

УДК 532.517.013.4:537.2

© 2006 г. А.А. ШУТОВ

## ФОРМОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В приближении сильного поля определена форма заряженной струи. В линейном приближении исследована ее устойчивость относительно как осе-, так и неосесимметричных возмущений синусоидального типа. Определены области доминирования осесимметричной, изгибной мод и моды продольного деления. Приведены экспериментальные данные по продольному делению полимерной струи на несколько дочерних струй.

*Ключевые слова:* форма струи, устойчивость, области доминирования, продольное деление струи, электропрядение.

Под действием электрического поля слабопроводящая жидкость, вытекающая из капилляра, вытягивается в тонкую струйку. На фиг. 1 приведены фрагменты профиля струи на разных расстояниях от точки истечения. Тонкая струйка выходит из вершины полуклапни и далее граница струи слабо спадает по продольной координате. В точке истечения поперечник струи совпадает с диаметром капилляра 1 мм, последующие снимки сделаны через 2 см. В качестве рабочей жидкости использовался 14%-ный раствор полистирола в дихлорэтане с плотностью  $\rho = 1.25 \text{ г/см}^3$ , диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 10$ , проводимостью  $\lambda = 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . Напряженность поля составляла  $E = 5.6 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ , объемный расход жидкости через капилляр равнялся  $Q = 8.3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^3/\text{с}$ , струя переносила электрический ток  $I = 7.2 \cdot 10^{-8} \text{ А}$ . На расстоянии 4 см от капилляра диаметр струи равнялся 26 мкм.

Применительно к истечению полимерных жидкостей этот процесс получил название электропрядение, который используется для получения ультратонких волокон диаметром вплоть до нанодиапазона [1]. Экспериментальное изучение влияния различных электрофизических параметров на радиус струи проводилось в [2–4]. Обнаружено, что наибольшее влияние на процесс формирования оказывают проводимость жидкости, напряженность внешнего электрического поля и расход, с которым жидкость подается через капилляр. Влияние неньютоновости жидкости на процесс изучалось в [5].

Эти течения обладают большим разнообразием свойств устойчивости при различных параметрах жидкости. Плохопроводящие жидкости неустойчивы относительно длинноволновых осесимметричных возмущений при одновременном подавлении коротковолновых неустойчивостей [6]. Если не использовать специальные методы накачки заряда в жидкость, то изолирующие жидкости струй вовсе не образуют [7]. Хорошо проводящие маловязкие жидкости неустойчивы относительно коротковолновых возмущений и в сильных полях образуют короткие струйки, быстро распадающиеся на отдельные капли. Это свойство широко используется в процессе электрораспыления для создания тонкодисперсных аэрозолей.

При промежуточных проводимостях струя может обладать чрезвычайной устойчивостью, длина ее сплошной части достигает метрового диапазона (весь межэлектродный промежуток) при характерном диаметре 1 мкм. Подобное поведение микроструй стимулирует поиск условий абсолютной устойчивости таких течений [8, 9].



Фиг. 1. Фотографии фрагментов струи на разных расстояниях от капилляра диаметром 1 мм

Влияние электрических сил на устойчивость электрогидродинамической струи относительно осесимметричных капиллярных возмущений исследовалось в [10–13] как в линейном приближении, так и на нелинейной стадии развития неустойчивости.

Экспериментальное исследование условий возбуждения первой неосесимметричной моды (изгибной моды) проведено в [14, 15], где показано, что эти возмущения также приводят к распаду струи на отдельные капли. Для идеально проводящей жидкости в [12, 13] найдены условия доминирования изгибных неустойчивостей спирального типа. При этом показано, что высшие неосесимметричные возмущения не могут приводить к дестабилизации струи.

Статическая задача о форме поперечного сечения идеально проводящего заряженного цилиндра решена в [16] и найдены условия продольного деления цилиндра. В работе [17] рассмотрена задача устойчивости, в которой определены условия дестабилизации струи относительно высших неосесимметричных возмущений спирального типа, которые вызывают продольное расщепление исходной струи на две и более дочерних струй. Здесь рассмотрена постановка, приводящая к задаче устойчивости по неосесимметричным возмущениям синусоидального типа.

**1. Зарядка струи.** Задача о движении жидкости со свободной границей имеет две особенности. Во-первых, поверхность раздела заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Во-вторых, заранее неизвестна и поверхностная плотность заряда, которую также необходимо определять при решении задачи. Постановка такой задачи включает два соотношения на поверхности раздела: уравнение непроницаемости и уравнение поверхностного заряда.

Зарядовое уравнение для поверхностной плотности  $\sigma$  имеет вид [18–20]

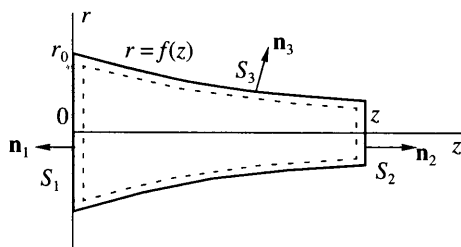
$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma \sqrt{g_0} + \frac{\partial}{\partial q_1} \sigma v_1 \sqrt{g_{11}} + \frac{\partial}{\partial q_2} \sigma v_2 \sqrt{g_{22}} + \sqrt{g_0} (\lambda_e E_{ne} - \lambda_i E_{ni}) = 0$$

где  $g_{11}$  и  $g_{22}$  – коэффициенты индуцированной метрики поверхности раздела в координатах  $q_1, q_2$ , образующих на поверхности ортогональную сеть,  $g_0 = g_{11} \cdot g_{22}$ ,  $v_1$  и  $v_2$  – скорости жидкости на границе в направлениях  $q_1$  и  $q_2$ ,  $\lambda$  – проводимость,  $E_n$  – нормальная компонента напряженности электрического поля на поверхности раздела, индексы  $i$  и  $e$  относятся к жидкостям внутри и вне поверхности раздела соответственно.

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ , в которой поверхность струи в произвольный момент времени  $t$  описывается уравнением  $r = f(z, \theta, t)$ . Рассмотрим движения, при которых поверхность слабо отклоняется от осевой симметрии, т.е.  $f'_\theta / f \ll 1$ , где штрих обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Тогда граница жидкости приближенно является координатной поверхностью и, полагая  $q_1 = z, q_2 = \theta$ , находим

$$g_{11} = f^2, \quad g_{22} = 1 + f'^2_z$$



Фиг. 2. Контур струи, ограниченный координатой  $z$ . Интегрирование проводится по поверхности внутри жидкости, показанной пунктиром

а уравнение заряда приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma f \sqrt{1 + f_z'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma u f + \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma w \sqrt{1 + f_z'^2} - \lambda E_{ni} f \sqrt{1 + f_z'^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $u$  и  $w$  – скорости жидкости на поверхности в направлении  $z$  и  $\theta$  соответственно,  $\lambda = \lambda_r$ , вне струи среда имеет нулевые параметры.

Рассмотрим движение в однородном поле  $\mathbf{E}_0$ , параллельном оси  $z$ . Тогда стационарное, осесимметричное уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma u f - \lambda E_{ni} f \sqrt{1 + f_z'^2} = 0 \quad (1.2)$$

Положим, что внутри жидкости заряд переносится омическим образом, т.е. объемный заряд отсутствует и

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока. Проинтегрируем (1.3) по поверхности  $S$  струи, ограниченной по оси  $z$  координатами  $z = 0$  и  $z$  (фиг. 2).

Поскольку объемный заряд в жидкости отсутствует, то

$$\oint_S \lambda \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} = 0$$

Отсюда находим

$$\int_{S_1} \lambda \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \int_{S_2} \lambda \mathbf{E} d\mathbf{S} - \int_{S_3} \lambda \mathbf{E} d\mathbf{S} \quad (1.4)$$

Выберем за положительное направление нормали  $n_2$ . Тогда из (1.4) получаем

$$2\pi \int_0^{r_0} \lambda E_{zi}(r, z=0) r dr = 2\pi \int_0^{f(z)} \lambda E_{zi}(r, z) r dr + 2\pi \int_0^z \lambda E_{ni} f \sqrt{1 + f_z'^2} dz \quad (1.5)$$

Обозначим  $I$  – электрический ток, переносимый струей (ток, переносимый через сечение  $z = 0$ ):

$$I = 2\pi \int_0^{r_0} \lambda E_{zi}(r, z=0) r dr$$

Это сохраняющаяся величина, и для нее, используя (1.2) и (1.5), можем записать

$$I = 2\pi \int_0^{f(z)} \lambda E_{zi}(r, z) r dr + 2\pi \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} (\sigma u f) dz =$$

$$= 2\pi \int_0^{f(z)} \lambda E_{zi}(r, z) r dr + 2\pi \sigma u f - 2\pi \sigma u f|_{z=0}$$
(1.6)

Поскольку при  $z = 0$  на стенке жидкость неподвижна, то последнее слагаемое в (1.6) равно нулю и

$$I = 2\pi \sigma u f + 2\pi \lambda \int_0^{f(z)} E_{zi}(r, z) r dr$$

Согласно экспериментальным данным [2, 4, 21, 22] радиус струи стремится к нулю с ростом продольной координаты. Положим, что напряженность поля внутри струи ограничена. Тогда вклад второго слагаемого мал и ток равен

$$I = 2\pi \sigma u f$$
(1.7)

Соотношение (1.7) позволяет сделать два вывода. Поверхность жидкости в процессе движения униполярно заряжается. Кроме того, из (1.7) видно, что на больших расстояниях от точки истечения ток переносится конвективным образом, и соотношение (1.7) описывает известный в электрогидродинамике эффект вмораживания заряда, в данном случае в границу раздела.

В стационарных осесимметричных условиях интегрирование уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v = 0$$

по объему между близкими сечениями  $z_1$  и  $z_2$  дает

$$\bar{u} \pi f^2 = Q, \quad \bar{u} = \frac{2}{f^2} \int_0^{f(z)} u r dr$$
(1.8)

где  $Q$  – объемный расход жидкости через произвольное сечение.

**2. Постановка задачи.** Электрогидродинамическая постановка задачи о движении жидкости вдали от точки истечения включает уравнения гидродинамики и электростатики для потенциала  $\phi$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V}, \quad \text{div} \mathbf{V} = 0, \quad \Delta \phi = 0$$

Плотность и вязкость жидкости есть  $\rho$  и  $\mu$ ,  $p$  – давление,  $\mathbf{V}$  – скорость. На поверхности раздела  $r = f$  эта система дополняется уравнениями непроницаемости, переноса вмороженного поверхностного заряда и динамическими условиями

$$v = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{w}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$
(2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma f + \frac{\partial}{\partial z} \sigma u f + \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma w = 0$$
(2.2)

$$\begin{aligned}
 & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - 2\mu f'_z \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = \\
 & = -T \left( \frac{1}{f} - f''_{zz} - \frac{1}{f^2} f''_{\theta\theta} \right) + F_n^e
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\mu f'_z \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = F_z^e \tag{2.4}$$

$$\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) + 2\mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) - \mu f'_z \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = F_\theta^e \tag{2.5}$$

где  $v$  – радиальная скорость. В граничных условиях для натяжений учтены капиллярные и электрические силы и опущены квадраты производных от функции  $f$ . Здесь  $T$  – поверхностное натяжение, а вектор электрического натяжения  $\mathbf{F}^e$  с компонентами  $F_n^e$ ,  $F_z^e$ ,  $F_\theta^e$  равен [23]

$$\mathbf{F}^e = D_{ne} \mathbf{E}_e - D_{ni} \mathbf{E}_i - \frac{D_e E_e - D_i E_i}{2} \mathbf{n} \tag{2.6}$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности,  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$  – вектор электрической индукции,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная. Для электростатической задачи ставятся стандартные условия непрерывности потенциала и скачка электрической индукции

$$r = f: \varphi_e = \varphi_i, \quad D_{ne} - D_{ni} = \sigma$$

Результирующее электрическое поле – суперпозиция внешнего однородного поля и поля поверхностных замороженных зарядов. Последний вклад представим полем заряженного цилиндра радиуса  $r = f$

$$\varphi_i = -E_0 z, \quad \varphi_e = -E_0 z - \frac{\sigma f}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{f}$$

В этом случае электрические натяжения равны

$$F_n^e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} + \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)E_0^2}{2}, \quad F_z^e = \sigma E_0, \quad F_\theta^e = 0 \tag{2.7}$$

Приведем уравнения к безразмерному виду, используя константы  $r_0$ ,  $\rho$ ,  $Q$ ,  $I$ ,  $E_0$  следующим образом:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r_0}, \quad \bar{f} = \frac{f}{r_0}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V} \pi r_0^2}{Q}, \quad \bar{p} = \frac{\rho \pi^2 r_0^4}{\rho Q^2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma 2Q}{I r_0} \tag{2.8}$$

Знак с чертой обозначает безразмерную величину. Тогда уравнения (2.1)–(2.5) приобретают вид

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \nabla \bar{\mathbf{V}} = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{V}} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \tag{2.10}$$

$$v = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{w}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma f + \frac{\partial}{\partial z} \sigma u f + \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma w = 0 \quad (2.12)$$

Поскольку предполагается, что профиль слабоспадающий, то в граничных условиях опущена производная  $f'_z$

$$\begin{aligned} -p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = \\ = -\frac{1}{\text{We}} \left( \frac{1}{f} - f''_{zz} - \frac{1}{f^2} f''_{\theta\theta} \right) + \beta \frac{\sigma^2}{2} + \gamma \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\sigma}{4s}$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) = 0$$

Во всех соотношениях (2.9)–(2.13) знаки черты у безразмерных переменных опущены и введены следующие характерные числа:

$$\text{Re} = \frac{\rho Q}{\pi r_0 \mu}, \quad \text{We} = \frac{\rho Q^2}{\pi r_0^3 T}, \quad s = \frac{\rho Q^3}{2\pi^2 I E_0 r_0^5}$$

$$\beta = \frac{\pi^2 r_0^6 I^2}{4\epsilon_0 \rho Q^4}, \quad \gamma = \frac{\pi^2 r_0^4 \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_0^2}{2\rho Q^2}$$

Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  определяют значимость сил взаимного отталкивания зарядов и поляризационных взаимодействий,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $\text{We}$  – число Вебера,  $s$  – характеризует величину сдвиговых электрических натяжений.

**3. Приближение сильного поля.** Доминирующий параметр здесь – число  $s$ , и экспериментальные данные показывают, что скорости и радиус струи степенным образом зависят от  $s$  [4, 21, 22]. Выполним следующее масштабное преобразование переменных в (2.9)–(2.13):

$$z = z_*, \quad u = s^{\alpha_1} u_*, \quad v = s^{\alpha_2} v_*, \quad w = s^{\alpha_2} w_*, \quad r = s^{\alpha_3} r_*$$

$$f = s^{\alpha_3} f_*, \quad t = s^{\alpha_4} t_*, \quad \sigma = s^{\alpha_5} \sigma_*, \quad p = s^{\alpha_6} p_*$$

таким образом, чтобы законы сохранения заряда (2.12), массы (2.10), уравнение непроницаемости (2.11) не изменили своего вида в результате такого преобразования, а в  $z$  составляющей уравнения движения (2.9) вязкостное и инерционное слагаемые имели одинаковый порядок по  $s$ . Кроме того, условия преобразования должны выполняться в частном случае осесимметричного стационарного движения, для которого  $\alpha_1 = -1/2$ ,  $\alpha_2 = -1/4$ ,  $\alpha_3 = 1/4$ ,  $\alpha_6 = -1/2$  [24]. Подстановка масштабных переменных в (2.10)–(2.12) и сравнение показателей степени  $s$  при слагаемых одного порядка дает  $\alpha_4 = 1/2$ ,  $\alpha_5 = 1/4$ .

Эта подстановка позволяет выделить главные слагаемые по малому параметру  $s$ , а уравнения и граничные условия приобретают вид

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla u \right) = \mu \Delta_2 u \quad (3.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla v - \frac{w^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \Delta_2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla w - \frac{vw}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \Delta_2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

$$\Delta_2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \mathbf{V} \nabla \Phi = u \frac{\partial \Phi}{\partial z} + v \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - 2\mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) = -T \left( \frac{1}{f} - f''_{zz} - \frac{1}{f^2} f''_{\theta\theta} \right) + F'_n$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = F'_z \quad (3.5)$$

$$\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) + 2\mu \frac{f'_\theta}{f} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) = F'_\theta \quad (3.6)$$

**4. Стационарное осесимметричное решение.** В приближении сильного однородного поля постановка имеет вид [24]

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v}{\partial r} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v = 0 \quad (4.3)$$

$$v = u \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.4)$$

$$r = f(z): I = 2\pi\sigma u f, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \sigma E_0 \quad (4.5)$$

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} = -T \left( \frac{1}{f} - f''_{zz} - \frac{1}{f^2} f''_{\theta\theta} \right) + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0^2}{2} \quad (4.6)$$

$$r = 0: v = 0$$

В постановке использованы уравнения (3.1)–(3.5) с электрическими натяжениями (2.7) в однородном поле и зарядовое соотношение (1.7). Система (4.1)–(4.6) является расщепляющейся по переменным  $\mathbf{V}$ ,  $f$ ,  $p$ : соотношения (4.1), (4.3)–(4.5) позволяют от-

дельно решить скоростную задачу и затем из (4.2), (4.6) определить давление. Рассмотрим скоростную задачу. Полагая, что на слабоспадающем профиле средняя скорость близка к значению продольной скорости жидкости на границе  $\bar{u} \approx u(f(z), z)$ , находим из (1.8), (4.5)  $\sigma = If/2Q$ .

Введем функцию тока  $\psi$ , определяемую соотношениями  $u = \partial\psi/r\partial r$ ,  $v = -\partial\psi/r\partial z$ . Тогда в безразмерных переменных (2.8) получаем следующую задачу:

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (4.7)$$

$$r = f: \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Re}{4s} f \quad (4.8)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \quad (4.9)$$

$$r = 0: v = 0 \quad (4.10)$$

Условие (4.9) эквивалентно уравнению непроницаемости (4.4), обезразмеривающий функцию тока множитель есть  $\pi/Q$ . Решение задачи ищем в виде  $\psi(r, z) = z\Psi(\zeta)$ , где  $\zeta = r^2/\sqrt{z}$ . Тогда (4.7) приобретает вид

$$\frac{4}{Re} (\zeta\Psi''')' + 2\Psi\Psi'' - \Psi'^2 = 0$$

Решение этого уравнения с условиями (4.8), (4.10) есть

$$\Psi(\zeta) = b_1\zeta + b_2\zeta^2, \quad b_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}}, \quad b_2 = \frac{Re}{32s}$$

Радиус струи и скорости равны соответственно

$$f(z) = \sqrt{\frac{8\sqrt{z}s}{Re}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{Re}{4z}} - 1}, \quad u = \sqrt{\frac{z}{s} + \frac{Re}{8s}} r^2, \quad v = -\frac{r}{4\sqrt{z}s} \quad (4.11)$$

В асимптотической области  $z \gg 1$  радиус и продольная скорость равны  $f(z) = (s/z)^{1/4}$ ,  $u(z) = (z/s)^{1/2}$ . При параметрах струи, профиль которой приведен на фиг. 1, расчетное значение радиуса составляет 12.2 мкм, согласующееся с опытным значением 13 мкм в пределах 10% экспериментальной погрешности. Экспериментальные данные по зависимости радиуса струи от продольной координаты приведены также в [21, 22].

**5. Линейная устойчивость струйного течения.** В качестве невозмущенного состояния выберем жидкий цилиндр постоянного радиуса  $r_0$ . Такое приближение справедливо для участков струи, длина которых меньше характерной длины спадания радиуса.

Согласно (4.11) форма струи медленно спадает в зависимости от координаты, и чем дальше от начала координат, тем больше характерная длина уменьшения радиуса. В соответствии с (4.11) такой цилиндр имеет постоянную продольную скорость. Поскольку в линейной теории устойчивости постоянная начальная скорость не влияет на вид дисперсионного соотношения [25], то вклад постоянной скорости не учитывается.

Начальное состояние характеризуется следующими значениями скоростей, давления и потенциала:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad p_0 = \frac{T}{r_0} - \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0^2}{2} \quad (5.1)$$

$$\varphi_{0i} = -E_0 z, \quad \varphi_{0e} = -E_0 z + \frac{\sigma_0 r_0}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$



Здесь положено, что поверхностный заряд  $\sigma_0$  равномерно распределен по поверхности цилиндра. Рассмотрим малые возмущения начальных величин (5.1)

$$f = r_0 + \chi, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

где  $\Phi$  – любая величина из (5.1),  $\chi$  и  $\Phi_1$  – возмущения.

Безразмерная линеаризованная система (3.1)–(3.3) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta_2 u, & \alpha \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \Delta_2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \alpha \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \Delta_2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

Линеаризованные уравнения непроницаемости и заряда принимают соответственно форму

$$r = 1: v = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sqrt{\xi} \frac{\partial v}{\partial r} \quad (5.4)$$

При получении (5.4) использованы уравнения неразрывности и непроницаемости. Граничные условия для потенциала и натяжений (3.4)–(3.6) принимают вид

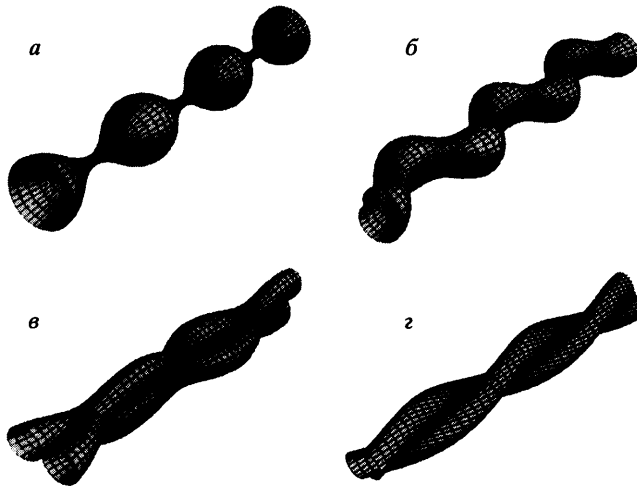
$$\begin{aligned} r = 1: \varphi_e - \sqrt{\xi} \chi &= \varphi_i, & \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} &= (\varepsilon - 1) \sqrt{\eta} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \sigma - \sqrt{\xi} \chi \\ \mathbf{p} &= \left( \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \mathbf{n} + \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (5.5)$$

где компоненты вектора  $\mathbf{p}$  равны

$$\begin{aligned} p_n &= -p + 2 \frac{\partial v}{\partial r}, & p_z &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}, & p_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\ \mathbf{F}^e &= -\left( \xi \chi + 2 \sqrt{\xi} \eta \frac{\partial \chi}{\partial z} + \sqrt{\xi} \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} + \varepsilon \sqrt{\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \sqrt{\eta} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \right) \mathbf{n} + \\ &+ \left( \xi \frac{\partial \chi}{\partial z} + \sqrt{\eta} \sigma - \sqrt{\xi} \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} \right) \mathbf{t}_z + \left( \xi \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \sqrt{\xi} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \right) \mathbf{t}_\theta \end{aligned}$$

В приведенных выше соотношениях индекс 1 у возмущенных величин опущен. В линейном приближении единичные векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}_z$ ,  $\mathbf{t}_\theta$  имеют следующие компоненты:  $\mathbf{n} = (n_r, n_z, n_\theta) = (1, -\chi'_z, -\chi'_\theta)$ ,  $\mathbf{t}_z = (\chi'_z, 1, 0)$ ,  $\mathbf{t}_\theta = (\chi'_\theta, 0, 1)$ . Здесь обезразмеривающие комплексы для величин размерности длины, времени, частоты, скорости и давления равны  $r_0$ ,  $\mu r_0 / T$ ,  $T / \mu r_0$ ,  $T / \mu$  и  $T / r_0$  соответственно. Для потенциала и поверхностного заряда аналогичные величины есть  $(Tr_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$  и  $(T\varepsilon_0 / r_0)^{1/2}$ . Константы  $\alpha$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  в (5.2)–(5.5) равны

$$\alpha = \frac{\rho r_0 T}{\mu^2}, \quad \xi = \frac{\sigma_0^2 r_0}{T \varepsilon_0}, \quad \eta = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 r_0}{T}$$



Фиг. 3. Характерные формы струи для возмущений синусоидального типа:  $a - m = 0$ ,  $b - m = 1$ ,  $в - m = 2$ ,  $z$  – форма струи моды  $m = 2$  спирального типа

Задача (5.2)–(5.5) и постановка в [17] существенно различаются поведением решения по угловой переменной  $\theta$ . В работе [17] допустимые решения для возмущений имели спиральный вид по  $\theta$ :

$$\chi, \Phi \sim \exp i(\omega t + xz + m\theta)$$

где  $x = kr_0$  – продольное волновое число,  $m$  – азимутальное волновое число. В задаче (5.2)–(5.5) подобные возмущения не допускают ограниченных решений для радиальных функций в скорости и давлении. В данном случае ограниченность имеет место, если решения искать в виде

$$\chi = \delta \exp r t \cos m\theta, \quad \sigma = \bar{\sigma} \exp r t \cos m\theta, \quad \Phi = \bar{\Phi}(r) \exp r t \cos m\theta$$

$$w = \bar{w}(r) \exp r t \sin m\theta, \quad \tau = i(\omega t + xz)$$

На фиг. 3 приведена характерная форма цилиндра, деформированного синусоидальным возмущением  $f = 1 + \delta \cos(\omega t_0 + xz) \cos m\theta$  при  $m = 0, 1, 2$  в момент времени  $t_0$ . Для сравнения на фиг. 3,  $z$  приведена форма для спирального возмущения  $f = 1 + \delta \cos(\omega t_0 + xz + m\theta)$  при  $m = 2$ . В последнем случае поперечное сечение имеет одинаковый гантелеобразный вид при любых  $z$ . При синусоидальных возмущениях с  $m = 2$  появляются узловые точки, в которых сечение имеет форму круга.

Если  $\delta = 1$ , то под действием осесимметричного возмущения исчезают перемычки между соседними утолщениями, и струя распадается на отдельные капли (фиг. 3,  $a$ ). При действии моды  $m = 2$  исчезают продольные перемычки между соседними струйками, что приводит к продольному расщеплению исходной струи на длине, равной половине длины волны возмущения (фиг. 3,  $в$ ).

Первые три уравнения системы (5.2) можно записать в векторном виде

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla_2 p + \Delta_2 \mathbf{V}$$

где  $\nabla_2 = (\nabla_z, \nabla_r, \nabla_\theta) = (0, \partial/\partial r, \partial/r\partial\theta)$ . Действие оператора дивергенции на это уравнение дает

$$\Delta_2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0$$

Ограниченное решение для радиальной функции давления равно

$$\bar{p} = i\omega\alpha A r^m$$

где  $A$  – константа. Решения для радиальных функций скоростей имеют вид

$$\bar{u} = -\frac{v}{ix} B I_m(vr)$$

$$\bar{v} = B I'_m(vr) + C \frac{m}{vr} I_m(vr) - m A r^{m-1}$$

$$\bar{w} = -C I'_m(vr) - B \frac{m}{vr} I_m(vr) + m A r^{m-1}$$

Здесь  $I_m$  – модифицированная функция Бесселя,  $v = \sqrt{i\omega\alpha}$ ,  $B$  и  $C$  – произвольные константы. Радиальные функции потенциала равны

$$\bar{\Phi}_e = C_1 I_m(x) K_m(xr), \quad \bar{\Phi}_i = C_2 K_m(x) I_m(xr)$$

$$C_1 = \frac{1}{H} \left( \left( \frac{\sqrt{\xi}}{x} + \varepsilon \sqrt{\xi} \frac{I'_m(x)}{I_m(x)} - i(\varepsilon - 1) \sqrt{\eta} \right) \delta + \frac{\bar{\sigma}}{x} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{H} \left( \left( \frac{\sqrt{\xi}}{x} + \sqrt{\xi} \frac{K'_m(x)}{K_m(x)} - i(\varepsilon - 1) \sqrt{\eta} \right) \delta + \frac{\bar{\sigma}}{x} \right)$$

где  $K_m$  – функция Макдональда,  $H = \varepsilon K_m(x) I'_m(x) - I_m(x) K'_m(x)$ .

Подстановка решений в (5.3)–(5.5) дает однородную линейную систему уравнений относительно констант  $A, B, C, \delta, \bar{\sigma}$ . Требование нетривиальности решения системы приводит к условию равенства нулю ее детерминанта. Разлагая функции Бесселя  $I_m(v)$ , входящие в детерминантное уравнение по параметру  $v$ , получаем в наинищем порядке следующие дисперсионные соотношения для мод  $m = 0, 1, 2$ .

$m = 0$ :

$$\Omega^2 \left( \alpha \left( 1 + \frac{x^2}{8} \right) + ix \frac{\alpha^2}{192} (f_z + 5g_z) \right) + \Omega \left( x^2 + \alpha \frac{ix}{8} (f_z + 3g_z) \right) + ix(f_z + g_z) = 0 \quad (5.6)$$

$m = 1$ :

$$\alpha \Omega^2 \left( \frac{g_\theta}{2} + ix \frac{g_z}{2} - \frac{13}{24} f_n + \frac{13}{24} f_\theta - ix \frac{f_z}{24} \right) + \Omega \left( f_\theta - f_n + \frac{ix}{2} (g_z - 2f_z) \right) + \frac{1}{2} g_{\theta n} - \frac{ix}{2} g_{nz} - ix g_{z\theta} = 0 \quad (5.7)$$

$m = 2$ :

$$\Omega^2 \left( 1 + \alpha \left( -\frac{g_n}{96} + \frac{g_\theta}{6} + \frac{3ix}{32} g_z - \frac{17}{288} f_n + \frac{5}{144} f_\theta - \frac{ix}{288} f_z \right) \right) + \Omega \left( \frac{g_\theta}{2} + \frac{ix}{4} g_z - \frac{f_n}{3} + \frac{f_\theta}{6} - \frac{ix}{12} f_z \right) + \frac{1}{6} g_{\theta n} - \frac{ix}{12} g_{nz} - \frac{ix}{12} g_{z\theta} = 0 \quad (5.8)$$

$$g_{\theta n} = f_{\theta} g_n - f_n g_{\theta}, \quad g_{nz} = f_n g_z - f_z g_n, \quad g_{z\theta} = f_z g_{\theta} - f_{\theta} g_z, \quad \Omega = i\omega$$

Натяжения, входящие в дисперсионные соотношения, равны

$$f_n = 1 - x^2 - m^2 - \left( \xi + \frac{\xi I_m K'_m + \varepsilon \xi x I'_m K'_m + (\varepsilon - 1)^2 \eta x I_m K_m}{H} \right) -$$

$$- i \sqrt{\xi \eta} \left( x + \frac{(\varepsilon - 1) I_m K_m}{H} \right), \quad g_n = - \frac{\xi I_m K'_m}{H} - i \frac{(\varepsilon - 1) \sqrt{\xi \eta} I_m K_m}{H}$$

$$f_{\theta} = i \frac{m}{x} f_z = \frac{m \xi (I_m K_m + x I_m K'_m) - i (\varepsilon - 1) x \sqrt{\xi \eta} I_m K_m}{H}$$

$$g_z = \sqrt{\xi \eta} - i \frac{\xi I_m K_m}{H}, \quad g_{\theta} = \frac{m \xi I_m K_m}{x H}$$

В этих выражениях аргумент функции Бесселя есть  $x$ . Поверхностное натяжение входит только в  $f_n$  в виде первых трех слагаемых  $1 - x^2 - m^2$ .

Для каждого дисперсионного соотношения (5.6)–(5.8) проводилось вычисление наибольшего показателя неустойчивости  $\Omega_M^m$  по длине волны возмущения при различных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\xi$ ,  $\eta$

$$\Omega_M^m = \max_x \operatorname{Re} \Omega_m$$

и соответствующих им значений продольного волнового числа  $x_M$ . Здесь  $\operatorname{Re} \Omega_m$  означает вещественную часть решения уравнений (5.6)–(5.8) для мод  $m = 0, 1, 2$ .

Далее проводилось сравнение максимальных показателей неустойчивости  $\Omega_M^m$  и вычислялся доминирующий показатель

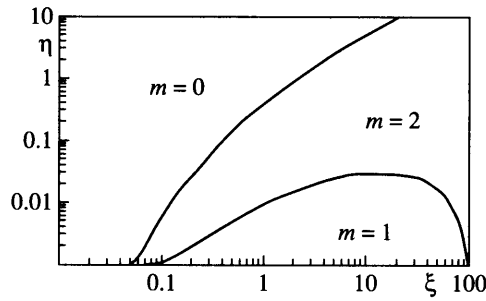
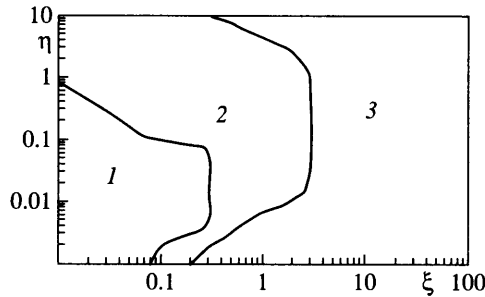
$$\Omega_M = \max_m \Omega_M^m$$

Такое сравнение  $\Omega_M^m$ , соответствующих различным модам, показывает, что при фиксированных  $\alpha$  и  $\varepsilon$  плоскость  $\xi - \eta$  разбивается на несколько областей, в которых доминирует одна из мод.

На фиг. 4 показаны области доминирования мод  $m = 0, 1, 2$  в координатах  $\xi - \eta$  при  $\varepsilon = 80$ ,  $\alpha = 10^{-1}$ . С уменьшением  $\alpha$  область доминирования моды  $m = 2$  сужается, и эта зона смещается по диагонали в правый верхний угол графика. Аналогичное смещение зоны  $m = 2$  наблюдается при уменьшении диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ . Так же, как в [17], области доминирования представляют собой компактные области, вложенные друг в друга.

На фиг. 5 приведены линии уровня доминирующего показателя неустойчивости при  $\varepsilon = 80$ ,  $\alpha = 10^{-1}$ . Цифрами выделены следующие области:  $1 - \Omega_M < 0.1$ ,  $2 - 0.1 < \Omega_M < 1$ ,  $3 - 1 < \Omega_M < 10$ . С уменьшением  $\alpha$  величина  $\Omega_M$  растет, однако, вообще говоря, это не означает рост нестабильности струи. Рассмотрим зависимость размерного показателя неустойчивости  $\omega = T \Omega_M / \mu r_0$  от вязкости при различных  $\alpha$ . Выражая  $\mu$  из  $\alpha$  и подставляя в  $\omega$ , получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho r_0^3}} \Omega_M \sqrt{\alpha}$$

Фиг. 4. Области доминирования мод  $m = 0, 1, 2$ 

Фиг. 5. Линии уровня доминирующего показателя неустойчивости

Пусть все параметры, кроме вязкости, фиксированы, тогда отношение

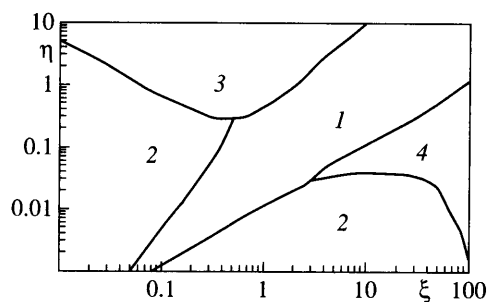
$$\omega_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Omega_{M2}\sqrt{\alpha_2}}{\Omega_{M1}\sqrt{\alpha_1}}$$

будет характеризовать зависимость размерного показателя неустойчивости от вязкости. Оказывается, что с уменьшением  $\alpha$  ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ) отношение  $\omega_{21}$  убывает ( $\omega_{21} < 1$ ) в областях  $m = 0$  и  $m = 2$  и не возрастает ( $\omega_{21} \leq 1$ ) в области  $m = 1$ . Поскольку уменьшение  $\alpha$  здесь вызвано увеличением  $\mu$ , то с ростом вязкости струя становится более устойчивой относительно осесимметричного распада и моды продольного деления.

Линии уровня продольных волновых чисел, соответствующих максимальным показателям неустойчивости при  $\varepsilon = 80$ ,  $\alpha = 10^{-1}$ , показаны на фиг. 6. Цифрами выделены следующие области: 1 –  $x_M < 10^{-2}$ , 2 –  $10^{-2} < x_M < 0.1$ , 3 –  $0.1 < x_M < 1$ , 4 –  $x_M > 1$ . Сравнение данных фиг. 4 и 6 показывает, что осесимметричные  $m = 0$  и изгибные  $m = 1$  неустойчивости наблюдаются на длинных волнах  $x_M < 1$ , а продольное деление возможно как на очень длинных, так и на коротких волнах. Однако с уменьшением  $\alpha$  область коротковолновых распадов исчезает.

Вычисление показателей неустойчивости и соответствующих волновых чисел проводилось в двух случаях: с учетом капиллярного давления и в его отсутствие. Расчеты показали, что в исследуемой области  $\xi - \eta$  поверхностное натяжение практически не влияет на положение областей неустойчивости мод, величину доминирующего показателя  $\Omega_M$  и соответствующее ему волновое число.

**6. Сравнение с экспериментом.** Осесимметричные и изгибные распады регистрируются прямыми методами путем фотографирования или скоростной видеосъемки от-



Фиг. 6. Линии уровня продольных волновых чисел

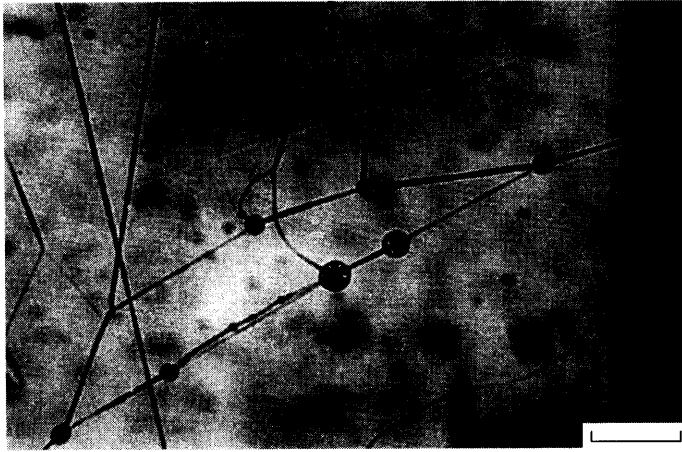
дельных участков струи. В работе [14] приведены фотографии струй воды, на которых зафиксировано развитие осесимметричных и изгибных неустойчивостей вплоть до распада струи на отдельные капли. В экспериментах с дистиллированной водой по наблюдению изгибных распадов характерные параметры струйных течений имели следующие значения:  $r_0 \sim 0.25$  мм,  $I \sim (3-20) \cdot 10^{-6}$  А,  $Q \sim (0.3-0.8)$  см<sup>3</sup>/с, межэлектродная разность потенциалов не превышала 25 кВ [14]. Оценка расстояния между электродами по фотографиям, приведенным в работе, дает величину 20 см, а для напряженности поля  $E_0 \sim 10^5$  В/м. Этим значениям соответствуют типичные числа  $s \sim 10^{-9}$ ,  $\eta \sim 10^{-3}$  и  $\xi \sim 100$ . На диаграмме областей доминирования в приближении сильного поля  $s \ll 1$  (фиг. 4) эти числа располагаются в области  $m = 1$  изгибных распадов. Расчеты устойчивости идеально проводящей струи для возмущений спирального типа также выявили возможность доминирования моды  $m = 1$  [12]. В то же время на фоне развития изгибных неустойчивостей дестабилизации высших неосесимметричных мод в этом случае не происходит.

Регистрация процессов продольного деления проводилась в экспериментах с полимерными жидкостями путем анализа характерных форм волокон, получаемых в процессе электропрядения [9, 17, 26]. При движении струи полимерного раствора в межэлектродном пространстве происходит частичное испарение растворителя, и струя фиксирует свою форму в виде волокна.

На разных расстояниях от капилляра проводился отбор проб на предметное стекло и далее с помощью микроскопа проводился поиск волокон, имеющих форму, характерную для продольного распада. Такой формой является расщепленное вдоль надвое волокно, причем дочерние волокна должны соединяться между собой в узлах. В соответствии с результатами расчетов продольное деление происходит преимущественно на длинных волнах, следовательно, узлы должны быть расположены друг от друга на больших расстояниях по сравнению с радиусом волокна.

На фиг. 7 приведена микрофотография волокон, содержащая искомую конфигурацию волокон. Здесь зафиксировано продольное расщепление волокна с длиной волны, значительно превышающей поперечник исходной струи. В качестве рабочей жидкости использовался 30%-ный раствор поливинилкапролактама в воде. Экспериментальные параметры имели следующие значения:  $\rho = 1.05$  г/см<sup>3</sup>,  $\epsilon = 80$ ,  $\lambda = 5.0 \cdot 10^{-3}$  Ом<sup>-1</sup> м<sup>-1</sup>,  $Q = 9.6 \cdot 10^{-3}$  см<sup>3</sup>/с,  $I = 7.2 \cdot 10^{-6}$  А. Разность потенциалов составляла  $U = 55$  кВ, межэлектродное расстояние равнялось 40 см.

Приведенное изображение интересно следующими обстоятельствами. Во-первых, появление таких конфигураций вследствие случайного продольного слияния струй (волокон или их фрагментов) практически исключено вследствие их одноименной заряженности. Во-вторых, струя испытала несколько продольных расщеплений подряд. Такая ситуация возможна, если параметры  $\xi$  и  $\eta$  струи соответствуют точке на диаграмме доминирования (фиг. 4) в глубине области  $m = 2$ . После каждого деления радиус струи и



Фиг. 7. Фотография событий продольного распада струй. Длина светлой масштабной метки равна 50 мкм

плотность заряда уменьшаются в  $\sqrt{2}$  раз, параметр  $\xi$  падает в  $2\sqrt{2}$ , а  $\eta$  в  $\sqrt{2}$  раз. Если точка с новыми координатами  $\xi$  и  $\eta$  остается в области  $m = 2$ , то дочерние струи также могут продолжить продольное деление. В-третьих, после расщеплений на дочерних струях начали развиваться осесимметричные возмущения, характерной особенностью которых является наличие структур типа капля-перетяжка. С точки зрения развитого здесь формализма это означает, что после очередного продольного деления параметры струи  $\xi$  и  $\eta$  попали в область  $m = 0$ , смежную с зоной  $m = 2$ .

Результаты расчетов показывают, что такое деление возможно и на коротких волнах. В [27] приведена фотография продольно расщепляющейся струи на относительно коротких волнах и имеющая форму, изображенную на фиг. 3, в.

**Заключение.** В приближении сильного поля найдено автомодельное решение о форме заряженной вязкой струи в продольном электрическом поле. Асимптотическая зависимость радиуса струи от продольной координаты  $z$  имеет вид  $z^{-0.25}$ , набор управляющих течением параметров включает плотность жидкости, объемный расход, напряженность внешнего поля и электрический ток, переносимый струей. Исследована устойчивость струи относительно осесимметричных, изгибных возмущений и моды продольного распада в режиме развития неустойчивостей синусоидального типа. В координатах заряд – поле рассчитаны области доминирования мод. Приведены экспериментальные данные по продольному делению струй.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Калужской области (№ 04-01-97225 и 03-01-00042).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрянов И.В., Козлов В.И., Басманов П.И., Огородников Б.И. Волокнистые фильтрующие материалы. М.: Знание, 1968. 78 с.
2. Baumgarten P.K. Electrostatic spinning of acrylic microfibers // J. Colloid Interface Sci. 1971. V.36. № 1. P. 71–79.
3. Larrondo L., Manley R.St.J. Electrostatic fiber spinning from polymer melts. Pt 1–3 // J. Polym. Sci.: Polym. Phys. 1981. V. 19. № 6. P. 909–940.
4. Shin Y.M., Hohman M.M., Brenner M.P., Rutledge G.C. Experimental characterization of electrospinning: the electrically forced jet and instabilities // Polymer. 2001. V. 42. № 25. P. 9955–9967.

5. *Feng J.J.* The stretching of an electrified non-Newtonian jet: A model for electrospinning // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. № 11. P. 3912–3925.
6. *Глонти Г.А.* К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле // *ЖЭТФ*. 1958. Т. 34. № 5. С. 1329, 1330.
7. *Kim K., Turnbull R.J.* Generation of charged drops of insulating liquids by electrostatic spraying // *J. Appl. Phys.* 1976. V. 47. № 5. P. 1964–1969.
8. *Saville D.A.* Electrohydrodynamic stability: fluid cylinder in longitudinal electric fields // *Phys. Fluids*. 1970. V. 13. № 12. P. 2987–2994.
9. *Шкадов В.Я., Шутов А.А.* Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ*. 1998. № 2. С. 29–40.
10. *Стретт Д. (Релей)*. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
11. *Герценштейн С.Я., Мусабегов П.М., Рудницкий А.Я., Уразов Ш.Н.* Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 306. № 5. С. 1073–1077.
12. *Saville D.A.* Stability of electrically charged viscous cylinders // *Phys. Fluids*. 1971. V. 14. № 6. P. 1095–1099.
13. *Mestel A.L.* Electrohydrodynamic stability of a slightly viscous jet // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 274. P. 93–113.
14. *Huebner A.L.* Disintegration of charged liquid jets // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 38. Pt 4. P. 679–688.
15. *Taylor G.I.* Electrically driven jets // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1969. V. 313. № 1515. P. 453–475.
16. *Зубарев Н.М.* Точное решение задачи о равновесной конфигурации двумерной заряженной жидкометаллической капли // *Письма в ЖТФ*. 1999. Т. 25. № 23. С. 55–60.
17. *Shkadov V.Ya., Shutov A.A.* Disintegration of a charged viscous jet in a high electric field // *Fluid Dynamics Res.* 2001. V. 28. № 1. P. 23–39.
18. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
19. *Gogosov V.V., Shaposhnikova G.A.* Electrohydrodynamics of surface phenomena // *Intern. J. Appl. Electromagn. Mater.* 1990. V. 1. № 1. P. 45–58.
20. *Шкадов В.Я., Шутов А.А.* Деформация капель и пузырьков в электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ*. 2002. № 5. С. 54–66.
21. *Кириченко В.Н., Петрянов-Соколов И.В., Шутов А.А., Супрун Н.Н.* Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 289. № 4. С. 817–820.
22. *Шутов А.А.* Форма несжимаемой слабопроводящей струи в сильном электрическом поле // *ПМТФ*. 1991. № 2. С. 20–25.
23. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
24. *Шутов А.А., Захарьян А.А.* Заряженная струя несжимаемой жидкости в электрическом поле // *ПМТФ*. 1998. Т. 39. № 4. С. 12–16.
25. *Шкадов В.Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // *Науч. тр. Ин-та мех. МГУ*. 1973. № 25. 192 с.
26. *Шутов А.А., Захарьян А.А.* Продольное деление заряженной струи в электрическом поле // *Докл. РАН*. 1997. Т. 355. № 5. С. 631–634.
27. *Koombhongse S., Liu W., Reneker, D.H.* Flat polymer ribbons and other shapes by electrospinning // *J. Polym. Sci: Pt B. Polym Phys.* 2001. V. 39. № 21. P. 2598–2606.

Обнинск

E-mail: shutov@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию  
26.X.2005