МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 6 • 2006

УДК 532.516.2.013.4:536.24

© 2006 г. О.М. ПОДВИГИНА

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Изучается устойчивость стационарных конвективных течений в горизонтальном слое со свободными границами, подогреваемом снизу и вращающемся относительно вертикальной оси, предполагая приближение Буссинеска (конвекция Рэлея–Бенара). Рассматриваемые течения – конвективные валы или квадратные ячейки, являющиеся суммой двух перпендикулярных валов с одинаковыми волновыми числами, k. Предполагается, что число Рэлея близко к критическому для возникновения конвективных течений с волновым числом k: $R = R_c(k) + \varepsilon^2$; амплитуда надкритических стационарных состояний порядка ε. Показано, что течения всегда неустойчивы относительно возмущений, являющихся суммой длинноволновой моды и двух коротковолновых мод, соответствующих линейным валам, повернутым на малые углы в противоположных направлениях.

Ключевые слова: конвекция Рэлея–Бенара, линейная устойчивость, конвективные валы, вращение.

Рассматривается конвекция Рэлея–Бенара в горизонтальном слое, подогреваемом снизу и вращающемся относительно вертикальной оси. Горизонтальные границы свободны и поддерживаются при фиксированной температуре. В безразмерной форме система характеризуется следующими параметрами: числами Рэлея R (характеризующим амплитуду сил плавучести), Прандтля P (отношение кинематической вязкости к коэффициенту тепловой диффузии) и Тейлора T (пропорциональном скорости вращения).

При малых числах Рэлея жидкость неподвижна. С увеличением числа Рэлея в системе в зависимости от соотношения чисел Тейлора и Прандтля возникает монотонная или колебательная неустойчивость [1]. Возникающие при монотонной неустойчивости стационарные состояния типа валов, квадратных и шестиугольных ячеек были рассмотрены, например, в [2–4] (см. также монографию [5] и обзор [6]) для конвекции без вращения и в [7–11] – для вращающегося слоя. При отсутствии вращения все течения ответвляются в область возрастания чисел Рэлея и, за исключением валов, неустойчивы. При вращении возможно ветвление также в сторону убывания R, и в некоторой области значений P и T возникающие течения с квадратной ячейкой периодичности устойчивы по отношению к возмущениям того же периода, что и у основного течения.

В работе [8] было показано, что конвективные валы могут быть неустойчивы относительно таких же валов, повернутых на конечный угол. В пределе больших чисел Прандтля при $T > 2285$ эта неустойчивость имеет место при установлении конвекции. Другой тип неустойчивости конвективных валов во вращающемся слое (так называемая неустойчивость малого угла) рассмотрен в [12]. Используя амплитудные уравнения, показано, что валы с критическим волновым числом k_c всегда неустойчивы относительно возмущений, являющихся суммой длинноволновой моды и двух экземпляров возмущаемого течения, повернутых на малые углы порядка $\varepsilon^{2/5}$, где ε^2 – надкритичность.

В данной статье асимптотические методы применены для исследования устойчивости стационарных течений более сложной формы с волновыми числами, не обязательно равными критическому. Показано, что при малой надкритичности валы и квадратные ячейки, в линейном приближении являющиеся суммой двух перпендикулярных валов с одинаковыми волновыми числами k, неустойчивы. Максимальный инкремент роста имеет порядок $\max(\varepsilon^{8/5}, (k-k_c)^2)$.

1. Установление конвекции во вращающемся слое при монотонной неустойчивости. Конвективные течения описываются уравнением Навье – Стокса с условием несжимаемости и уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + P\Delta\mathbf{v} + PR\theta\mathbf{e}_z - \nabla p + PT\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z \tag{1.1}$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla)\theta + v_z + \Delta\theta \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость потока, θ – разность между температурой и ее линейным профилем. На горизонтальных границах предполагается фиксированная температура и отсутствие напряжений:

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = v_z = 0, \quad \theta = 0\ (z = 0, 1) \tag{1.4}$$

Система (1.1)–(1.4) допускает стационарное состояние $\mathbf{v} = 0$, $\theta = 0$. Его устойчивость определяется собственными значениями оператора линейной части системы (1.1)–(1.4), собственные функции которого имеют вид гармоник Фурье [6]. Растущие моды с волновым числом k существуют в случае монотонной неустойчивости при $R > R_c$, а в случае колебательнюой – при $R > R_c^h$, где

$$R_c(k) = \frac{a^3 + T^2\pi^2}{k^2}, \quad a = k^2 + \pi^2 \tag{1.5}$$

$$R_c^h(k) = \frac{2}{k^2}\left((1+P)a^3 + \frac{(PT\pi)^2}{(1+P)}\right) \tag{1.6}$$

Частота колебаний удовлетворяет уравнению

$$\omega_c^2 = \frac{T^2\pi^2(1-P)}{a(1+P)} - a^2 \tag{1.7}$$

поэтому колебательная неустойчивость возможна только при $P < 1$.

Рассматривается только случай монотонной неустойчивости. Критическое волновое число k_c, для которого достигается минимум $R_c(k)$, определяется уравнением

$$a^2(2k^2 - \pi^2) - T^2\pi^2 = 0 \tag{1.8}$$

При небольшой надкритичности, $R = R_c(k) + \varepsilon^2$, нелинейное решение (1.1)–(1.4) можно найти, разлагая его в ряд [5]

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\mathbf{U}_j \quad (\mathbf{U}_j = (\mathbf{U}_j^f, \mathbf{U}_j^t)) \tag{1.9}$$

Здесь и ниже использовано представление полей конвективного течения в виде четырехкомпонентных векторов, где первые 3 компоненты – скорость потока, а последняя –

температура. Первый член разложения – собственный вектор линеаризованной системы (1.1)–(1.4) с $R = R_c(k)$, его можно представить в виде суммы

$$\mathbf{U}_1 = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{F}_l \tag{1.10}$$

где двумерные конвективные течения $\mathbf{F}_l$ – линейные валы различной ориентации с одинаковыми волновыми числами k. Следующие члены (1.9) определяются из уравнений, получающихся подстановкой (1.9) в (1.1)–(1.4).

Первые члены ряда (1.9) для $n = 1$ (валы) приведены в [11]:

$$\mathbf{U}_1 = b\begin{pmatrix} -\pi k^{-1}\cos\pi z\sin kx \\ T\pi(ak)^{-1}\cos\pi z\sin kx \\ \sin\pi z\cos kx \\ a^{-1}\sin\pi z\cos kx \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = b^2\begin{pmatrix} 0 \\ T\pi^2(8Pk^3a)^{-1}\sin 2kx \\ 0 \\ -(8\pi a)^{-1}\sin 2\pi z \end{pmatrix}$$

$$8k^4P^2a = (P^2k^4R_c - T^2\pi^4)b^2$$

Случаи квадратных и шестиугольных ячеек рассмотрены в [7, 9, 10].

2. Устойчивость валов. Устойчивость (1.9) определяется собственными значениями оператора L, являющегося линеаризацией (1.1)–(1.4) вблизи этого стационарного состояния. Этот оператор можно разложить в ряд, два первых члена которого имеют вид

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j L_j \tag{2.1}$$

$$L_0(\mathbf{v}, \theta) = (P\Delta\mathbf{v} + PR_c\theta\mathbf{e}_z - \nabla p + PT\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z,\ \upsilon_z + \Delta\theta) \tag{2.2}$$

$$L_1(\mathbf{v}, \theta) = (\mathbf{U}_1^f \times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{U}_1^f), -(\mathbf{U}_1^f\nabla)\theta - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{U}_1^t) \tag{2.3}$$

Ниже $L_0(R)$ обозначает оператор L_0 при $R \neq R_c$. Оператор M определяется формулой

$$M(\mathbf{v}, \theta) = (P\theta\mathbf{e}_z, 0) \tag{2.4}$$

Для решения задачи на собственные значения $L\mathbf{W} = \lambda\mathbf{W}$ вычислено инвариантное подпространство L; для доказательства неустойчивости вторичного течения достаточно провести анализ собственных значений ограничения L на это подпространство.

Пусть $\mathbf{W}_j$ ($j = 1, \ldots, J$) базис в этом подпространстве. Обозначим через $\mathcal{A} = (A_{mn})$ матрицу ограничения L на это подпространство:

$$L\mathbf{W}_j = \sum_{i=1}^{J} A_{ij}\mathbf{W}_i \ \forall j \tag{2.5}$$

Представим базисные векторы и элементы матрицы в виде рядов

$$\mathbf{W}_j = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{W}_{j,l} \tag{2.6}$$

$$A_{mn} = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l A_{mn,l} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.5) и приравнивая выражения при равных степенях ε, получаем систему уравнений для $\mathbf{W}_{j,\,l}$. В качестве $\mathbf{W}_{j,\,0}$ выбраны собственные векторы L_0

$$L_0\mathbf{W}_{j,\,0} = \lambda_{j,\,0}\mathbf{W}_{j,\,0} \tag{2.8}$$

Пусть $(\delta_x, \delta_y, 0)$ – малое возмущение волнового вектора $(k, 0, \pi)$: $\delta_x \ll k$ и $\delta_y \ll k$. Коэффициенты $\mathbf{W}_{j,\,l}$ и $A_{mn,\,l}$ рядов (2.6) и (2.7) зависят от этих параметров.

Обозначим за $\mathcal{F}$ пространство симметричных относительно вертикальной оси четырехкомпонентных векторных полей вида $\mathbf{V} = (\mathbf{V}^f, \mathbf{V}^t)$, где $\mathbf{V}^f$ бездивергентное поле, являющихся суммами гармоник Фурье с волновыми векторами $(mk \pm \delta_x, \pm\delta_y, l\pi)$, где l и m – целые. Это пространство L_n-инвариантно для всех n. Система уравнений для $\mathbf{W}_{j,\,l}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &L_0\mathbf{W}_{j,\,n} - \lambda_{j,\,0}\mathbf{W}_{j,\,n} - \sum_{i=1}^{J} A_{ij,\,n}\mathbf{W}_{i,\,0} = \\ &= -\sum_{m>0,\,l\ge 0,\,m+l=n} L_m\mathbf{W}_{j,\,l} + \sum_{i=1}^{J}\ \sum_{m>0,\,l\ge 0,\,m+l=n} A_{ij,\,m}\mathbf{W}_{i,\,l}\ \forall j \end{aligned} \tag{2.9}$$

где правая часть известна. Для $n = 0$ решение дается (2.8). Уравнения решаем последовательно для возрастающих $n \ge 1$. Для дальнейших построений необходимо, чтобы решения $\mathbf{W}_{j,\,n}$ были равномерно ограничены по δ_x и δ_y. Для этого достаточно, чтобы норма ограничения L_0^{-1} на инвариантное подпространство, дополнительное в $\mathcal{F}$ к натянутому на $\mathbf{W}_{j,\,0}$, была бы ограничена равномерно по δ_x и δ_y. Поскольку у ограничения L_0 на $\mathcal{F}$ существует ровно три малых собственных значения, а остальные имеют порядок единицы, естественно, чтобы построенное инвариантное подпространство имело размерность $J = 3$

$$\mathbf{W}_{1,\,0} = \begin{pmatrix} -\delta_y\sin(\delta_x x + \delta_y y) \\ \delta_x\sin(\delta_x x + \delta_y y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{W}_{2,\,0} = \begin{pmatrix} -(\pi s_+ + q_+\delta_y)k_+^{-1}\cos\pi z\sin((k+\delta_x)x + \delta_y y) \\ (q_+s_+ - \pi\delta_y k_+^{-2})\cos\pi z\sin((k+\delta_x)x + \delta_y y) \\ \sin\pi z\cos((k+\delta_x)x + \delta_y y) \\ a_+^{-1}\sin\pi z\cos((k+\delta_x)x + \delta_y y) \end{pmatrix} + O((k_+^2 - k^2)^2) \tag{2.11}$$

$$\mathbf{W}_{3,\,0} = \begin{pmatrix} -(\pi s_- - q_-\delta_y)k_-^{-1}\cos\pi z\sin((k-\delta_x)x - \delta_y y) \\ (q_-s_- + \pi\delta_y k_-^{-2})\cos\pi z\sin((k-\delta_x)x - \delta_y y) \\ \sin\pi z\cos((k-\delta_x)x - \delta_y y) \\ a_-^{-1}\sin\pi z\cos((k-\delta_x)x - \delta_y y) \end{pmatrix} + O((k_-^2 - k^2)^2) \tag{2.12}$$

$$k_{\pm} = ((k \pm \delta_x)^2 + \delta_y^2)^{1/2}, \quad s_{\pm} = \frac{k \pm \delta_x}{k_{\pm}}$$

$$a_{\pm} = k_{\pm}^2 + \pi^2, \quad q_{\pm} = \frac{T\pi}{k_{\pm} a_{\pm}}$$

Собственные векторы (2.10)–(2.12) имеют собственные значения

$$\lambda_{1,0} = -P(\delta_x^2 + \delta_y^2) \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,0} &= (R_c(k) - R_+)(M\mathbf{W}_{j,0}, \mathbf{W}_{j,0}^*) + O((R_c(k) - R_+)^2) \\ \lambda_{3,0} &= (R_c(k) - R_-)(M\mathbf{W}_{j,0}, \mathbf{W}_{j,0}^*) + O((R_c(k) - R_-)^2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $R_{\pm} = R_c(k_{\pm})$ – критическое число Рэлея для $k_{\pm}$ (1.5), $\mathbf{W}_{j,0}^*$ – базис, двойственный к $\mathbf{W}_{j,0}$. Оператор, сопряженный к L_0 относительно скалярного произведения

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1^f \cdot \mathbf{w}_2^f + PR_c \mathbf{w}_1^t \cdot \mathbf{w}_2^t \tag{2.15}$$

совпадает с L_0, в котором направление вращения изменено на противоположное (здесь $\cdot$ обозначает обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbf{L}_2$). Следовательно, $\mathbf{W}_{j,0}^*$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{1,0}^* &= (\delta_x^2 + \delta_y^2)^{-1} \mathbf{W}_{1,0} \\ \mathbf{W}_{2,0}^* &= g_+^{-1} \mathbf{W}_{2,0}(-T) + O((k_+^2 - k^2)^2) \\ \mathbf{W}_{3,0}^* &= g_-^{-1} \mathbf{W}_{3,0}(-T) + O((k_-^2 - k^2)^2) \\ g_+ &= (\mathbf{W}_{2,0}, \mathbf{W}_{2,0}(-T)), \quad g_- = (\mathbf{W}_{3,0}, \mathbf{W}_{3,0}(-T)) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Разложим $R_{\pm}$ в ряд Тейлора в окрестности k

$$\begin{aligned} R_{\pm} &= R_c(k) + \frac{\partial R_c}{\partial (k^2)}(k_{\pm}^2 - k^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_c}{\partial (k^2)^2}(k_{\pm}^2 - k^2)^2 + O((k_{\pm}^2 - k^2)^3) = \\ &= R_c + \frac{\partial^2 R_c}{\partial^2 (k^2)}(k^2 - k_c^2)(k_{\pm}^2 - k^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_c}{\partial (k^2)^2}(k_{\pm}^2 - k^2)^2 + O((k^2 - k_c^2)(k_{\pm}^2 - k^2)^2, (k_{\pm}^2 - k^2)^3) \end{aligned} \tag{2.17}$$

При $k = k_c$ выполнено $\partial R_c(k)/\partial(k^2) = 0$.

Элементы матрицы А для $k = k_c$, полученные вычислением $(L_n \mathbf{W}_{j,0}, \mathbf{W}_{i,0}^*)$ для $n = 1$ и 2, приведены в Приложении 1. При $k \neq k_c$ члены порядка ε ($l = 1$) ряда (2.7) сохраняются, так как при их вычислении условие $k = k_c$ не было использовано. Таким образом, используя (2.14) и (2.17), получаем коэффициенты матрицы А ограничения оператора L на трехмерное инвариантное пространство, приведенные в Приложении 2.

Рассматривая матрицу А в новом базисе

$$\mathbf{W}_1^0 = \mathbf{W}_1, \quad \mathbf{W}_2^0 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_3, \quad \mathbf{W}_3^0 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_3 \tag{2.18}$$

получаем, что при $\delta_x^2 + \delta_y^2 \gg \varepsilon^2$ собственные значения матрицы (П.2.1) асимптотически близки к $-P(\delta_x^2 + \delta_y^2)$ и собственным значениям матрицы

$$\begin{bmatrix} A_{22}^0 - \xi_2 A_{12}^0 & A_{23}^0 - \xi_2 A_{13}^0 \\ A_{32}^0 - \xi_3 A_{12}^0 & A_{22}^0 - \xi_3 A_{13}^0 \end{bmatrix}$$
$$\xi_2 = \frac{A_{21}^0}{A_{11}^0 - A_{22}^0} \quad \text{и} \quad \xi_3 = \frac{A_{31}^0}{A_{11}^0 - A_{33}^0} \tag{2.19}$$

(A^0 – это матрица А, записанная в новом базисе (2.18)).

Для $k = k_c$ собственные значения (2.19) асимптотически равны

$$\lambda = -C_4(4k^2\delta_x^2 + \delta_y^4) - C_3\varepsilon^2 \pm \left[2C_4 k\delta_x\delta_y^2\left(8C_4 k\delta_x\delta_y^2 - \frac{b^2\varepsilon^2\delta_y}{(\delta_x^2 + \delta_y^2)} \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(C_2\pi(\delta_y^2 - \delta_x^2) + k\delta_x\delta_y\left(C_2^2 - \frac{\pi^2}{k^2}\right)\right)(P(\delta_x^2 + \delta_y^2) - C_4\delta_x^2)^{-1}\right) + C_3^2\varepsilon^4\right]^{1/2} \tag{2.20}$$
$$C_4 = \frac{1}{4}C_1 P g^{-1} a^{-1}$$

Максимальное по δ_x и δ_y собственное значение $\lambda_{\max}$ достигается при следующих значениях:

$$\lambda_{\max} = \frac{5}{4} P g^{-1} k^{-2} \delta_y^4 \tag{2.21}$$

$$3k^2\delta_x^2 = \delta_y^4 \quad \text{и} \quad \delta_y^5 = -\frac{\sqrt{3}}{12} P^{-2} T \pi^2 a^{-1} g b^2 \varepsilon^2 k \tag{2.22}$$

Для $k \neq k_c$ наибольшее собственное значение (2.19) асимптотически равно

$$\lambda = -C_4(4k^2\delta_x^2 + \delta_y^4 + 4\alpha k\delta_y^2) - C_3\varepsilon^2 +$$
$$+\left[(2C_4 k\delta_x\delta_y^2 + 4\alpha k^2\delta_x)\left(8C_4 k\delta_x\delta_y^2 + 16\alpha k^2\delta_x - \frac{b^2\varepsilon^2\delta_y}{(\delta_x^2 + \delta_y^2)} \times \right.\right. \tag{2.23}$$
$$\left.\left.\times\left(C_2\pi(\delta_y^2 - \delta_x^2) + k\delta_x\delta_y\left(C_2^2 - \frac{\pi^2}{k^2}\right)\right)(P(\delta_x^2 + \delta_y^2) - C_4\delta_x^2)^{-1}\right) + C_3^2\varepsilon^4\right]^{1/2}$$

где $\alpha = k - k_c$. В зависимости от соотношения α и ε максимум (2.23) достигается при различных условиях на δ_x и δ_y.

Случай 1: $\alpha \ll \varepsilon^{4/5}$. Наибольшее собственное значение асимптотически задается выражением (2.21), достигаемым при условиях (2.22). Дополнительные члены матрицы

(П.2.1) порядка $(k^2 - k_c^2)(k_\pm^2 - k^2)$ несущественны, и неустойчивость типа малого угла является доминирующей.

Случай 2: $\alpha \gg \varepsilon^{4/5}$. Максимальное собственное значение асимптотически равно

$$\lambda = 4C_4\alpha^2k^2$$

и достигается при

$$2k\delta_x + \delta_y^2 = -2\alpha k \tag{2.24}$$

Это неустойчивость типа Экхауза.

Неустойчивость Экхауза, соответствующая $\delta_y = 0$, [6, 13, 14] – это неустойчивость валов с волновым вектором $(k, 0, \pi)$ относительно валов с волновым вектором $(q, 0, \pi)$, имеющая место для чисел Рэлея, удовлетворяющих неравенству $3(R - R_c(k)) \le R_c(k) - R_c(k_c)$, где $R_c(k)$ определено (1.5). Заметим, что (2.24) позволяет определить только волновое число наиболее неустойчивой моды, для определения направления волнового вектора при максимизации λ в нем необходимо учитывать членов следующего порядка малости по всем малым параметрам.

Случай 3: $\alpha \sim \varepsilon^{4/5}$. Этот случай наиболее интересен и сложен – имеет место взаимодействие двух неустойчивостей. Наибольший по δ_x и δ_y инкремент роста имеет порядок $\sim\varepsilon^{8/5}$, и $\delta_x \sim \varepsilon^{4/5}$ и $\delta_y \sim \varepsilon^{2/5}$. Точные выражения λ_{max} и компонент критического волнового вектора не приводятся, поскольку они громоздки и неинформативны.

При $\delta_x^2 + \delta_y^2 = O(\varepsilon^2)$ собственные значения (П.2.1) по порядку не превосходят $O(\varepsilon^2)$, что меньше $\lambda_{max} \sim \max(\varepsilon^{8/5}, \alpha^2)$.

3. Устойчивость квадратных ячеек. Поскольку горизонтальный слой обладает вращательной инвариантностью, возможны более сложные стационарные течения, чем рассмотренные выше валы [6]. Для таких течений первый член ряда (1.9) имеет вид (1.10)

$$\mathbf{U}_1^{sq} = \sum_{i=1}^{n} b_i\gamma(\varphi_i)\mathbf{U}_1 \tag{3.1}$$

где $\mathbf{U}_1$ – линейные валы (1.11), $\gamma(\varphi_i)$ – оператор поворота на угол φ_i вокруг вертикальной оси. Амплитуды могут быть определены, например, методом, предложенным в [7] (см. также [5]). Рассматривается только случай квадратных ячеек, т.е. $n = 2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$. Течения такой геометрии с $b_1 = b_2$ при установлении конвекции устойчивы относительно короткопериодных возмущений в некоторой области значений P и T [9].

Для исследования устойчивости квадратных ячеек построим инвариантное пространство оператора L^{sq}, являющегося линеаризацией (1.1)–(1.4) в окрестности этого стационарного состояния, размерности пять. В качестве приближений нулевого порядка по ε базисных полей этого инвариантного пространства выбираем

$$\mathbf{W}_{1,0}\ \mathbf{W}_{2,0}\ \mathbf{W}_{3,0}\ \mathbf{W}_{4,0}(\delta_x, \delta_y) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{W}_{2,0}(-\delta_y, \delta_x)$$
$$\mathbf{W}_{5,0}(\delta_x, \delta_y) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{W}_{3,0}(-\delta_y, \delta_x) \tag{3.2}$$

Двойственный базис определяется аналогично

$$\mathbf{W}_{1,0}^*\ \mathbf{W}_{2,0}^*\ \mathbf{W}_{3,0}^*\ \mathbf{W}_{4,0}^*(\delta_x, \delta_y) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{W}_{2,0}^*(-\delta_y, \delta_x)$$

$$\mathbf{W}_{5,0}^*(\delta_x, \delta_y) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{W}_{3,0}^*(-\delta_y, \delta_x)$$

Член разложения (2.1) нулевого порядка не зависит от потока, следующий член имеет вид

$$L_1^{sq} = L_1(\mathbf{U}_1) + L_1(\gamma(\pi/2)\mathbf{U}_1)$$

Здесь $L_1(\mathbf{U})$ обозначает оператор (2.3), вычисленный для стационарного состояния $\mathbf{U}$. Элементы матрицы A, определяющей устойчивость квадратных ячеек, можно определить, зная элементы соответствующей матрицы (П.2.1) для валов.

Рассмотрим вначале случай $k = k_c$. Пусть $\delta_y \gg \delta_x$. Из асимптотики коэффициентов (П.3.1) (Приложение 3) следует, что при $\delta_x^2 + \delta_y^2 \gg \varepsilon^2$ A_{44} и A_{55} асимптотически больше остальных коэффициентов A_{4i}, A_{i4}, A_{5i} и A_{i5} $\forall i$. Следовательно, у матрицы (П.3.1) есть отрицательные собственные значения, асимптотически близкие к A_{44} и A_{55}, которым отвечают собственные векторы

$$\mathbf{W}_4^0 = \mathbf{W}_4 + \xi_1\mathbf{W}_1, \quad \mathbf{W}_5^0 = \mathbf{W}_5 + \xi_2\mathbf{W}_1$$

$$\xi_1 = \frac{A_{14}}{A_{11} + A_{44}} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{A_{15}}{A_{11} + A_{55}}$$

Представим матрицу в новом базисе $\mathbf{W}_4 \to \mathbf{W}_4^0$, $\mathbf{W}_5 \to \mathbf{W}_5^0$. Оставшиеся три собственные значения матрицы (П.3.1) тогда равны собственным значениям ее подматрицы размером 3×3 в верхнем левом углу, которая имеет вид

$$A_{ij}^0 = A_{ij} \ (ij) \neq (21), (31), \quad A_{21}^0 = A_{21} - \xi_1 A_{12}; \quad A_{31}^0 = A_{31} - \xi_2 A_{12} \tag{3.3}$$

где A_{ij}^0, $i, j = 1, 2, 3,$ – элементы матрицы (П.3.1), записанной в базисе $\mathbf{W}^0$. Дополнительные члены, возникающие при изменении базиса, асимптотически малы, и матрицы (3.3) и (П.1.1) совпадают (с точностью до замены b на b_1). Максимальное собственное значение (П.1.1), найденное в разделе (2), задается формулой (2.21).

Для $\delta_y \ll \delta_x$ получаем то же собственное значение, что и для $\delta_y \gg \delta_x$, поскольку исходное течение инвариантно относительно перестановки x и y. При $\delta_y \sim \delta_x$ собственные значения, полученные рассматривая различные варианты соотношений δ_x и ε, по порядку меньше (2.21).

Для $k \neq k_c$ так же, как и при исследовании устойчивости конвективных валов, в матрице (П.3.1) на диагонали появляются дополнительные слагаемые: $4C_1Pg^{-1}a^{-1}$ $(k_+^2 - k^2)$, $4C_1Pg^{-1}a^{-1}(k_-^2 - k_2)$, $4C_1Pg^{-1}a^{-1}(\bar{k}_+^2 - k^2)$ и $4C_1Pg^{-1}a^{-1}(\bar{k}_-^2 - k^2)$ в элементах A_{22}, A_{33}, A_{44} и A_{55} соответственно. Рассматривая три варианта соотношений $(k_c - k)$ и ε, так же, как в конце раздела (3), и используя описанную выше замену базиса $\mathbf{W}_4 \to \mathbf{W}_4^0$, $\mathbf{W}_5 \to \mathbf{W}_5^0$, можно показать, что для каждого из трех вариантов соотношений существует растущая мода. При этом, как и в случае валов, доминируют три типа неустойчивости: при $\alpha \ll \varepsilon^{4/5}$ неустойчивость типа малого угла, при $\alpha \gg \varepsilon^{4/5}$ – типа Экхауза, а при $\alpha \sim \varepsilon^{4/5}$ неустойчивости этих двух типов взаимодействуют.

Заключение. Рассмотренные конвективные течения (валы и квадратные ячейки) во вращающемся слое всегда неустойчивы относительно длинноволновых возмущений. В зависимости от соотношений надкритичности и разности волнового числа течения и критического волнового числа доминирует либо неустойчивость малого угла, либо неустойчивость Экхауза. Вычисления приведены для случая надкритического ветвления стационарных конвективных состояний, однако если они ответвляются в область уменьшения чисел Рэлея [9], результаты сохраняются.

Инкремент роста неустойчивости по отношению к коротковолновым возмущениям (если таковая имеет место) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, где ε – надкритичность. Инкремент роста длинноволновой неустойчивости имеет порядок $O(\varepsilon^{8/5})$ для неустойчивости малого угла, или асимптотически больше $\varepsilon^{8/5}$ для неустойчивости типа Экхауза. Следовательно, для конвективных течений длинноволновая неустойчивость доминирует над неустойчивостью по отношению к коротковолновым возмущениям.

Для пространственных структур, у которых первый член разложения по ε является суммой трех или более повернутых валов, можно провести анализ устойчивости аналогичным образом, однако с увеличением числа валов размер исследуемой на собственные значения матрицы возрастает и вычисления становятся более громоздкими.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (N 04-05-64699).

Приложение 1. Коэффициенты матрицы A для валов с $k = k_c$. При $k = k_c$ коэффициенты матрицы A ограничения оператора L на трехмерное инвариантное пространство имеют вид:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -P(\delta_x^2+\delta_y^2) + O(\varepsilon^2\delta^2)\\
A_{21} &= \frac{1}{2}kb\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)\\
A_{31} &= -\frac{1}{2}kb\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)\\
A_{12} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2+\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b}{2k}(\delta_y^2-\delta_x^2) + \frac{1}{2}b\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) + F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{22} &= -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_+^2-k^2)^2 + O((k_+^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{32} &= -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{13} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2-\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b}{2k}(\delta_y^2-\delta_x^2) + \frac{1}{2}b\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) - F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{23} &= -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{33} &= -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_-^2-k^2)^2 + O((k_-^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
C_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_c}{\partial(k^2)^2} = \frac{3(\pi^2+k^2)}{k^2}, \quad C_2 = \frac{\pi T}{ka}\\
F_1 &= f_1\delta_x^2 + f_2\delta_x\delta_y + f_3\delta_y^2, \quad F_2 = f_4\delta_x^3 + f_5\delta_x^2\delta_y + f_6\delta_x\delta_y^2 + f_7\delta_y^3
\end{aligned} \qquad (\text{П.1.1})$$

$$g = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi^2 - k^2}{k^2} + 3P\right)$$

Величины C_3 и f_i несущественны.

Приложение 2. Коэффициенты матрицы A для валов с $k \neq k_c$. При $k \neq k_c$ коэффициенты матрицы A ограничения оператора L на трехмерное инвариантное пространство имеют вид:

$$A_{11} = -P(\delta_x^2 + \delta_y^2) + O(\varepsilon^2\delta^2)$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}kb\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)$$

$$A_{31} = -\frac{1}{2}kb\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)$$

$$A_{12} = \frac{\varepsilon}{\delta_x^2 + \delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b}{2k}(\delta_y^2 - \delta_x^2) + \frac{1}{2}b\delta_x\delta_y\left(C_2^2 - \frac{\pi^2}{k^2}\right) + F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)$$

$$A_{22} = -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_+^2 - k^2)^2 - 4C_1\frac{P}{ga}\alpha k(k_+^2 - k^2) + O(\alpha(k_+^2 - k^2)^2, (k_+^2 - k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4) \quad (\text{П.2.1})$$

$$A_{32} = -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)$$

$$A_{13} = \frac{\varepsilon}{\delta_x^2 - \delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b}{2k}(\delta_y^2 - \delta_x^2) + \frac{1}{2}b\delta_x\delta_y\left(C_2^2 - \frac{\pi^2}{k^2}\right) - F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)$$

$$A_{23} = -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)$$

$$A_{33} = -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_-^2 - k^2)^2 - 4C_1\frac{P}{ga}\alpha k(k_-^2 - k^2) + O(\alpha(k_-^2 - k^2)^2, (k_-^2 - k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)$$

$$\alpha = k - k_c$$

Приложение 3. Коэффициенты матрицы A для квадратных ячеек при $k = k_c$. Главные члены матрицы A ограничения оператора L на пятимерное инвариантное пространство имеют вид:

$$A_{11} = -P(\delta_x^2 + \delta_y^2) + O(\varepsilon^2\delta^2)$$

$$A_{21} = \frac{1}{2}kb_1\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)$$

$$A_{31} = -\frac{1}{2}kb_1\varepsilon\delta_y + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)$$

$$A_{41} = \frac{1}{2}kb_2\varepsilon\delta_x + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)$$

$$
\begin{aligned}
A_{51} &= -\frac{1}{2}kb_2\varepsilon\delta_x + \varepsilon F_1(\delta^2) + O(\varepsilon\delta^3, \varepsilon^3)\\
A_{12} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2+\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b_1}{2k}(\delta_y^2-\delta_x^2) + \frac{1}{2}b_1\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) + F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{22} &= -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_+^2-k^2)^2 + O((k_+^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{32} &= -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{13} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2-\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b_1}{2k}(\delta_y^2-\delta_x^2) + \frac{1}{2}b_2\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) - F_2(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{23} &= -\varepsilon^2 C_3 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{33} &= -\varepsilon^2 C_3 - C_1\frac{P}{ga}(k_-^2-k^2)^2 + O((k_-^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{14} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2+\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b_2}{2k}(\delta_x^2-\delta_y^2) + \frac{1}{2}b_2\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) + F_4(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{44} &= -\varepsilon^2 C_5 - C_1\frac{P}{ga}(\bar{k}_+^2-k^2)^2 + O((\bar{k}_+^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{54} &= -\varepsilon^2 C_5 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{15} &= \frac{\varepsilon}{\delta_x^2+\delta_y^2}\left(C_2\frac{\pi b_2}{2k}(\delta_x^2-\delta_y^2) + \frac{1}{2}b_2\delta_x\delta_y\left(C_2^2-\frac{\pi^2}{k^2}\right) - F_4(\delta^3)\right) + O(\varepsilon\delta^2, \varepsilon^3)\\
A_{45} &= -\varepsilon^2 C_5 + O(\varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)\\
A_{55} &= -\varepsilon^2 C_5 - C_1\frac{P}{ga}(\bar{k}_-^2-k^2)^2 + O((\bar{k}_-^2-k^2)^3, \varepsilon^2\delta, \varepsilon^4)
\end{aligned}
\qquad (\text{П.3.1})
$$

где $\bar{k}_\pm = ((k \pm \delta_y)^2 + \delta_x^2)^{1/2}$; g, C_1, F_1, F_2 те же, что и для валов, а значения C_3, C_5 и f_i несущественны.

Коэффициенты, не приведенные выше, имеют порядок $O(\varepsilon^3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Claredon press, 1961. 652 p.
2. *Горьков Л.П.* Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. Вып. 2. С. 402–407.
3. *Malkus W.V.R., Veronis G.* Finite amplitude cellular convection // J. Fluid Mech. 1959. V. 4. Pt. 3. P. 225–260.
4. *Schluter A., Lortz D., Busse F.* On the stability of steady finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1965. V. 23. Pt. 1. P. 129–144.

5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. *Гетлинг А.В.* Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161. № 9. С. 1–80.
7. *Veronis G.* Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt. 3. P. 401–435.
8. *Kuppers G., Lortz D.* Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. Pt. 3. P. 609–620.
9. *Goldstein H.F., Knobloch E., Silber M.* Planform selection in rotating convection // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 4. P. 625–627.
10. *Goldstein H.F., Knobloch E., Silber M.* Planform selection in rotating convection: Hexagonal symmetry // Phys Rev. A. 1992. V. 46. № 8. P. 4755–4761.
11. *Bassom P.B., Zhang K.* Strongly nonlinear convection cells in a rapidly rotating fluid layer // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1994. V. 76. P. 223–238.
12. *Cox S.M., Matthews P.C.* Instability of rotating convection // J. Fluid Mech. 2000. V. 403. P. 153–172.
13. *Eckhaus W.* Studies in Non-linear Stability Theory. Berlin: Springer, 1965. 117 p.
14. *Tuckerman L.S., Barkley D.* Bifurcation analysis of the Eckhaus instability // Physica D. 1990. V. 46. № 1. P. 57–86.

Москва
Международный институт теории прогноза
землетрясений и математической геофизики РАН
Лаборатория общей аэродинамики,
Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
23.VIII.2005