

УДК 532.516:533.6.011.55

© 2006 г. С.М. ДРОЗДОВ

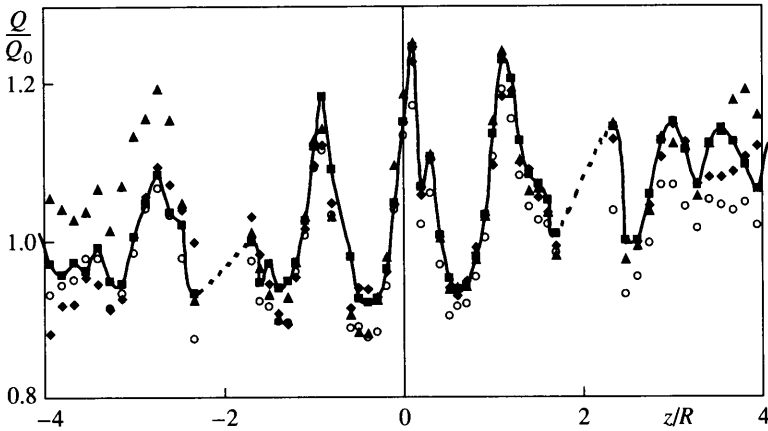
ГЕНЕРАЦИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР НА ЛОБОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА, ПОПЕРЕЧНО ОБТЕКАЕМОГО ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Исследована проблема образования пространственно-периодических структур на лобовой поверхности тела с цилиндрическим затуплением при его поперечном обтекании гиперзвуковым потоком. Предложен и подтвержден расчетами в рамках принятой модели возможный механизм генерации вихревых структур на лобовой поверхности затупленного тела, когда искривленная ударная волна производит вихревое течение, а вихрь, сохраняясь при слабой диссипации, воздействует на волну, поддерживая ее искривленную форму. Показано, что пространственно-периодическая мода гиперзвукового обтекания цилиндра может существовать при однородном набегающем потоке и однородных граничных условиях на теле.

Ключевые слова: гиперзвуковой поток, цилиндр, периодические структуры, бифуркация, вязкие течения.

Пространственно-периодические структуры на лобовой поверхности затупленного тела, перпендикулярного набегающему потоку, наблюдаются как в несжимаемой жидкости, так и в сжимаемом газе. В литературе хорошо известны вихри Гертлера, возникающие при больших значениях числа Рейнольдса (Re) в пограничном слое около поверхности вогнутой навстречу потоку [1]. Экспериментальные исследования поперечно-го обтекания кругового цилиндра несжимаемой жидкостью показали, что вдоль передней линии растекания появляются вихревые структуры с периодом в несколько толщин пограничного слоя [2]. При больших числах $M_\infty \gg 1$ возникновение пространственно-периодических вихрей в ударном слое между головным скачком и поверхностью обтекаемого тела сопряжено со значительными колебаниями распределения энthalпии и теплового потока на теле. Именно пространственные колебания теплового потока вдоль линии растекания на лобовой поверхности цилиндра явились экспериментальным свидетельством существования вихревых структур при гиперзвуковом обтекании. Например, в [3] приведены результаты экспериментальных исследований структуры течения и распределения теплового потока на лобовой поверхности цилиндра при его поперечном обтекании со сверх- и гиперзвуковыми скоростями ($M = 3, 5, 6$). Для измерения распределения теплового потока применялся метод термоиндикаторных покрытий, а визуализация предельных линий тока на поверхности цилиндра осуществлялась методом размываемых точек. Характерная особенность полученных картин предельных линий тока – их пространственная периодичность вдоль линии растекания. Такая же периодичность имела место и при анализе распределения теплового потока, амплитуда колебаний которого достигала $\pm 25\%$ и выше [3].

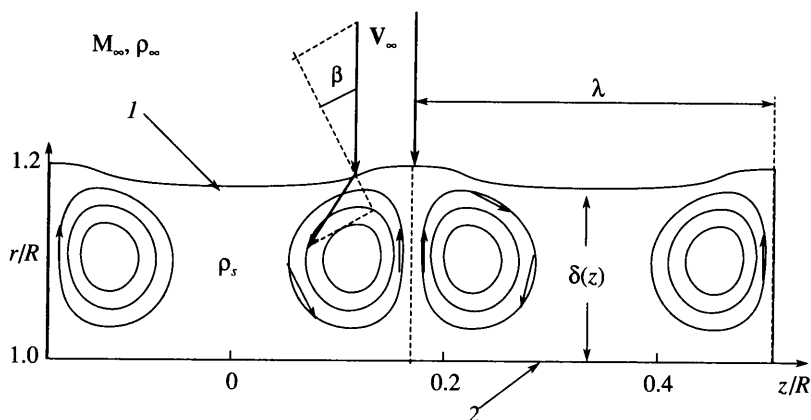
Подобные исследования неоднократно проводились в течение последних 30–40 лет, (см. например [3–11]). Их актуальность определяется тем, что передние кромки крыльев и воздухозаборников всех гиперзвуковых летательных аппаратов представляют собой затупленные тела типа цилиндра, обтекаемого под углом или без угла скольжения. Значительное количество исследований выполнено в ЦАГИ, но опубликованы только единичные результаты (см. например [3, 9]). В частности, за период 1980–1995 гг. коллекти-



Фиг. 1. Распределение теплового потока вдоль линии растекания на лобовой поверхности цилиндра, полученное в ударной трубе при $M_\infty = 6.1$, $Re_\infty \approx 1.7 \cdot 10^5$

вом под руководством Борового В.Я. исследован теплообмен на модели цилиндра с углами скольжения от $\chi = 0$ до $\chi = 75^\circ$ при числах Маха 6, 8 и 15.5 (результаты содержатся в отчетах ЦАГИ). Тепловой поток измерялся как с помощью термоиндикаторных покрытий, так и дискретными датчиками, установленными вдоль линии растекания цилиндра. При числах $Re_\infty > 8 \cdot 10^4$ на лобовой поверхности цилиндра обнаружены перпендикулярные образующим полосы с характерным периодом порядка радиуса цилиндра $\lambda \approx R$, причем максимальные величины теплового потока в два раза превышали минимальные. При сравнительно небольших числах $Re_\infty < 8 \cdot 10^4$ подобные структуры не обнаружены. Авторы высказывают предположение, что периодическая структура теплового потока может определяться вихрями Гертлера или быть вызвана неоднородностью набегающего потока.

В 2003 г. коллективом Боровой В.Я., Дроздов С.М., Струминская И.В. выполнено экспериментальное исследование распределения теплового потока на лобовой поверхности цилиндра в гиперзвуковом потоке. Испытания проведены в ударной трубе ЦАГИ УТ-1М при числе $M = 6.1$ в диапазоне чисел $Re_\infty = [0.49-3.3] \cdot 10^5$ с моделью цилиндра (радиус $R = 15$ мм), оснащенной 85 датчиками теплового потока, установленными на линии растекания с высоким пространственным разрешением (1 мм). Исследования показали, что на лобовой поверхности цилиндра образуется стационарная картина пространственных колебаний теплового потока с амплитудой до $\pm 20\%$ от средней величины и характерным периодом, примерно равным радиусу цилиндра $\lambda \approx R$. Некоторые результаты этих испытаний представлены на фиг. 1 в виде зависимости от координаты z/R (z направлена вдоль линии растекания) величины теплового потока Q , отнесенной к характерному значению теплового потока Q_0 в передней критической точке обтекания цилиндра, которое получено расчетом по формуле Фэя – Риддела [6]. Наиболее интенсивная и ярко выраженная волновая картина распределения теплового потока имеет место при средних числах $Re_\infty \approx 1.7 \cdot 10^5$. Если кратко обобщить экспериментальные результаты, то можно утверждать, что в широком диапазоне сверх- и гиперзвуковых режимов поперечного обтекания цилиндра, при достаточно больших числах Re картина линий тока и распределение теплового потока существенно не однородны вдоль лобовой линии растекания. Т.е. плоская (двумерная) мода течения либо не реализуется, либо искажена пространственными возмущениями, которые значительно усиливаются при обтекании цилиндра.



Фиг. 2. Структура вихревого потока на плоскости растекания между ударной волной (1) и передней кромкой затупленного тела (2): расчет при $Re = 0.5 \cdot 10^4$, $\lambda = 0.34 R$, $\gamma = 1.2$

В большинстве известных работ, например [1, 3], механизм образования подобных пространственных вихревых структур связывают с каким-либо видом неустойчивости плоской моды течения. Например, в пограничном слое, вниз по потоку от линии растекания может развиться неустойчивость Гертлера. Однако при сверх- и гиперзвуковых скоростях у такого теоретического объяснения имеются явные трудности. Прежде всего это большой размер (период λ) вихрей в поперечном направлении (порядка 2–3 толщин ударного слоя δ), что на два порядка превышает характерную длину волны неустойчивости Гертлера [3]. Кроме того, для эволюции неустойчивости Гертлера к предельным вихрям нужна некоторая дистанция вниз по течению. Следовательно, развитые вихри Гертлера не могут появиться прямо на плоскости растекания. Однако эксперименты показывают, что наиболее отчетливая периодическая картина линий тока и максимальные величины возмущений теплового потока имеют место именно на линии растекания [3].

Таким образом, пространственное вихревое течение имеет непогранслоный масштаб, оно должно взаимодействовать с ударной волной и возмущать ее. Из представленных выше соображений и родилась гипотеза механизма генерации вихревых структур на лобовой поверхности затупленного тела, отличная от модели вихрей Гертлера.

1. Математическая модель течения. Предположим, что в некотором диапазоне параметров потока ($M_\infty \gg 1$, $Re_\infty \gg 1$) на лобовой поверхности цилиндра возникло стационарное вихревое течение, периодическое вдоль оси цилиндра z . Пусть профиль сечения ударной волны плоскостью растекания (плоскость, параллельная оси цилиндра и вектору скорости набегающего потока) описывается функцией $R_2(z)$ – радиус отошедшей волны (фиг. 2). Тогда местный угол β между направлением набегающего потока и нормалью к поверхности волны будет определяться выражением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dR_2}{dz} \quad (1.1)$$

Из граничных условий Рэнкина–Гюгонио следует, что при $M_\infty \gg 1$ в лобовой области цилиндра, нормальная к ударной волне компонента вектора скорости набегающего потока уменьшается почти на порядок, а касательная компонента сохраняется (фиг. 2). В результате, после прохождения ударной волны поток приобретает сильную завихренность даже при небольшом искажении формы волны. Вектор этой завихренности на-

правлен перпендикулярно плоскости растекания, а величина может быть сопоставимой с завихренностью, вызванной искривлением ударной волны от формы лобового затупления тела в плоскости (r, φ) . Кроме того, величина модуля скорости на линии тока, прошедшей через искривленную часть скачка, будет существенно превышать модуль скорости на линии тока, прошедшей через скачок нормально. Если вязкая диссипация мала ($Re_\infty \gg 1$), то поток, взаимодействуя со стенкой, способен развернуться против набегающего течения и оттеснить ударную волну дальше от тела. При этом возникает вторая точка полного торможения между телом и скачком. В результате может установиться сбалансированное состояние, когда искривленная волна производит вихревое течение, а вихрь, сохраняясь при слабой диссипации, воздействует на волну, поддерживая ее искривленную форму. Энергетическая подпитка такой вихревой системы осуществляется из-за разности потерь импульса (полного давления) у частиц газа, прошедших через скачок нормально и под некоторым, пусть даже небольшим углом β к нормали.

Представленная схема организации самоподдерживающегося вихревого течения в окрестности плоскости (r, z) является гипотетической. Проверить реализуемость данной гипотезы можно с помощью численного моделирования. Причем используемая математическая модель должна содержать все основные физические факторы, определяющие течение на лобовой поверхности тела: скачок уплотнения с соответствующими граничными условиями на нем, пространственный характер течения, учет эффектов вязкости во всем течении и др. Всеми этими свойствами, безусловно, обладает система уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа. Если поперечные структуры существуют, то их можно найти среди решений этой системы.

Главная цель настоящей работы – изложение новой гипотезы механизма генерации вихревых структур на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке и ее аргументация с помощью расчетов по упрощенной математической модели изучаемого явления. Теоретическое и численное исследование течения в окрестности лобовой поверхности тел с цилиндрическим затуплением проведено с помощью математической модели, построенной на основе трехмерных уравнений Навье–Стокса, при использовании некоторых упрощающих предположений, характерных для гиперзвуковых течений, когда толщина ударного слоя δ мала по сравнению с радиусом затупления тела R , а форма отошедшей ударной волны близка к форме лобовой поверхности тела. В этом случае существует возможность расчета течения в окрестности линии растекания перед гладким затупленным телом без учета всех особенностей обтекания ниже по потоку. Подобно тому, как это делается в теории вязкого гиперзвукового ударного слоя (см. например [4, 5, 8, 9]), в предлагаемой модели изменение течения вниз по потоку от линии растекания описывается степенным рядом по углу φ с минимальным числом членов. Причем учитываются нормальный к поверхности тела градиент давления и все члены системы Навье–Стокса, отвечающие за изменение течения в поперечном и радиальном направлениях. Благодаря этому сохраняется возможность для описания сильного взаимодействия течения в ударном слое с головной волной – необходимого условия генерации вихревых структур. С другой стороны, такая модель заметно проще трехмерной системы Навье–Стокса, решение которой при больших числах Рейнольдса $Re > 10^3$ представляет серьезную проблему, с точки зрения как математической корректности применяемых численных алгоритмов, так и достаточного пространственного разрешения сетки.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) с центром на оси цилиндра z рассматривается гиперзвуковое ($M_\infty \gg 1$) поперечное обтекание цилиндрического тела с характерным радиусом затупления лобовой поверхности R . В теории вязкого гиперзвукового ударного слоя показано, что в малой окрестности линии растекания для совершенного газа плотность ρ можно считать постоянной. Действительно, из условий Рэнкина–Гюго-

нию за ударной волной, имеющей угол нормали α с вектором набегающего потока, можно получить выражение для плотности газа

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} + \frac{2}{(\gamma + 1)(M_\infty \sin \alpha)^2} \quad (1.2)$$

Здесь γ – отношение удельных теплоемкостей газа. В гиперзвуковом пределе ($M_\infty \gg 1$), в секторе $\varphi \ll 1$ с углами $\alpha \cong 1$ отношение величин плотности до и за скачком стремится к постоянному значению

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} = \frac{1}{\rho_s} \quad (1.3)$$

Строго говоря, из этого не следует, что по всей толщине ударного слоя плотность остается постоянной. Но эксперимент и расчеты плоских и осесимметричных течений, выполненные в рамках уравнений Эйлера и Навье–Стокса при условии адиабатической стенки показывают, что изменения плотности во всем указанном секторе действительно небольшие [5, 6, 11]. Поэтому везде далее предполагается, что величина ρ_s постоянна (1.3). Обезразмерим координаты на величину R , а радиальную v , азимутальную w и осевую u компоненты скорости на скорость набегающего потока V_∞ . Давление представим в виде

$$P = P_\infty \rho_s \gamma M_\infty^2 P(r, \varphi, z) = P_\infty \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \gamma M_\infty^2 P(r, \varphi, z) \quad (1.4)$$

Если дополнительно предположить, что в малой окрестности линии растекания вязкость постоянна и равна некоторой средней вязкости μ_s (например, вязкости при температуре за скачком T_s или температуре торможения T_0), то система уравнений для течения газа в ударном слое примет вид

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{r} &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \\ v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \\ \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial(ru)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= 0 \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь Re – число Рейнольдса, вычисленное по скорости набегающего потока и параметрам течения за ударной волной (в отличие от Re_∞ , которое определяется по параметрам набегающего потока)

$$\text{Re} = \frac{\rho_s \rho_\infty V_\infty R}{\mu_s} = \text{Re}_\infty \rho_s \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \quad (1.6)$$

В качестве граничных условий на теле ставятся условия

$$r = R_1(z): u = v = w = 0 \quad (1.7)$$

Причем, в общем случае поверхность тела может быть волнообразной $R_1(z) = R_1(z \pm \lambda)$, где λ – период. Однако главный интерес будет представлять случай гладкой цилиндрической поверхности тела $R_1 = 1$.

При $\text{Re}_\infty \gg 1$ на ударной волне, которая в общем случае тоже имеет волнообразную форму $R_2(z)$, выполняются условия Рэнкина–Гюгонио [4, 11]

$$(\mathbf{V}_\infty)_N = \rho_s(\mathbf{V})_N \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{V}_\infty)_\tau = (\mathbf{V})_\tau \quad (1.9)$$

$$\frac{P_\infty}{\rho_\infty} + (\mathbf{V}_\infty)_N^2 = \frac{P}{\rho_\infty} + \rho_s(\mathbf{V})_N^2 \quad (1.10)$$

В принятом предположении о совпадении формы ударной волны с формой лобовой поверхности тела нормаль к поверхности ударной волны всегда лежит в плоскости $\varphi = \text{const}$. В произвольном сечении с угловой координатой φ угол β (1) наклона касательной к следу ударной волны $R_2(z)$ равен углу между нормалью к поверхности волны и плоскостью $z = \text{const}$, параллельной вектору набегающего потока (фиг. 2). В этих обозначениях условия (1.8)–(1.10) примут безразмерный вид

$$-\cos\varphi \cos\beta = \rho_s(v \cos\beta - u \sin\beta); \quad \sin\varphi = w$$

$$-\cos\varphi \sin\beta = u \cos\beta + v \sin\beta$$

$$\cos^2\varphi \cos^2\beta + \frac{1}{\gamma M_\infty^2} = \rho_s P + \rho_s(v \cos\beta - u \sin\beta)^2$$

С учетом (1.1) и $M_\infty \gg 1$ получим граничные условия за ударной волной

$$\rho_s \left(v - u \frac{dR_2}{dz} \right) = -\cos\varphi; \quad \sin\varphi = w \quad (1.11)$$

$$u + v \frac{dR_2}{dz} = -\cos\varphi \frac{dR_2}{dz}; \quad \rho_s P \left(1 + \left(\frac{dR_2}{dz} \right)^2 \right) + \frac{\cos^2\varphi}{\rho_s} = \cos^2\varphi$$

По переменной z предполагается периодичность с некоторым периодом λ

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= u(r, \varphi, z + \lambda); & v(r, \varphi, z) &= v(r, \varphi, z + \lambda); \\ w(r, \varphi, z) &= w(r, \varphi, z + \lambda); & P(r, \varphi, z) &= P(r, \varphi, z + \lambda) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Система (1.5) с граничными условиями (1.7), (1.11), (1.12) может рассматриваться только в окрестности плоскости растекания $\varphi \ll 1$. Причем из условий симметрии относительно этой плоскости следует вид функциональной зависимости решений по φ

$$\begin{aligned} v(r, \varphi, z) &= V(r, z) + \dots + o(\varphi^{2k}); & w(r, \varphi, z) &= \varphi W(r, z) + \dots + o(\varphi^{2k+1}) \\ u(r, \varphi, z) &= U(r, z) + \dots + o(\varphi^{2k}); & P(r, \varphi, z) &= P(r, z) + \varphi^2 Q(r, z) + \dots + o(\varphi^{2k+2}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Сохранив в (1.5) члены с главным порядком по φ , получим

$$V \frac{\partial V}{\partial r} + U \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\Delta V - \frac{V + 2W}{r^2} \right]$$

$$\frac{W^2}{r} = \frac{\partial Q}{\partial r}$$

$$V \frac{\partial W}{\partial r} + U \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{W^2 + WV}{r} = -\frac{2Q}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\Delta W - \frac{W}{r^2} \right] \quad (1.14)$$

$$V \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta U$$

$$\frac{\partial(rV)}{\partial r} + \frac{\partial(rU)}{\partial z} + W = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Заметим, что в представлении давления (1.13) необходимо сохранить член с φ^2 . Иначе исчезает производная давления по φ , а с ней и причина, заставляющая газ растекаться по лобовой поверхности тела [4, 5, 8, 9]. Граничные условия на поверхности тела

$$r = R_1(z); U = V = W = 0 \quad (1.15)$$

От гиперзвуковой сущности исходного течения сжимаемого газа остаются только граничные условия за ударной волной $r = R_2(z)$

$$\rho_s \left(V - U \frac{dR_2}{dz} \right) = -1; \quad W = 1; \quad U + V \frac{dR_2}{dz} = -\frac{dR_2}{dz} \quad (1.16)$$

$$\rho_s P \left(1 + \left(\frac{dR_2}{dz} \right)^2 \right) - \frac{\rho_s - 1}{\rho_s} = 0; \quad \rho_s Q \left(1 + \left(\frac{dR_2}{dz} \right)^2 \right) + \frac{\rho_s - 1}{\rho_s} = 0$$

Нелинейность этих условий, а также то, что они ставятся на небольшом расстоянии от обтекаемого тела, это необходимые условия существования самоподдерживающихся пространственных вихревых структур. В течениях, где всюду число $M < 1$, такой механизм генерации невозможен. Условие (1.12) дает

$$\begin{aligned} U(r, z) &= U(r, z + \lambda); & V(r, z) &= V(r, z + \lambda) \\ W(r, z) &= W(r, z + \lambda); & P(r, z) &= P(r, z + \lambda), & Q(r, z) &= Q(r, z + \lambda) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Изложенная выше модель течения (1.14)–(1.17) – квазитрехмерная. С ее помощью ниже будут получены вихревые структуры в окрестности плоскости растекания. Но в начале рассмотрим классический двумерный случай течения на лобовой поверхности цилиндра и проведем сравнение с результатами, имеющимися в [4, 6, 8].

Если поле скорости набегающего потока однородное и радиус лобового затупления тела постоянный по z ($R = 1$), то у системы (1.14)–(1.17) есть плоское решение, в котором $U = 0$ и отсутствует зависимость неизвестных функций от z . В этом случае ударная волна имеет некоторый радиус R_2 , который тоже не зависит от z . С точностью до предположений о небольшой толщине ударного слоя и повторении ударной волной формы поверхности тела, можно считать, что оси волны и цилиндра совпадают, тогда

$$R_2 = 1 + \delta \quad (1.18)$$

где δ – неизвестный отход ударной волны или толщина ударного слоя.

Для того чтобы зафиксировать область интегрирования системы (1.14) между ударной волной и телом, введем новую переменную

$$Y = \frac{r-1}{\delta} \rightarrow r = 1 + Y\delta; \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{\delta} \frac{d}{dY} \quad (1.19)$$

Тогда из (1.14) для плоского случая получим систему

$$\delta \frac{W^2}{r} = \frac{dQ}{dY}$$

$$\frac{V dW}{\delta dY} + \frac{W^2 + WV + 2Q}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 W}{dY^2} + \frac{1}{\delta r} \frac{dW}{dY} - \frac{W}{r^2} \right] \quad (1.20)$$

$$r \frac{dV}{dY} + \delta(V + W) = 0$$

Граничные условия на теле $Y = 0$: $V = W = 0$, и за ударной волной

$$Y = 1: V = -\frac{1}{\rho_s}; \quad W = 1; \quad Q + \frac{\rho_s - 1}{\rho_s^2} = 0 \quad (1.21)$$

Пять граничных условий (1.21) для системы четвертого порядка (1.20) позволяют найти ее решения и неизвестный параметр δ – отход ударной волны от тела в точке расхождения. Уравнение для первого члена P из разложения давления (1.13) отделяется и решается после получения решения системы (1.20)

$$\frac{1 dP}{\delta dY} = -\frac{V dV}{\delta dY} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\delta^2} \frac{d^2 V}{dY^2} + \frac{1}{\delta r} \frac{dV}{dY} - \frac{(V + 2W)}{r^2} \right] \quad (1.22)$$

В [11] приведена аппроксимация величин δ , полученных в расчетах плоских течений, выполненных в рамках уравнений Эйлера

$$\delta = \frac{2.2}{\rho_s} \quad (1.23)$$

Эта аппроксимация хорошо совпадает с данными экспериментов при больших числа M_∞ и Re . В диапазоне $\text{Re} > 3 \cdot 10^3$ полученная в расчетах по (1.20), (1.21) величина δ изменяется незначительно и стремится к невязкому пределу, который зависит от γ . Сравнение с (1.23) показывает, что наилучшее количественное совпадение величин δ дает расчет при $\gamma = 1.1$, несколько хуже получаются результаты при $\gamma = 1.2$, а при $\gamma = 1.4$ расхождение достигает 25%. Этого следовало ожидать, поскольку справедливость принятых выше предположений выполняется при двух условиях: $M_\infty \gg 1$, $\gamma \rightarrow 1$ [5, 8, 10]. Таким образом, результаты расчетов плоской ветви решений (1.14)–(1.17) удовлетворительно согласуются с экспериментом и результатами расчетов других авторов [8, 9]. Причины имеющихся количественных расхождений с экспериментом, как известно, обусловлены принятыми упрощениями (1.3), (1.13). Однако с точки зрения главной задачи – исследования принципиального механизма организации течения вблизи лобовой поверхности тела, отмеченные расхождения не критичны.

2. Пространственно-периодические течения. Рассмотрим случай, когда поле течения зависит от координаты z . Эта неоднородность может быть вызвана формой обтекаемого тела (если $R_1(z) \neq \text{const}$) или стационарной неоднородностью набегающего потока. Однако в упомянутых примерах пространственная неоднородность – вынужденная и исчезает при отсутствии внешних возмущений. Интереснее найти такой режим обтекания, когда пространственная неоднородность существует при однородных граничных условиях и всех других внешних факторах. Формулируя в терминах теории бифуркаций, предполагаем, что наряду с ветвью плоских решений система (1.14)–(1.17) имеет ветвь решений с нетривиальной зависимостью от z .

Пусть течение в окрестности плоскости растекания на лобовой поверхности цилиндра периодическое по z с некоторым периодом $\lambda = 2\pi/s$. Тогда радиус ударной волны и ее отход от тела тоже становятся периодическими функциями z , которые могут быть представлены сходящимися рядами Фурье

$$R_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(insz); \quad R_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp(insz) \quad (2.1)$$

$$\delta(z) = R_2(z) - R_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(insz)$$

Коэффициенты Фурье для R_1 известны, например для наиболее интересного случая гладкого цилиндра $-A_0 = 1, A_n = 0$ при всех $n \neq 0$. Коэффициенты Фурье для R_2 неизвестны и должны быть найдены в результате решения задачи.

Подобно тому, как это было сделано в двумерном случае (1.19), зафиксируем область интегрирования системы (1.14), введя новые переменные

$$\begin{cases} x = z \\ y = \frac{r - R_1(z)}{[R_2(z) - R_1(z)]} \end{cases} \quad (2.2)$$

Такая замена преобразует сложную форму области течения в плоскости (r, z) к прямоугольнику $x \in [0 - \lambda], y \in [0 - 1]$. Подставим (2.2) в (1.14) и умножим уравнения импульсов на ненулевую функцию $r^2(R_2 - R_1)^2$, а уравнение неразрывности на $r(R_2 - R_1)$ (чтобы впоследствии получить аналитический вид Фурье разложения уравнений). В результате основная система, описывающая течение в переменных (y, x) , примет вид

$$\begin{aligned} U \frac{\partial V}{\partial x} r^2 (R_2 - R_1)^2 + \frac{\partial V}{\partial y} F_2 - W^2 r (R_2 - R_1)^2 = \\ = \frac{1}{\text{Re}} [\Delta V - (V + 2W)(R_2 - R_1)^2] - \frac{\partial P}{\partial y} r^2 (R_2 - R_1) \\ U \frac{\partial W}{\partial x} r^2 (R_2 - R_1)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} F_2 + (VW + W^2 + 2Q)r(R_2 - R_1)^2 = \frac{1}{\text{Re}} [\Delta W - W(R_2 - R_1)^2] \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) r^2 (R_2 - R_1)^2 + \frac{\partial U}{\partial y} F_2 = \frac{1}{\text{Re}} \Delta U + \frac{\partial P}{\partial y} F_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$r \frac{\partial Q}{\partial y} = W^2 (R_2 - R_1)$$

$$r \frac{\partial V}{\partial y} + V(R_2 - R_1) + r(R_2 - R_1) \frac{\partial U}{\partial x} - r \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + W(R_2 - R_1) = 0$$

$$\Delta = F_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + F_4 \frac{\partial}{\partial y} - 2F_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + r^2 (R_2 - R_1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$F_1 = r^2 (R_2 - R_1) \frac{\partial r}{\partial x}; \quad F_2 = vr^2 (R_2 - R_1) - uF_1; \quad F_3 = r^2 + \left(r \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2$$

$$F_4 = r(R_2 - R_1) + 2r^2 \frac{\partial r}{\partial x} (R_2' - R_1') - r^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (R_2 - R_1)$$

Граничные условия на теле ($y = 0$) и за ударной волной ($y = 1$) имеют вид соответственно (1.15) и (1.16) с заменой переменных по (2.2). Используя условие периодичности всех функций по координате x с периодом $\lambda = 2\pi/s$ (s – главное волновое число), представим решение системы (2.3) в виде рядов Фурье. Периодические решения (2.3) определены с точностью до произвольной начальной фазы. Для выделения единственного решения необходимо зафиксировать фазу одного произвольного коэффициента Фурье (с ненулевым номером). Анализируя систему (2.3) и граничные условия (1.15), (1.16), можно убедиться, что у системы могут быть периодические решения вида

$$U(y, x) = -U(y, -x); \quad V(y, x) = V(y, -x)$$

$$W(y, x) = W(y, -x); \quad P(y, x) = P(y, -x); \quad Q(y, x) = Q(y, -x)$$

Как будет показано ниже, один период такого течения представляют собой два симметричных вихря. Эти решения представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} iU_n(y) \\ V_n(y) \\ W_n(y) \\ P_n(y) \\ Q_n(y) \end{pmatrix} \exp(insx) \quad (2.4)$$

$$U_0(y) \equiv 0, \quad U_{-n}(y) = -U_n(y), \quad V_{-n}(y) = V_n(y)$$

$$W_{-n}(y) = W_n(y), \quad P_{-n}(y) = P_n(y), \quad Q_{-n}(y) = Q_n(y)$$

коэффициенты которых – действительные функции. Выбором формы решений в виде (2.4) фиксируется фаза. При этом полученная форма ударной волны и ее отход от тела (2.1) тоже будут симметричными функциями с действительными коэффициентами Фурье.

Поскольку границы области – тело и ударная волна, а между ними течение в принятом приближении несжимаемое, то функции U, V, W, P, Q непрерывны по x , как минимум, до третьих производных, если функция R_1 непрерывна, как минимум, до второй производной. Если же форма тела $R_1(x)$ бесконечно гладкая (например $R_1(x) = 1$), то все производные функций U, V, W, P, Q непрерывны по x . Следовательно, по известному свойству ряды Фурье (2.4) должны быстро сходиться при достаточно больших номерах n . Поэтому в (2.4) можно априори ограничиться конечным числом членов N .

Подстановка (2.4) в (2.3) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд гармоник. Для дальнейшего анализа необходимо рассмотреть лишь принципиальную структуру амплитудных уравнений, а их полный алгебраический вид используется только при написании программ. Полученные уравнения содержат много членов в виде функций, определяемых геометрией границ области (далее обозначены одним символом $X(x, y)$), функций, линейно зависящих от компонент вектора скорости течения U, V, W (далее обозначены Ψ), а также имеются произведения вида $XX, X\Psi$ и $\Psi\Psi$. Все произведения представляются в виде рядов Фурье, например

$$\langle \delta \rangle_n = \langle R_2(x) - R_1(x) \rangle_n = B_n - A_n = C_n \rightarrow \langle X \rangle_n$$

$$\langle \delta^2 \rangle_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} \rightarrow \langle XX \rangle_n \rightarrow \langle X \rangle_n$$

$$\langle \delta^2 W \rangle_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [W_k \langle XX \rangle_{n-k}] \rightarrow \langle \Psi X \rangle_n$$

Коэффициенты Фурье нелинейных членов вида $\Psi\Psi$ представляются в явной аналитической форме, например

$$\langle VW \rangle_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k W_{n-k} \rightarrow \langle \Psi\Psi \rangle_n$$

Для того чтобы система амплитудных уравнений имела нормализованный вид (содержала только первые производные неизвестных функций), введем следующие дополнительные неизвестные:

$$U'_n = \frac{dU_n}{dy}; \quad V'_n = \frac{dV_n}{dy}; \quad W'_n = \frac{dW_n}{dy} \quad (2.5)$$

Амплитудная система формально состоит из бесконечного числа блоков, каждый из которых представляет баланс членов уравнений, соответствующих гармонике с номером n . В нормализованном виде каждый блок с $n \neq 0$ состоит из 7 дифференциальных уравнений первого порядка и одного алгебраического уравнения, которым, с учетом (2.5), является уравнение неразрывности. Блок $n = 0$ состоит из 5 дифференциальных уравнений первого порядка и одного алгебраического уравнения. Нелинейные члены завязывают блоки с различными n между собой. С учетом (2.4) и (2.5) вектор неизвестных тоже состоит из блоков: 6 функций при $n = 0$ и по 8 функций при каждом $n \neq 0$. Ниже приведен один из блоков амплитудных уравнений при $n \neq 0$.

Алгебраическое уравнение неразрывности в главном порядке 1:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[V'_k (A_{n-k} + yC_{n-k}) - skU_k \langle X \rangle_{n-k} + (V_k + W_k)C_{n-k} + \frac{s}{2}(n-k)U'_k \langle X \rangle_{n-k} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Два уравнения радиальной компоненты импульса для порядков 1 и φ^2

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ skV_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} + V'_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} - W_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} + \frac{dP_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{dV'_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + V'_k \langle X \rangle_{n-k} - V_k \langle X \rangle_{n-k} - W_k \langle X \rangle_{n-k} \right] \right\} = 0 \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{dQ_k}{dy} (A_{n-k} + yC_{n-k}) - \langle W^2 \rangle_k C_{n-k} \right\} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение азимутальной компоненты импульса в главном порядке φ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ skW_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} + W'_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} + (V_k + W_k) \langle \Psi X \rangle_{n-k} + Q_k \langle X \rangle_{n-k} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{dW'_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + W'_k \langle X \rangle_{n-k} - W_k \langle X \rangle_{n-k} \right] \right\} = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение z компоненты импульса в главном порядке 1

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ skU_k \langle \Psi X \rangle_{n-k} + U_k' \langle \Psi X \rangle_{n-k} - \frac{dP_k}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + skP_k \langle X \rangle_{n-k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{dU_k'}{dy} \langle X \rangle_{n-k} + U_k' \langle X \rangle_{n-k} - (ks)^2 U_k \langle X \rangle_{n-k} \right] \right\} = 0 \quad (2.10)$$

Напомним, что в системе (2.6)–(2.10) одинаковыми символами $\langle X \rangle_j$ или $\langle \Psi X \rangle_j$ обозначены разные функции и их нельзя использовать как общий множитель. Таким образом, если во всех рядах ограничиться числом гармоник N , то амплитудная система (2.6)–(2.10) имеет порядок $(5 + 7N)$. Каждый блок граничных условий содержит 8 соотношений, являющихся Фурье-образами восьми граничных условий (1.15) и (1.16) – всего $(6 + 8N)$ условий. Одно “лишнее” соотношение при каждом n должно быть использовано для определения коэффициентов Фурье B_n неизвестной формы ударной волны (2.1).

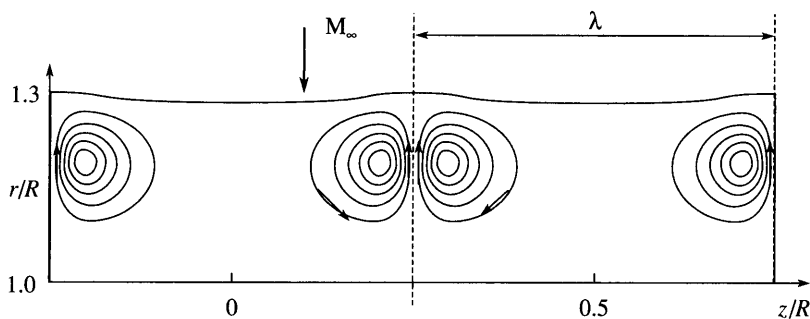
3. Результаты численного моделирования. Решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье (2.6)–(2.10) осуществлялось конечно-разностным методом, в котором аппроксимация производных выполнена по схеме центральных разностей второго порядка точности. Решение нелинейной алгебраической системы конечно-разностных уравнений производилось модифицированным методом Ньютона. Все вычисления выполнялись с двойной точностью. Правильность расчетов проверялась по быстрой сходимости итераций в методе Ньютона и результатов при увеличении числа гармоник в рядах Фурье (2.4), и пренебрежимо малой погрешности интегрального баланса сил и моментов, действующих на один период течения. Основной объем расчетов произведен при следующем пространственном разрешении: число гармоник на один период $N = 30$, число узлов сетки по координате $y - 201$.

Результаты численных исследований показали, что при однородном поле набегающего потока в окрестности плоскости растекания перед цилиндром постоянного радиуса $R_1(z) = 1$, из однородного по оси z начального приближения формируется только однородное по z течение, в котором все гармоники (2.4), кроме нулевой ($n = 0$), тождественно равны нулю. Нулевые гармоники и величина отхода ударной волны тождественны решениям плоской системы (1.20). Этот факт естествен, поскольку плоское решение – первая ветвь решений пространственной задачи. Суть проблемы состоит в том, чтобы найти пространственную ветвь или доказать, что она не существует.

Классический метод поиска других ветвей решений – линейный бифуркационный анализ. Как известно, он предполагает представление решений общего вида в форме суммы базового решения (известной ветви) и малого возмущения, линеаризацию уравнений относительно малого возмущения и решение задачи на собственные значения для параметра (например, числа Re), при котором возможно существование нетривиальных возмущений – рождение новых ветвей решений. Этот метод позволяет найти точки рождения новых ветвей, если они существуют на базовом решении. В частности, именно таким методом были найдены вихри Гертлера [1]. Но если бифуркация нелокальная и новая ветвь не пересекается с базовой, то линейный анализ не способен ее обнаружить.

На новую ветвь можно выйти при решении эволюционной задачи, стартуя с неоднородного поля начального приближения. Например, задав неоднородности по координате z в набегающем потоке (т.е. в граничных условиях перед ударной волной), получаем неоднородное решение, которое используется как нулевое приближение в новом расчете, где граничные условия перед ударной волной однородные.

В первой серии расчетов задавался поток с $\pm 2\%$ пилообразными пространственными колебаниями скорости V_{∞} . Как показывают методические исследования, поток в удар-



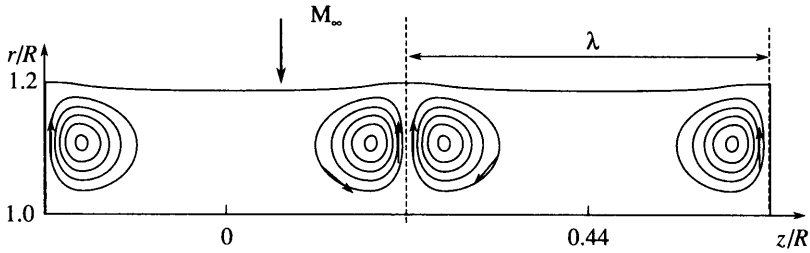
Фиг. 3. То же, что на фиг. 2: расчет при $Re = 10^4$, $\lambda = 0.5R$, $\gamma = 1.4$

ной трубе УТ-1М имеет примерно такую степень неоднородности поля в рабочей части. Расчеты показали, что величины возмущений скорости в ударном слое на лобовой поверхности цилиндра возрастают до $\pm 6\%$ от V_∞ , и появляется пространственная картина линий тока. Однако если $Re < 10^4$, то устранение внешних возмущений опять приводит течение на плоскую ветвь. И только при $Re \geq 10^4$ начальное поле возмущений трансформируется в систему стационарных периодических вихрей, которые не исчезают после снятия возмущений граничных условий. Оказалось, что при $Re \approx 10^4$ изначально возмущенное плоское решение скачком переходит на новую ветвь с периодическими по z вихрями.

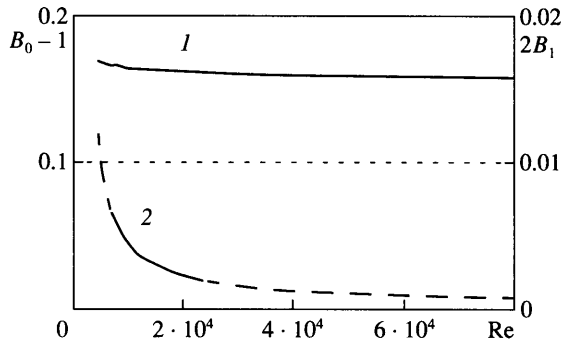
На фиг. 3 приведена картина линий тока в плоскости растекания (r, z) . Расчеты выполнены при $\gamma = 1.4$, $Re = 10^4$, $\lambda = 0.5R$. Один период течения состоит из двух противоположно вращающихся вихрей со значительной интенсивностью циркуляции. Как и предполагалось, ударная волна приняла искривленную по z форму, поток за ней приобрел завихренность, а вектор скорости между центрами вихрей направлен против набегающего потока. Вихревое течение интенсифицирует процесс передачи тепла от потока к стенке цилиндра, поэтому периодической структуре линий тока будет соответствовать периодическое изменение теплового потока на стенке. Однако в рамках данной модели уравнение энергии не используется и нельзя получить величину теплового потока на стенке.

Расчеты показали, что интенсивность вихревого движения достаточно велика. Существенно возрастает модуль скорости за искривленным скачком (по сравнению со скоростью за прямым скачком), а давление в ядрах вихрей в несколько раз ниже статического давления за скачком, которое близко к давлению торможения. Для несжимаемой жидкости в этом факте нет ничего особенного, давление может быть даже отрицательным. Но в газах такой провал давления не может происходить без существенного изменения плотности. Поэтому полученные в расчетах при $\gamma = 1.4$ количественные характеристики вихревой моды течения могут иметь существенные погрешности. Так как используемая математическая модель обтекания лобовой поверхности затупленного тела получена при условиях $M_\infty \gg 1$, $(\gamma - 1) \ll 1$, то необходимо подробно исследовать случай $(\gamma - 1) \ll 1$, для которого было установлено хорошее количественное соответствие результатов двумерных расчетов с экспериментом. Поле течения на фиг. 4 в плоскости растекания перед цилиндром, на который набегающий поток с параметрами $Re = 10^4$, $M_\infty \gg 1$, $\gamma = 1.2$, показывает, что за искривленным участком ударной волны вектор скорости существенно отклоняется и по модулю становится примерно в 2 раза больше вектора скорости за прямым скачком. Давление в ядрах вихрей падает тоже почти в 2 раза. Вероятно, в сжимаемом течении это приведет к некоторому уменьшению плотности газа, но вряд ли оно заметно повлияет на принципиальный механизм генерации вихрей.

Один из важных вопросов построения математической модели вихревых течений – это выбор пространственного периода λ . В данном подходе период – произвольно задаваемый параметр. В эксперименте период структур формируется сам, в грубом прибли-



Фиг. 4. То же, что на фиг. 2: расчет при $Re = 10^4$, $\lambda = 0.44R$, $\gamma = 1.2$



Фиг. 5. Расчет при $\gamma = 1.2$: 1 – среднего отхода ударной волны ($B_0 - 1$), 2 – амплитуды ($2B_1$) колебаний ударной волны вдоль оси z

жении он равен удвоенной толщине ударного слоя $\lambda \approx 2\delta$ и зависит от числа Re , γ и других параметров обтекания. Механизм формирования периода вихревых структур неизвестен. И это не только проблема данной задачи, а фундаментальная проблема большинства (если не всех) закритических периодических течений в однородном поле внешних факторов. В рамках линеаризованного подхода можно определить критическую длину волны моды течения, которая становится неустойчивой. Но при существенно закритических значениях параметров ($Re > Re^*$), имеется уже непрерывный интервал длин волн, для которых вторичная мода существует и устойчива. В настоящей работе проблема механизма выделения периода не рассматривается, а только проведено исследование зависимости вихревой моды от величины периода, навязанного течению. Расчеты показали, что область сильно завихренного течения слабо зависит от изменения периода, если $\lambda > 2\delta$. Характерный размер этой области $\Delta \approx 0.8\delta$ остается постоянным, и его можно рассматривать как некий собственный масштаб вихря. Установлено, что он существенно уменьшается с увеличением числа Re , при этом область, занятая вихрями, сжимается, интенсивность движения в ней ослабевает и снижается искривление ударной волны (сравнить фиг. 2 и 4).

Графики зависимости от числа Re среднего отхода ударной волны $\delta = (B_0 - 1)$ и первого коэффициента Фурье $2B_1$, характеризующего степень искривления ударной волны, приведены на фиг. 5 (расчет при $\gamma = 1.2$). Следует отметить, что при снижении Re степень искривления ударной волны не уменьшается, а возрастает. Увеличиваются и другие параметры, характеризующие интенсивность циркуляции газа в вихрях.

Заключение. Предложена новая гипотеза механизма формирования пространственно-периодических структур на лобовой поверхности тел с цилиндрическим затуплением при поперечном гиперзвуковом обтекании. Расчеты в рамках принятой модели показывают, что пространственно-периодическая мода гиперзвукового обтекания цилиндра действительно может существовать при однородном набегающем потоке и однородных

граничных условиях. Подтвержден и физический механизм генерации вихревых структур на лобовой поверхности затупленного тела, когда искривленная ударная волна производит вихревое течение, а вихрь, сохраняясь при слабой диссипации, воздействует на волну, поддерживая ее искривленную форму. Энергетическая подпитка такой вихревой системы осуществляется из-за разности потерь импульса (полного давления) у частиц газа, прошедших через скачок нормально и под некоторым, пусть даже небольшим углом β к нормали. Сама структура построенной квазитрехмерной математической модели течения позволяет сделать вывод, что обнаруженные периодические решения не являются вихрями Гертлера и не связаны с потерей устойчивости плоского течения. Согласно этой модели уравнения Навье–Стокса рассматриваются только в малой по углу ϕ окрестности плоскости растекания, и, следовательно, полученная пространственно-вихревая мода течения реализуется прямо на плоскости $\phi = 0$, где неустойчивость Гертлера никак себя не проявляет.

Но, конечно, нельзя делать вывод о том, что решены все принципиальные аспекты проблемы появления вихревых структур на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке. Предложен лишь возможный механизм вихребразования, физическую реализуемость которого еще нужно доказать. Например, неясно поведение пространственно-вихревой моды при малых ($Re < 500$) и очень больших Re , существуют ли такие течения в невязком газе? В расчетах по принятой модели во всем диапазоне исследованных чисел $Re = [1-80] \cdot 10^3$ точка пересечения плоской и пространственно-вихревой ветвей (точка бифуркации) не обнаружена. Это означает, что пространственно-вихревая ветвь решений – изолированная, а бифуркация к ней от плоской ветви носит нелокальный характер. При уменьшении Re пространственно-вихревая ветвь все дальше отходит от плоской ветви. Возможно поэтому в эксперименте пространственно-вихревая ветвь появляется только при достаточно больших числах Re . Однако этот вопрос требует дальнейшей глубокой проработки с помощью более совершенной математической модели и, разумеется, в эксперименте.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 05-01-08087офи_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gortler H. Dreidimensionales zur stabilitäts theorie laminaren grenzschichten // ZAMM. 1955. Bd. 35. H. 9/10. S. 362–364.
2. Piercy N.A.V., Richardson E.G. The variation of velocity amplitude close to the surface of cylinder moving through a viscous fluid // Phil. Mag. Ser. 7. 1928. V. 6. № 39. P. 970–977.
3. Лапина Н.Г., Башкин В.А. Экспериментальное исследование картины течения и теплообмена в окрестности линии растекания кругового цилиндра при поперечном его обтекании сверхзвуковым потоком с числами $M = 3, 5$ и 6 // Тр. ЦАГИ. 1983. Вып. 2203. С. 44–49.
4. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
5. Cheng H.K. The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // Paper Inst. Astronaut. Sci. 1963. № 63–92. 100 p.
6. Исследование гиперзвуковых течений // Под ред. Ф.Р. Риддел. М.: Мир, 1964. 544 с.
7. Ермак Ю.Н., Нейланд В.Я. К расчету теплопередачи на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 6. С. 153–156.
8. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
9. Анкудинов А.Л. Численное решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1845. 93 с.
10. Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Тирский Г.А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 19. С. 3–85.
11. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. Т. 1. 287 с.; Т. 2. 379 с.