций скорости в набегающем потоке на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое.

*Ключевые слова:* ламинарно-турбулентный переход, турбулентность, восприимчивость, пограничный слой.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока ( $Ti > 0.5\%$ ) доминирующим типом возмущений, приводящих к турбулизации пограничного слоя, становятся вытянутые вдоль потока полосчатые структуры [1–4]. Их энергия возрастает пропорционально расстоянию от передней кромки, а не экспоненциально, как у волн Толлмина–Шлихтинга. При этом в спектре пульсаций скорости преобладают низкие частоты. Порождение полосчатых структур стационарными и нестационарными периодическими вихревыми возмущениями набегающего потока (вихревыми модами) исследовано теоретически в [5–7]. В них показано, что амплитуда возникающих в пограничном слое пульсаций сначала нарастает линейно вниз по потоку, а затем затухает вследствие вязкой диссипации. Восприимчивость пограничного слоя к турбулентности набегающего потока исследована в [8, 9] с помощью представления турбулентности в виде бесконечного набора вихревых мод со случайными амплитудами. Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что теория занижает в 2–3 раза амплитуду пульсаций. Это, вероятно, вызвано пренебрежением нелинейным взаимодействием возмущений и неточностями определения характеристик продольной завихренности в набегающем турбулентном потоке. Численное моделирование взаимодействия стационарных продольных вихрей с пограничным слоем [10] на основе решения параболизированных уравнений Навье–Стокса показало, что нелинейность ускоряет рост полосчатой структуры. Несмотря на значительные успехи теоретического описания рассматриваемого типа перехода в рамках концепции алгебраического роста некоторые ее выводы прямо противоречат данным эксперимента. Так, по теории длина полосчатых структур должна быть пропорциональна расстоянию от передней кромки  $x$ , а их ширина –  $\sqrt{x}$ . Обработка данных эксперимента [4] показала, однако, что поперечный масштаб возмущений в пограничном слое не зависит от  $x$ , а их длина растет гораздо медленнее – пропорционально  $\sqrt{x}$  или толщине пограничного слоя.

В [11] предложен способ моделирования развития полосчатых структур, основанный на решении задачи о развитии слоя Стокса на пластине, внезапно приведенной в движение внутри турбулентной жидкости. В качестве начальных условий при этом используется “настоящее” турбулентное течение, полученное численным моделированием развития однородной изотропной турбулентности. Недостатком [11] является применение параболизированных уравнений Навье–Стокса вместо их полной версии, что привело к неадекватному описанию развития коротких структур и невозможности моделирования заключительной стадии перехода. В настоящей работе аналогичная [11] задача о ламинарно-турбулентном переходе в слое Стокса решается в рамках полных уравнений Навье–Стокса.

**1. Постановка задачи и численный метод.** Рассмотрим однородное и изотропное турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости с нулевой средней скоростью во всем пространстве. В начальный момент времени  $t = 0$  в нем появляются две параллельные пластины, расположенные на расстоянии  $2D'$  и движущиеся в своей плоскости со скоростью  $u_\infty$ . Будем исследовать движение жидкости в образовавшемся плоском канале. Стенки канала увлекают за собой жидкость в слоях, толщина которых увеличивается со временем. До тех пор пока толщина слоев мала по сравнению с полувысотой канала  $D'$ , течение в них можно рассматривать в качестве модели пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой турбулентным потоком. При этом время играет роль продольной координаты, в направлении которой нарастает пограничный слой. Декартову систему координат  $x, y, z$ , движущуюся с каналом, зададим так, чтобы  $xoy$  совпадала с его центральной плоскостью, а ось  $x$  была направлена против движения. В качестве масштабов для координат и скорости примем вязкую длину  $l = \nu/u_\infty$  и скорость движения стенок  $u_\infty$ . Продольную, поперечную и вертикальную (нормальную к стенкам канала) составляющие скорости обозначим  $u, v, w$ , а давление –  $p$ .

Течение как до, так и после появления канала описывается уравнениями Навье–Стокса. При  $t > 0$  их решение должно удовлетворять условию прилипания на стенках. Исходное поле скоростей турбулентного течения в момент появления канала, которое обозначим  $\mathbf{V}_-(x, y, z)$ , им не удовлетворяет, поэтому не может служить начальными условиями для решения после его появления. Чтобы сформулировать корректные условия, предположим, что завихренность остается неизменной при появлении канала, а скорости меняются так, чтобы обеспечить условие непротекания на стенках. Такое начальное поле скоростей  $\mathbf{V}_+$  отличается от исходного на градиент некоторой скалярной функции (потенциала)  $\phi$ , которая находится из решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_+ &= \mathbf{i} + \mathbf{V}_- + \nabla\phi \\ \Delta\phi &= 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, \pm D) = -w_-(x, y, \pm D) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{i}$  – единичный вектор в направлении оси абсцисс,  $w_-$  – вертикальная скорость в исходном турбулентном течении,  $D$  – безразмерная полувысота канала. Заметим, что при таком задании граничных условий тангенциальная составляющая скорости на стенках канала отлична от нуля. Однако тангенциальные разрывы скорости обычны для начальных условий задач о течении вязкой жидкости и не вызывают трудностей при их численном решении. Аналогичный способ задания начальных условий применялся в [5, 8–10] для изучения взаимодействия вихревых мод с пограничным слоем плоской пластины.

Течение как до, так и после появления пластины находилось с помощью численного решения уравнений Навье–Стокса. Составляющие скорости и давление считались периодическими в направлениях параллельных стенкам канала и искались в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^N \left[ \sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} u_{mn}(z, t) \\ w_{mn}(z, t) \\ p_{mn}(z, t) \end{pmatrix} e^{i\alpha_m(x-ct)} + (c.c.) \right] \cos \beta_n y \quad (1.2)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{m=1}^M (v_{nm}(z, t) e^{i\alpha_m(x-t)} + (c.c.)) \right] \sin \beta_n y$$

$$\alpha = \pi/L_x; \quad \beta = \pi/D; \quad \alpha_m = m\alpha; \quad \beta_n = n\beta$$

Здесь  $U_0(z, t)$  – скорость основного течения, равная нулю до появления пластины и соответствующая профилю скорости при ламинарном течении в канале после его появления,  $2L_x$  и  $2D$  – продольный и поперечный периоды течения. Параметр  $c$ , имеющий смысл скорости движения системы отсчета, в которой рассматривается развитие возмущений, задавался равным 0 при моделировании исходного турбулентного течения и 1 после появления канала. Для уменьшения объема вычислений  $u, v, p$  считались четными, а  $v$  – нечетной функцией  $y$ . Такое упрощенное представление возмущений часто используется при численном моделировании турбулентных течений и не приводит к заметным ошибкам [12]. При расчете течения до и после появления канала использовались различные способы дискретизации по вертикальной координате. До появления канала течение считалось периодическим по  $z$  с периодом, равным высоте канала  $2D$ , и амплитуды составляющих скорости и давления в (1.2) искались в виде

$$\begin{pmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^J \begin{pmatrix} u_{mnj} \\ v_{mnj} \\ p_{mnj} \end{pmatrix} \cos \delta_j z, \quad w_{mn} = \sum_{j=1}^K v_{mnj} \sin \delta_j z, \quad \delta = \frac{2\pi}{D}, \quad \delta_j = j\delta$$

Цель работы – моделирование развития сильно вытянутых в направлении потока полосчатых структур. Поэтому продольный период расчетной области  $2L_x$  выбирался в 10 раз большим поперечных периодов, которые оба равнялись высоте канала  $2D$ . При этом количества гармоник в продольном и поперечных направлениях подбирались так, чтобы максимальные волновые числа  $\alpha_M, \beta_N, \delta_j$ , определяющие минимальный размер разрешаемых возмущений, совпадали. Последующие расчеты развития однородной турбулентности были выполнены при  $J = N = 17$  и  $M = 170$ . Отметим, что используемый способ задания поля скоростей в турбулентном течении допускает однородные по длине возмущения поперечных составляющих скорости или постоянные по  $x$  продольные вихри. Они соответствуют стационарным продольным вихрям в задаче о восприимчивости пограничного слоя к турбулентности потока, рассматриваемой в пространственной постановке. Такие вихри играют заметную, если не главную роль в порождении полосчатых структур. Необходимостью их учета объясняется выбор такого нерационального, с точки зрения уменьшения количества степеней свободы, способа дискретизации.

Начальные условия при моделировании исходного турбулентного течения задавались выражениями

$$u_{mnj} = \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \alpha \beta \delta (\beta_n^2 + \delta_j^2) E(k) \quad (r_1 + ir_2) \quad (1.3)$$

$$v_{mnj} = \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \alpha \beta \delta (\beta_n^2 + \delta_j^2) E(k) \quad (r_3 + ir_4); \quad w_{mnj} = \frac{i\alpha_m u_{mnj} + \beta_n v_{mnj}}{\delta_j}$$

где  $r_1, r_2, r_3, r_4$  – случайные функции целого аргумента  $mN(J+1) + (J+1)n + j$ , имеющие нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Нормировочный коэффициент в (1.3) обеспечивает заданный трехмерный энергетический спектр пульсаций скорости  $E(k)$ . Для его аппроксимации использовалась эмпирическая формула для одномерного спектра пульсаций продольной составляющей скорости  $E_1(k)$  из [13] и известная связь трехмерного и одномерного спектров

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left( \bar{k} \frac{dE_1}{dk} \right), \quad E_1 = \frac{1}{\pi} \frac{Tu^2}{1 + b(kL)^{5/3}} e^{-5.6kL/R_t^{5/3}} \quad (1.4)$$

$$b = \frac{1.35}{1 + 35R_t^{-5/3}}, \quad R_t = TuL$$

Степень турбулентности  $Tu$  и ее интегральный масштаб  $L$ , определяющие начальные условия, задавались равными 0.05 и  $0.3D$  соответственно.

За исходное поле скоростей в момент появления канала  $V_-$  примем решение задачи об эволюции однородной изотропной турбулентности в некоторый момент времени  $t_0$ , сдвинутое по оси  $z$  на некоторое расстояние  $d$ . Подставляя его в (1.1) и представляя потенциал  $\varphi$  в виде, аналогичном (1.2)

$$\varphi = \sum_{n=0}^N \left[ \sum_{m=0}^M (\varphi_{mn}(z) e^{i\alpha_m x} + (c.c.)) \right] \cos \beta_n y$$

получим начальные условия для амплитуд гармоник скорости в течении после появления канала

$$u_{mn} = \sum_{j=0}^J u_{mnj}(t_0) \cos \delta_j(z+d) + i\alpha_m a_{mn} \varphi_{mn}(z)$$

$$v_{mn} = \sum_{j=0}^J v_{mnj}(t_0) \cos \delta_j(z+d) + \beta_n a_{mn} \varphi_{mn}(z)$$

$$w_{mn} = \sum_{j=0}^J w_{mnj}(t_0) \sin \delta_j(z+d) + \alpha_{mn} \frac{d\varphi_{mn}}{dz} \quad (1.5)$$

$$a_{mn} = \sum_{j=1}^J (-1)^j w_{mnj}(t_0) \sin \delta_j d, \quad \varphi_{mn}(z) = \frac{\text{sh}(\gamma_{mn} z)}{2\gamma_{mn} \text{ch} \gamma_{mn}}, \quad \gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$$

При расчете дальнейшего развития течения в канале для аппроксимации решения по  $z$  использовался метод коллокаций. В качестве узлов коллокации выбирались нули полинома Якоби  $P_Q^{(1,1)}(z)$ . Количество узлов  $Q$  равно 61. Для аппроксимации решения по времени использовалась схема Кранка–Николсона. Нелинейные члены находились с помощью быстрого преобразования Фурье. Метод расчета течения в канале аналогичен описанному в [14, 15] и отличается от него фиксированными фазовой скоростью возмущений  $c = 1$  и шагом по времени  $\tau = 0.05$ .

**2. Результаты расчетов.** В качестве начальных условий использовались два состояния турбулентного течения с одинаковой интенсивностью пульсаций продольной компоненты скорости  $\epsilon_u = 0.005$  и разными масштабами турбулентности. Первое состояние получилось в результате расчета развития однородной турбулентности с начальными усло-

№	$\varepsilon_u$	$\varepsilon_v$	$\varepsilon_w$	$L$	$\lambda$	$R_t$
1	$5.001 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$4.33 \cdot 10^{-3}$	4264	1973	9.87
2	$5.009 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$5.91 \cdot 10^{-3}$	6880	3393	16.98

виями (1.3), (1.4) до момента времени  $t_0 = 9.63 \cdot 10^5$ . Второе состояние находилось в результате расчета эволюции возмущений до времени  $t_0 = 2.39 \cdot 10^6$  с начальными условиями, соответствующими первому состоянию с увеличенной в 10 раз интенсивностью пульсаций. Основные интегральные характеристики турбулентности – среднеквадратичные амплитуды пульсаций компонент скорости  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_w$ , интегральный  $L$  и диссипативный  $\lambda$  масштабы и турбулентное число Рейнольдса  $R_t$  для этих состояний приведены в таблице.

Эти характеристики определялись выражениями

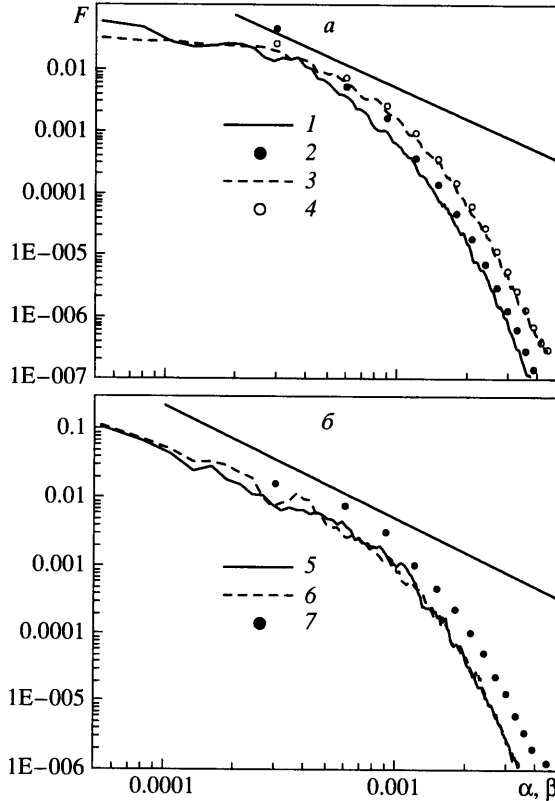
$$\{\varepsilon_u^2, \varepsilon_v^2, \varepsilon_w^2\} = \frac{1}{8L_x D^2} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-D}^D \int_{-D}^D \{u^2, v^2, w^2\} dx dy dz$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{8L_x D^2} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 dx dy dz, \quad E = \frac{1}{2} \{\varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2 + \varepsilon_w^2\}$$

$$Tu = \sqrt{\frac{2}{3} E}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{10 E}{3 \Omega}}, \quad L = \frac{2\pi}{E} F_\alpha[u^2](0), \quad R_t = \lambda \sqrt{2E}$$

где  $E$  и  $\Omega$  – энергия и энтрофия,  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  – векторы скорости и завихренности,  $F_\alpha[u^2]$  – спектральная плотность квадрата продольной компоненты скорости по продольному волновому числу. Из таблицы видно, что рассматриваемые течения отличаются только масштабом турбулентности, причем как диссипативный, так и интегральный масштабы во втором течении примерно в 1.7 раза больше, чем в первом.

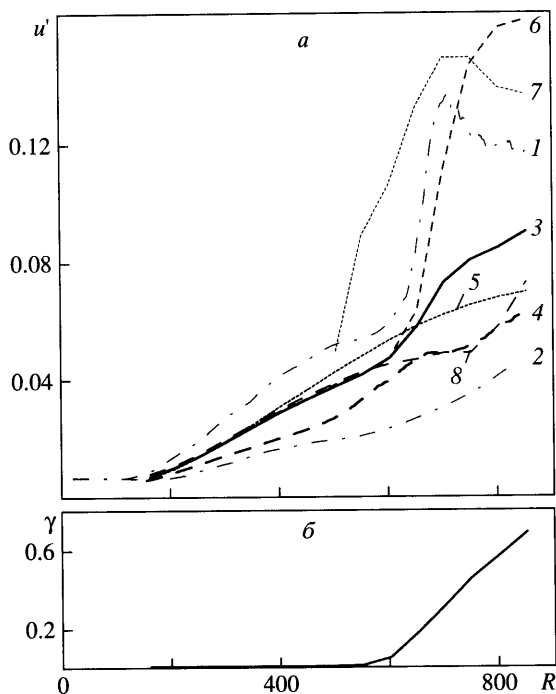
Спектры пульсаций скорости в полученных турбулентных течениях показаны на фиг. 1. Из-за малого турбулентного числа Рейнольдса и, как следствие, малого отношения интегрального и диссипативного масштабов в обоих течениях, у них отсутствуют линейные участки, соответствующие инерционному интервалу. Закон Колмогорова – Обухова  $F \sim \alpha^{-5/3}$ , описывающий наклон спектров в инерционном интервале, показан прямыми на фиг. 1. Отметим, что в экспериментах [2, 3], несмотря на несколько большее  $R_t \sim 20 - 40$ , линейный участок в спектрах турбулентности в набегающем потоке также не наблюдался. “Продольные” спектры  $u$  по продольному волновому числу  $F_\alpha[u^2]$  и  $v$  по поперечному волновому числу  $F_\beta[v^2]$  в обоих течениях практически совпадают для малых и средних масштабов. В крупных масштабах имеется анизотропность, проявляющаяся в том, что спектры пульсаций поперечной скорости лежат несколько выше, чем продольной. Спектры в течении 2 при малых  $\alpha, \beta$  проходят выше, а при больших – ниже, чем в течении 1. Это демонстрирует, что интегральный и диссипативный масштабы во втором течении действительно больше, чем в первом. “Поперечные” спектры  $F_\alpha[v^2]$  и  $F_\alpha[w^2]$  в течении 2, построенные на фиг. 1 б, также хорошо совпадают. Однако поперечный спектр продольной скорости  $F_\beta[u^2]$  заметно отклоняется от них. Это отличие – единственное существенное проявление анизотропности. Оно, вероятно, обусловлено разным способом дискретизации течения в продольном и поперечных направлениях.



Фиг. 1. Продольные (а) и поперечные (б) спектры пульсаций скорости в исходных турбулентных течениях: 1, 2 – спектры  $u$  по  $\alpha$  и  $v$  по  $\beta$  в течении 1; 3, 4 – такие же спектры в течении 2; Спектры  $v, w$  по  $\alpha$  (5, 6) и  $u$  по  $\beta$  (7) в течении 2

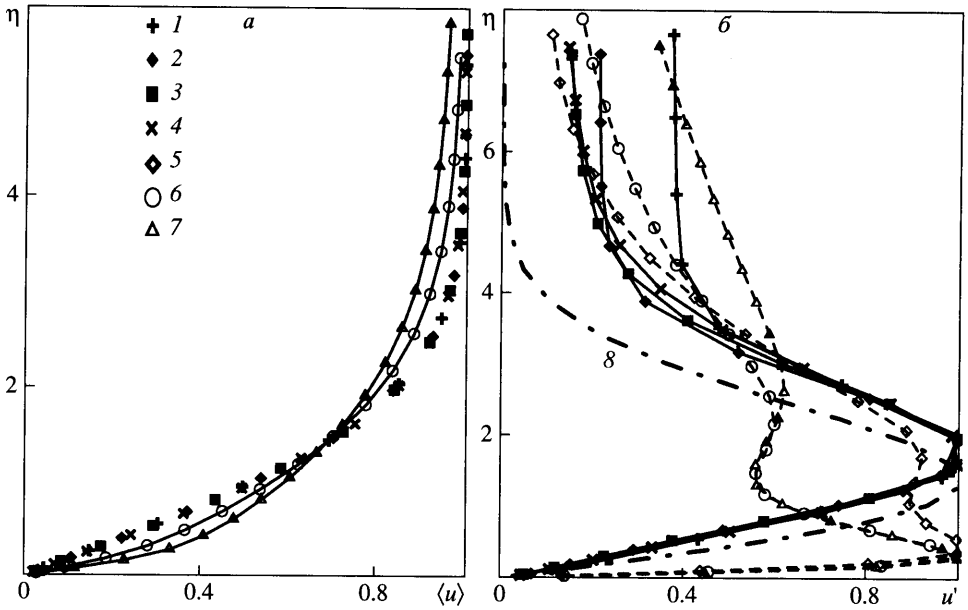
ях. Заметим, что анизотропность турбулентности в набегающем потоке примерно такого же уровня наблюдалась и в экспериментах [3, 4]. Она есть следствие выделенного направления потока и влияния стенок рабочей части трубы.

Для начальных условий, соответствующих двум описанным состояниям турбулентности, были выполнены расчеты развития возмущений на стенках канала при пяти значениях сдвига его оси  $d = (0, 0.3, 0.5, 0.7, 1.)D$  относительно исходного течения. Если считать, что сдвиговые слои на верхней и нижней стенках развиваются независимо, то в результате получено десять различных решений задачи о росте слоя Стокса в турбулентной жидкости. Зависимости максимальных по  $z$  среднеквадратичных пульсаций продольной скорости  $u'_m$  от числа Рейнольдса  $R = \sqrt{t}$  в двух таких решениях на нижней стенке, полученных при  $d = 0.5D$  и  $1D$  построены на фиг. 2. Эти решения характеризуются самым быстрым и медленным ростом возмущений среди всей совокупности десяти решений. Их различие демонстрирует чрезвычайно сильную зависимость результатов моделирования от выбора произвольного параметра – сдвига  $d$ . Расхождение кривых роста пульсаций начинается с самого начала и, следовательно, не объясняется только нелинейными эффектами. Этот вывод был проверен повторением всех расчетов в линейном приближении. Их результаты практически совпали с исходными нелинейными при  $u'_m < 0.03$ , а до амплитуды  $u'_m = 0.05$  влияние нелинейности хотя и заметно, но мало по сравнению с различием между решениями при разных  $d$ .



Фиг. 2. Зависимости пульсаций  $u'$  при  $\eta = 1.6$  и их максимума  $u'_m$  (а) и коэффициента перемежаемости  $\gamma$  (б) от  $R$  для турбулентности 2: 1, 2 –  $u'_m$  при  $d = 0.5D$  и  $1D$ ; 3, 5 –  $u'$  для нелинейного и линейного решений; 6, 7, 8 –  $u'_m$  для всего течения и его турбулентной и ламинарной частей; 4 –  $u'$  для турбулентности 1

Сильная зависимость решения от места расположения стенки объясняется малыми поперечными размерами (периодами) расчетной области, которые сравнимы с интегральным масштабом турбулентности. При этом характерный масштаб, на котором меняются характеристики течения, например средние только по  $x$  среднеквадратичные пульсации скорости, сравним с размером расчетной области. Попадание стенки в места относительно сильных или слабых пульсаций приводит к более быстрому или медленному росту возмущений в слое Стокса. В реальном бесконечном турбулентном течении на поверхности достаточно большой пластины области повышенной и пониженной интенсивности пульсаций чередуются хаотически и их набирается достаточно много, чтобы в результате осреднения по всей поверхности получить некоторую среднюю кривую нарастания. Вследствие однородности турбулентности эта осредненная кривая не зависит от места расположения стенки. Чтобы получить подобную картину в численном моделировании, нужно увеличить поперечные размеры области до величины много большей интегрального масштаба турбулентности. Однако такой подход неприемлем из-за очень большого объема вычислений. Статистически достоверное осредненное решение можно получить также осреднением достаточно большого количества решений, полученных в рассматриваемой малой расчетной области при разных значениях сдвига  $d$ . Решение для каждого  $d$  можно трактовать как фрагмент слоя Стокса на бесконечной пластине, ограниченный случайным образом расположенной рамкой размерами  $2L_x \times 2D$ . Дальнейшие результаты получены с помощью осреднения десяти



Фиг. 3. Профили осредненной скорости (а) и ее пульсаций (б): 1–7 –  $R = 250, 350, 450, 550, 650, 750, 850$ ; 8 – профиль (2.1)

полей течения на двух стенках канала, найденных при пяти вышеуказанных значениях сдвига  $d$ .

Зависимости среднеквадратичной амплитуды пульсаций  $u'$ , найденной при значении автоматической переменной  $\eta = z/t = 1.6$  от числа Рейнольдса для двух исходных состояний турбулентности, построены кривыми 3, 4 на фиг. 2. Выбранное расстояние от стенки примерно соответствует максимуму пульсаций скорости на линейном этапе развития возмущений (см. фиг. 3). Сравнение кривых нарастания показывает, что возмущения в сдвиговом слое, порожденные крупномасштабной турбулентностью, возрастают быстрее, чем аналогичные пульсации от мелкомасштабной турбулентности. На линейном этапе развития пульсаций различие составляет примерно 46%, оно статистически достоверно (разность превосходит  $2\sigma$ ), и не может быть объяснено большей амплитудой пульсаций поперечной скорости в крупномасштабном турбулентном течении 2. Разли-

чие среднеквадратичных поперечных пульсаций  $\epsilon_{\perp} = \sqrt{\epsilon_v^2 + \epsilon_w^2}$  для двух состояний турбулентности составляет только 27%. Смещение положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое плоской пластины, вызванного внешней турбулентностью, вверх по потоку при увеличении ее масштаба наблюдалось в эксперименте [16]. В данных [3] также отмечается некоторое увеличение амплитуды возмущений в пограничном слое при возрастании безразмерного масштаба турбулентности. Однако теория [15], основанная на концепции алгебраического роста, дает противоположную тенденцию.

Для перехода, вызванного крупномасштабной турбулентностью, на фиг. 2 также построены зависимости максимальных поперек слоя пульсаций  $u'_m$  и пульсаций скорости при  $\eta = 1.6$ , найденных в линейном приближении от числа Рейнольдса. Линейное и нелинейное решения совпадают только в начальной стадии развития возмущений до  $R = 400$ . Нелинейность начинает проявляться при неожиданно малой амплитуде пульсаций



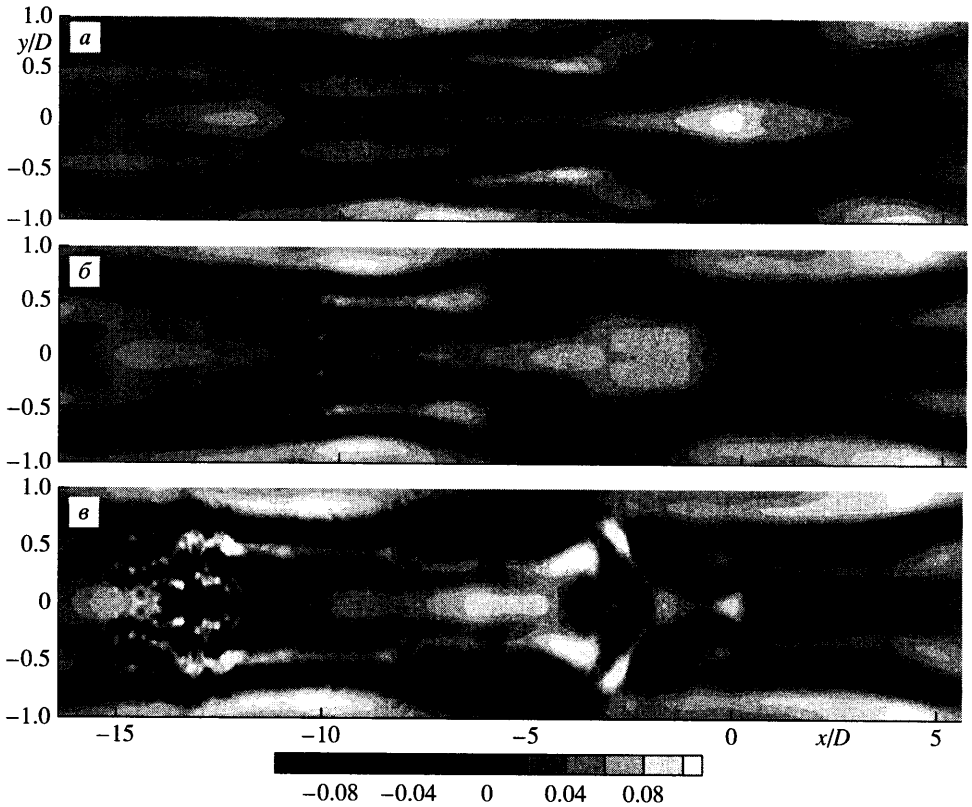
$u'_m \approx 0.03$  и сначала приводит к замедлению их роста. Такое слабонелинейное развитие возмущений продолжается до  $R = 600$ , после чего происходит очень быстрое их усиление. На линейном и слабонелинейном этапах развития возмущений профили средней скорости и ее пульсаций, построенные в зависимости от автомодельной переменной  $\eta$  на фиг. 3, остаются неизменными. Они хорошо совпадают с профилем скорости в ламинарном слое Стокса  $U_0 = \operatorname{erf}(\eta/\sqrt{2})$ . По аналогии с аналитическим решением [17] для вертикального распределения пульсаций в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока зависимость  $u'(\eta)$  в слое Стокса должна описываться простым соотношением

$$u' \sim \eta \frac{\partial U_0}{\partial \eta} \sim \eta e^{-\eta^2/2} \quad (2.1)$$

Эта зависимость, показанная кривой 8 на фиг 3, б, действительно похожа на профили пульсаций на начальной стадии перехода, однако соответствие не так хорошо как в пограничном слое. Максимум пульсаций расположен несколько выше, чем предсказывает теория (2.1). Отличие может быть обусловлено вкладом короткопериодических возмущений, максимум пульсаций в которых по данным [5, 11] сдвинут к верхней границе пограничного слоя. На нелинейной стадии перехода при  $R > 600$  у профилей пульсаций скорости появляется второй максимум, расположенный вблизи стенки. Быстрый рост амплитуды пульсаций происходит как раз в этом пристеночном максимуме.

О характере развития возмущений на нелинейной стадии перехода позволяют судить распределения пульсационной составляющей скорости в горизонтальной плоскости, показанные на фиг 4, а, б, в. Они получены на нижней стенке канала при  $d = 0.5$  и для удобства построены в неподвижной, а не в движущейся с каналом системе отсчета. В ней скорость движения возмущений относительно мала, и они смещаются примерно на расстояние  $10D$  влево при переходе от  $R = 700$  к 915. Это смещение необходимо учитывать при анализе эволюции течения. В начале при  $R = 700$  наблюдаются только вытянутые вдоль потока полосчатые структуры. В следующий момент времени, соответствующий  $R = 850$ , в задней части двух средних полос пониженной скорости (при  $x \sim -11$ ) развиваются вторичные высокочастотные короткопериодические возмущения, проявляющиеся в их искривлении. Они соответствуют антисимметричной или синусоидальной моде, описанной в [18, 19]. В соответствии с предсказанием теории [19] этот тип неустойчивости появляется в местах наибольших градиентов скорости по  $y$ . В конце, при  $R = 915$ , эта неустойчивость приводит к турбулизации течения при  $-15 < x < -12$ . Кроме того, короткопериодические возмущения с более детерминированной структурой появляются на месте полосы повышенной скорости, наблюдаемой в центре расчетной области в окрестности  $x = 0$  при  $R = 700$ . Между этими областями интенсивных высокочастотных пульсаций продолжают развиваться полосчатые структуры, которые остаются такими же, как на линейной стадии перехода.

Аналогичная картина развития возмущений имеет место для всех реализаций течения, соответствующих разным сдвигам  $d$  и верхней или нижней стенке. Сначала сильные пульсации возникают в одной или двух малых областях, расположенных в разных местах для каждой конкретной реализации. Затем эти области расширяются и постепенно занимают все поле течения. При этом амплитуда пульсаций скорости в турбулентных областях меняется слабо, а увеличение общей (осредненной по всей расчетной области) интенсивности пульсаций происходит за счет роста площади, занимаемой турбулентным течением. Такой же механизм турбулизации пограничного слоя наблюдается в эксперименте при умеренной степени турбулентности потока  $Tu \sim 0.5-1.5\%$ . При исследовании такого типа ламинарно-турбулентного перехода полезно условно разделить течение на ламинарную и турбулентную части. Течение в некоторой точке обычно счи-



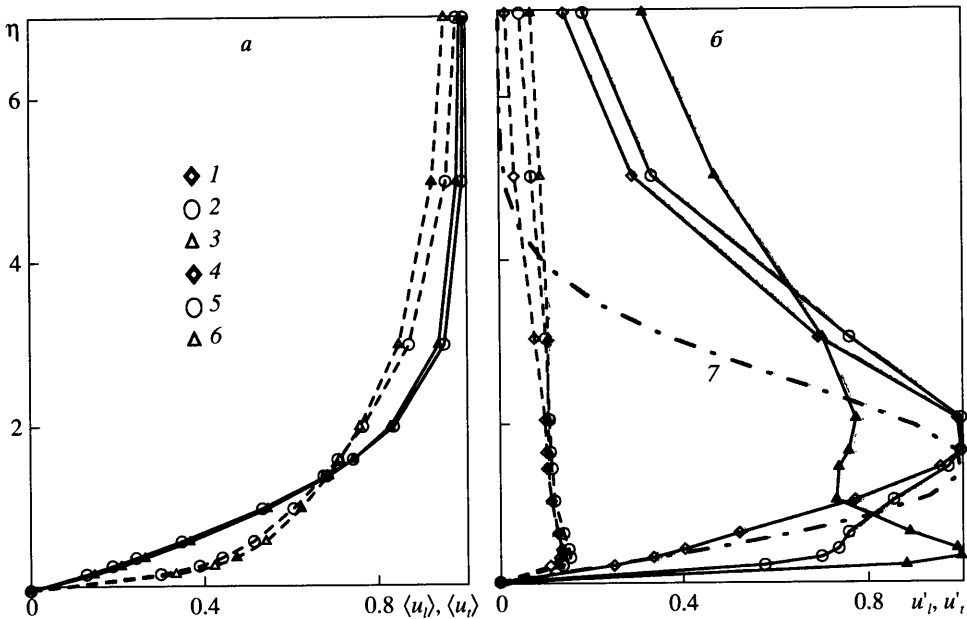
Фиг. 4. Пульсационная составляющая скорости  $u' = u - \langle u \rangle$  на нижней стенке канала при  $\eta = 1.6$  и  $d = 0.5 D$ : (а-в) —  $R = 700, 850, 915$

тают турбулентным, если среднеквадратичная амплитуда короткопериодических пульсаций в ней превышает пороговый уровень  $a_*$ . Границы областей ламинарного и турбулентного течения зависят от конкретного критерия выделения турбулентной части слоя.

В данной работе для этого применялся следующий алгоритм. В узлах равномерной прямоугольной сетки  $0 < x_i < L_x$ ;  $0 < y_j < D$ ;  $i = 1, \dots, 781$ ,  $j = 1, \dots, 24$  находились короткопериодические пульсации продольной скорости  $u_h(x_i, y_j)$  при  $\eta = 1$ . Они вычислялись по формулам (1.2) с исключенными гармониками с номерами  $m$ , меньшими порогового значения  $m_h$ . Выбранная сетка  $x_i, y_j$  соответствует узлам, в которых вычислялись наименьшие члены. Их число определялось правилом  $3/2$  и достаточно для разрешения наиболее мелких пульсаций. Амплитуда короткопериодических пульсаций  $a_h$  находилась с помощью осреднения  $u_h^2$  по нескольким узлам сетки

$$a_h(x_i, y_j) = \left[ \frac{1}{2M_h + 1} \sum_{k=i-M_h}^{i+M_h} u_h^2(x_k, y_j) \right]^{1/2}$$

Интервал осреднения  $\Delta x = x_{i+M_h} - x_{i-M_h}$  выбирался примерно равным периоду гармоники с пороговым номером  $m_h$ . Узлы сетки, где  $a_h$  превышала пороговое значение  $a_*$ ,

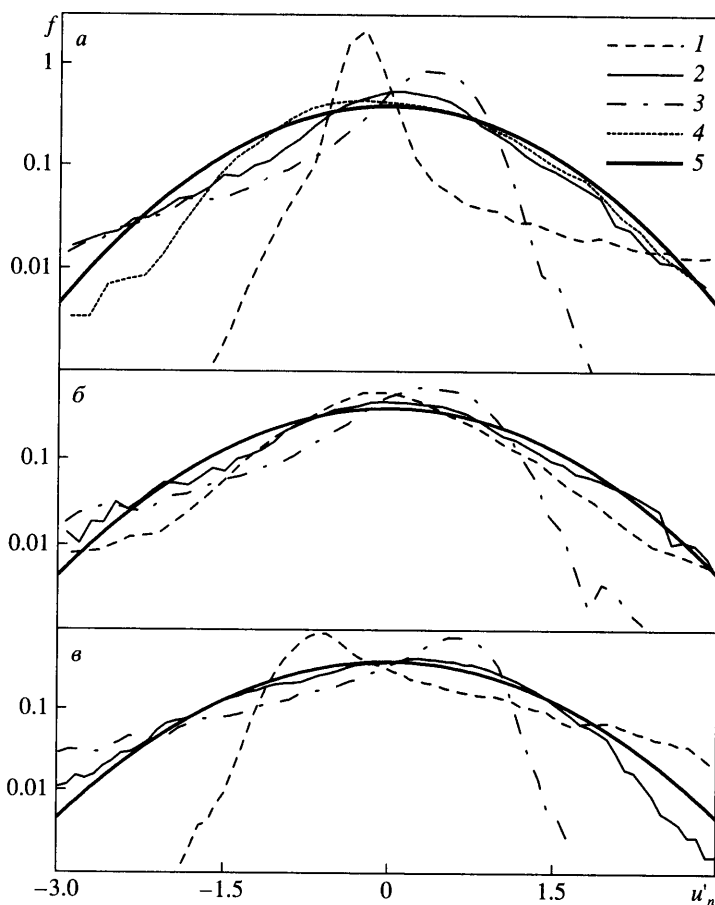


Фиг. 5. То же, что на фиг. 3 (1–3) – в ламинарной части слоя Стокса при  $R = 650, 750, 850$ ; (4–6) – в турбулентной его части при тех же  $R$

относились к области турбулентного течения, а остальные – к ламинарной области. Коэффициент перемежаемости  $\gamma$  определялся отношением количества узлов в турбулентной области к общему их числу. Методические расчеты показали, что коэффициент перемежаемости достаточно сильно зависит от параметров изложенного алгоритма, особенно от пороговых значений амплитуды  $a_*$  и номера гармоники  $m_h$ , поэтому трудно предложить рациональный способ их задания. В результате были выбраны значения параметров  $a_* = 0.04$ ,  $m_h = 20$ ,  $M_h = 8$ , при которых граница турбулентной области наилучшим образом соответствовала субъективным оценкам, полученным визуальным анализом изолиний пульсаций скорости.

Найденные с помощью описанного алгоритма зависимости коэффициента перемежаемости и амплитуд пульсаций скорости в ламинарной и турбулентной областях от  $R$  для начальных условий, соответствующих крупномасштабной турбулентности, построены на фиг. 2. Они показывают, что в ламинарной области рост возмущений скорости продолжает замедляться по сравнению с линейным расчетом еще долго после появления турбулентных пятен. В турбулентной части максимальная амплитуда пульсаций очень быстро возрастает до уровня  $\sim 0.12$ , после чего меняется слабо. Максимальная амплитуда пульсаций, осредненная по всему течению, всегда растет значительно быстрее, чем их амплитуда в турбулентной области, что объясняется быстрым расширением последней, заметным по кривой  $\chi(R)$ .

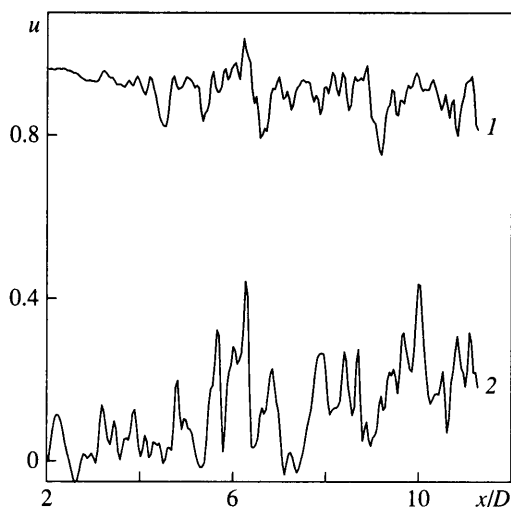
Профили средней скорости и ее пульсаций в ламинарной и турбулентной частях слоя Стокса на заключительной стадии перехода показаны на фиг. 5. Пульсации в ламинарной части слоя нормированы на свой максимум, а в турбулентной – оставлены без изменений. Фигура 5 демонстрирует, что в ламинарной и турбулентной областях формируются два относительно универсальных режима течения. Течение в ламинарной части слоя повторяет его структуру на предыдущей линейной стадии перехода. Некоторое отличие появляется только в профилях пульсаций при очень больших  $R > 800$ , у которых



Фиг. 6. Функции распределения отклонений скорости от среднего значения при  $R = 650$  для всего течения (а), ламинарной (б) и турбулентной (в) областей: 1–4 –  $\eta = 0.2, 1.6, 3, 11$ ; 5 – нормальное распределение

все-таки развивается пристеночный максимум. Профили средней скорости и пульсаций в турбулентной части течения также ложатся на одну кривую. Они подобны аналогичным профилям в развитом турбулентном пограничном слое. Внутри пристеночного слоя совпадение профилей для разных  $R$  лучше и несколько ухудшается по мере удаления от стенки. Различие характеристик на внешней границе слоя объясняется начинающимся при  $R > 750$  слиянием нижнего и верхнего слоев Стокса. Отметим, что суммарный профиль пульсаций скорости на заключительной стадии перехода с острым максимумом у стенки не может быть получен с помощью простого сложения профилей пульсаций в ламинарной и турбулентной частях с любыми весами. Существенный вклад в образование этого максимума вносят низкочастотные пульсации, связанные с изменением среднего профиля скорости от ламинарного к турбулентному состоянию. Максимальное различие этих профилей наблюдается как раз вблизи стенки.

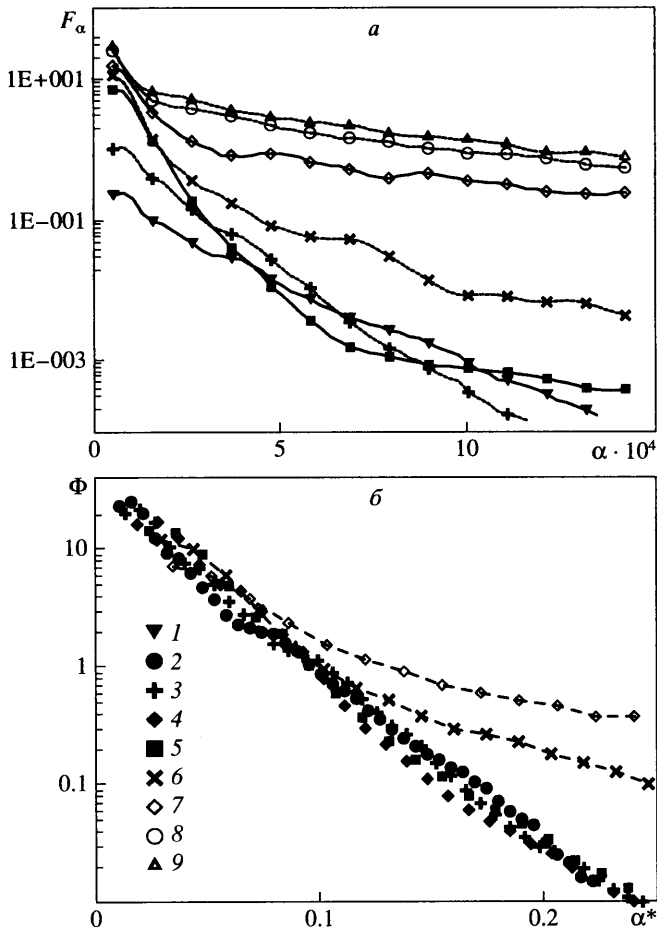
О роли нелинейности в развитии пульсаций можно судить по форме функции распределения отклонения скорости от ее среднего значения. Ее зависимости от нормированной величины отклонения  $u'_n = (u - \langle u \rangle) / u'$  для трех характерных расстояний от стенки



Фиг. 7. Зависимости  $u(x)$  в турбулентной части слоя Стокса при  $R = 800$  : 1, 2 –  $\eta = 3$  и  $0.2$

при  $R = 650$  построены на фиг. 6. Во внешнем турбулентном течении вдали от стенки при  $\eta = 11$  функция распределения пульсаций практически не отличается от нормального закона. Над максимумом пульсаций при  $\eta = 3$  максимум их функции распределения смещен в сторону положительных отклонений, однако очень большие отрицательные отклонения встречаются чаще, чем такие же положительные. Максимум функции распределения при этом более вдвое больше, чем у нормального распределения. Это означает, что большую часть времени величина скорости находится вблизи наиболее вероятного значения, превышающего  $\langle u \rangle$ , и только на короткие промежутки времени сильно отклоняется от него в сторону уменьшения. Вблизи стенки наблюдается обратная закономерность. В районе максимума пульсаций их функция распределения минимально отличается от нормального закона. Характер функций распределения пульсаций в ламинарной и турбулентной частях слоя Стокса остается таким же, однако в ламинарной части отклонения от нормального закона слабее, чем в турбулентной. Сделанные выводы о несимметричном характере пульсаций иллюстрируют приведенные на фиг. 7 зависимости скорости от  $x$  при  $\eta = 0.2$  и  $3$  в одной из реализаций в турбулентной части слоя при  $R = 800$ . Внизу слоя эта зависимость имеет узкие максимумы а сверху – минимумы. Подобную форму имели измеренные в [20] осциллограммы скорости на нелинейной стадии перехода, вызванного волнами Толлмина – Шлихтинга, только их максимумы и минимумы расположены регулярно. По-видимому, такой характер пульсаций – общее свойство нелинейного развития вихревых возмущений в пристеночных течениях.

Спектры пульсаций продольной компоненты скорости по продольному и поперечному волновым числам, полученные при различных значениях  $R$  для  $\eta = 1.6$ , показаны на фиг. 8, а и 9 соответственно. На линейной стадии перехода преимущественно усиливаются возмущения с большим продольным периодом, соответствующие низкочастотным пульсациям в пространственном пограничном слое. Короткопериодические или высокочастотные возмущения, наоборот, затухают. В результате в начальный период времени происходит сужение спектра пульсаций по  $\alpha$ . Затем при  $R > 600$  усиление длиннопериодических пульсаций несколько замедляется и происходит бурный рост мелкомасштабных возмущений. Спектр по  $\alpha$  опять расширяется и в конце перехода становится почти равномерным. Такое же поведение частотных спектров пульсаций в пограничном



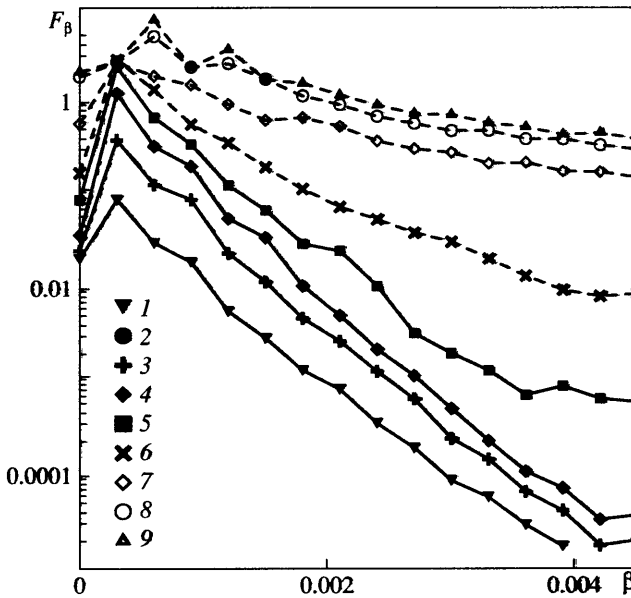
Фиг. 8. Спектры пульсаций скорости в слое Стокса по продольному волновому числу (а); преобразованные по (2.2) спектры (б): 1–9  $R = 150, 200, 250, 350, 450, 550, 650, 750, 850$

слое отмечалось в экспериментах [2–4]. В [4] показано, что продольные спектры, измеренные на разных расстояниях от передней кромки, ложатся на одну кривую, если их отнести к  $u^2 \sqrt{x}$  и построить в зависимости от волнового числа  $\alpha^* = \alpha \delta^*$ , нормированного на толщину пограничного слоя  $\delta^*$ . В случае временного развития возмущений это значит, что преобразованная спектральная плотность

$$\Phi(\alpha^*) = (u^2 R)^{-1} F[u^2](\alpha^*/R, R), \quad \alpha^* = \alpha R \quad (2.2)$$

должна быть универсальной функцией, не зависящей от числа Рейнольдса. Такие преобразованные спектры построены на фиг. 8, б. На линейном этапе ламинарно-турбулентного перехода (до  $R = 550$ ) они действительно хорошо совпадают между собой.

Изменение спектров по поперечному волновому числу в начальный период развития возмущений сводится к их сдвигу по оси ординат пропорционально квадрату амплитуды пульсаций. Это также соответствует выводам [4]. При нелинейном развитии возмущений поперечные спектры сначала расширяются, а затем максимум энергии пульсаций



Фиг. 9. То же, что на фиг. 8 по поперечному волновому числу

смещается к большим  $\beta$ . Уменьшение поперечного масштаба полосчатых структур на нелинейной стадии их развития отмечено в экспериментах [4, 21].

Спектры пульсаций скорости в пограничном слое определяются двумя факторами: спектром турбулентных пульсаций в набегающем потоке и избирательным усилением возмущений в пограничном слое. По мере удаления от передней кромки роль избирательного усиления возрастает и в пределе при  $R \rightarrow \infty$  влиянием свойств турбулентности внешнего потока можно пренебречь. Тогда спектр пульсаций в пограничном слое должен определяться относительными коэффициентами усиления в нем возмущений с заданными волновыми числами. Из свойств рассмотренных в [6] оптимальных возмущений, энергия которых максимально нарастает в пограничном слое, следует, что ширина продольного спектра должна быть пропорциональна  $1/R^2$ , а поперечного  $1/R$ . Аналогичный вывод получен для колмогоровского спектра турбулентности при конечных  $R$  в [10]. Однако он явно противоречит данным эксперимента [4] и результатам численного моделирования. Это несоответствие, вероятно, обусловлено неправильным представлением о виде спектра турбулентности набегающего потока в наиболее важном для порождения полосчатых структур диапазоне волновых чисел. Если продольные размеры пульсаций, их порождающих, достаточно велики, и их волновые числа попадают в инерционный интервал, то поперечные волновые числа наиболее усиливающихся возмущений в условиях расчета и эксперимента [3, 4] лежат в вязком диапазоне. Избирательности усиления по поперечным волновым числам в пограничном слое оказывается недостаточно, чтобы преодолеть экспоненциальное затухание спектра в вязком диапазоне  $\beta$ . В результате поперечный спектр пульсаций в пограничном слое получается универсальным и определяется исключительно характеристиками внешней турбулентности. При этом более заметную роль, чем предсказывает теория [6–10], начинают играть вихри с большими по сравнению с толщиной слоя поперечными размерами. Усиление порождаемых ими возмущений менее избирательно по продольному масштабу, что и объясняет относительно слабое сужение спектров по  $\alpha$  в расчете и эксперименте.

**Заключение.** Методом прямого численного моделирования найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в слое Стокса на пластине, внезапно приведенной в движение. Рассмотренная задача моделирует ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком с повышенной степенью турбулентности, причем время с начала движения  $t$  играет роль продольной координаты. Показано, что возмущения в слое Стокса сначала растут пропорционально  $\sqrt{t}$  или числу Рейнольдса, вычисленному по толщине слоя и скорости движения. Они имеют вид удлиненных в направлении движения полосчатых структур. Когда амплитуда пульсаций достигает примерно 4% от скорости движения, их рост ускоряется и происходит быстрая турбулизация слоя Стокса за счет появления и последующего расширения локальных областей турбулентного течения аналогичных турбулентным пятнам в пограничном слое. Полосчатые структуры между пятнами продолжают развиваться так же, как и ранее. Продольные спектры пульсаций на линейной стадии ламинарно-турбулентного перехода становятся универсальными, если в качестве независимой переменной использовать волновое число, умноженное на толщину слоя. Поперечные спектры остаются неизменными с точностью до нормировки на энергию пульсаций. Рост возмущений в слое Стокса усиливается при увеличении масштаба турбулентности. Эти свойства численного решения соответствуют данным эксперимента. Кроме того, найдено, что на нелинейной стадии перехода функции распределения пульсаций скорости в слое Стокса существенно отличаются от нормального закона, характерного для пульсаций во внешнем турбулентном течении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 04-01-00632, 05-08-50239 и 05-01-08042 оф-п).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morkovin M.V.* The many faces of transition // *Viscous Drag Reduction* / Ed. by C.S. Wells. N.Y.: Plenum Press, 1969. P. 1–30.
2. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р., Минеев Б.И., Секундов А.Н.* Взаимодействие ламинарного пограничного слоя с внешней турбулентностью // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1989. № 5. С. 55–65.
3. *Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H.* Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.
4. *Matsubara M., Alfredsson P.H.* Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 430. P. 149–168.
5. *Bertolotti F.P.* Response of the Blasius boundary layer to free-stream vorticity // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. № 8. P. 2286–2299.
6. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
7. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.
8. *Leib S.J., Wundrow D.W., Goldstein M.E.* Effects of free-stream turbulence and other vortical disturbances on a laminar boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 380. P. 169–203.
9. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока // *Изв. РАН. МЖГ*. 2003. № 3. С. 56–68.
10. *Wundrow D.W., Goldstein M.E.* Effect on a laminar boundary layer of small-amplitude streamwise vorticity in the upstream flow // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 426. P. 229–262.
11. *Устинов М.В.* Численное моделирование развития полосчатой структуры в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // *Изв. РАН МЖГ*. 2004. № 2. С. 103–119.
12. *Rozhdestvensky B.L., Simakin I. N.* Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 147. P. 261–289.



13. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р. Проникновение трехмерных низкочастотных пульсаций скорости внешнего потока в ламинарный пограничный слой на плоской пластине // Проблемы турбулентных течений: Тр. ЦИАМ № 1287. 1991. С. 197–236.
14. Рождественский Б.Л., Стойнов М.И. Алгоритмы интегрирования уравнений Навье–Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. Препринт № 119. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1987. 28 с.
15. Устинов М.В. Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 46–53.
16. Jones P., Mazur O., Uribe V. On the receptivity of the by-pass transition to the length scale of the outer stream turbulence // Eur. J. Mech. B-Fluids. 2000. V. 19. № 5. P. 707–722.
17. Crow S.C. The spanwise perturbations of two-dimensional boundary layers // J Fluid Mech. 1965. V. 24. Pt 1. P. 153–164.
18. Fisher T.M., Hein S., Dallmann U. A theoretical approach for describing the secondary instability features in the three-dimensional boundary layer flows // AIAA paper № 93-0080, 1993.
19. Bakchinov A.A., Grek G.R., Klingmann B.G.B., Kozlov V.V. Transition experiments in a boundary layer with embedded streamwise vortices // Phys. Fluids. 1995. V. 7 № 4. P. 820–832.
20. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я., Рамазанов М.П. Природа К-разрушения ламинарного пограничного слоя Ч. 1 // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1989. Вып. 2. С. 124–158.
21. Бакчинов А.А., Грек Г.Р., Катасонов М.М., Козлов В.В. Экспериментальное исследование взаимодействия продольных “полосчатых” структур с высокочастотным возмущением // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 39–49.

Москва

E-mail: [ustinov@stb.aerocentr.msk.su](mailto:ustinov@stb.aerocentr.msk.su)

Поступила в редакцию

2. II. 2006