

УДК 532.516.2.013.2:536.24

© 2006 г. Г.В. КУЗНЕЦОВ, М.А. ШЕРЕМЕТ

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ И ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ГРАНИЦАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

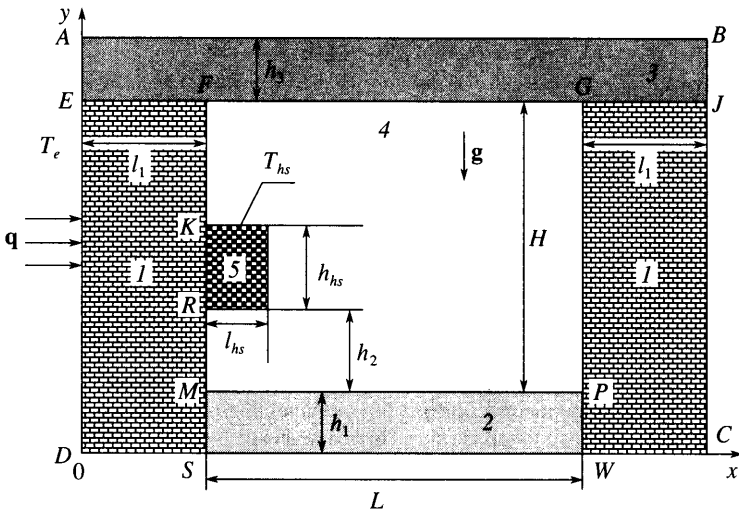
Численно исследуется нестационарный естественно-конвективный теплоперенос в замкнутой прямоугольной области с теплопроводными границами конечной толщины при локальном подогреве на внутренней стороне вертикальной стенки. На одной из внешних границ области решения реализуется конвективно-радиационный теплообмен. При числе Грасгофа $Gr > 10^6$ отчетливо проявляется неравномерное распределение температуры в газовой полости. На основании проведенных численных исследований выделены циркуляционные течения в различных зонах области решения, обусловленные влиянием источника тепловыделения, распространением возмущений от элементов твердой стенки, а также динамикой кондуктивного теплопереноса в твердом материале. Показаны масштабы влияния числа Грасгофа на гидродинамические и тепловые характеристики.

Ключевые слова: нестационарный естественно-конвективный теплоперенос, замкнутая прямоугольная область, теплопроводные твердые стенки, локальный источник тепловыделения.

Совместный анализ термогравитационной конвекции в полости, заполненной газом или жидкостью, и кондуктивного теплопереноса в твердых ограждающих полость стенках представляет практический интерес в различных областях техники (газовые турбины, проектирование топливных систем летательных аппаратов, теплообменники и др.) [1–5].

Известно мало решений задач такого типа [6–15]. Проведено численное моделирование процессов теплопереноса в осесимметричной постановке, но только для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности в твердой фазе [6, 7]. Установлено, что свободная конвекция в полости приводит к интенсификации отвода тепла в стенки [8]. Граничные условия IV рода для уравнения энергии (равенство температур и тепловых потоков на границе раздела двух сред) на всех внутренних границах оказывают значительное влияние на теплоотдачу при свободной конвекции в полостях [8, 9]. Так, например, имеет место влияние ограничивающих твердых стенок на условия возникновения свободной конвекции в замкнутой области [10, 11]. В [12] выполнен численный анализ свободной конвекции в плоскости с одномерными теплопроводящими и излучающими стенками. Исследования [13, 14] посвящены изучению влияния толщины и теплопроводности поперечных стенок на теплоотдачу при свободной конвекции в наклонных прямоугольных полостях с целью оценки эффективности применения ячеистых структур для снижения конвективных потерь тепла в плоскопластинчатых солнечных коллекторах. В [15] представлен анализ влияния теплопроводности стенки на свободную конвекцию в двумерной прямоугольной полости.

Однако в представленных задачах не рассматривалось влияние источника тепловыделения, локализованного в рабочей полости, совместно с нелинейным воздействием окружающей среды. Такая ситуация может возникать, в частности, в системах принудительного охлаждения электронного оборудования, в контейнерах для транспортировки опасных грузов, в помещениях как социального, так и промышленного назначения и др.



Фиг. 1. Область решения рассматриваемой задачи: 1, 2, 3 – элементы твердой фазы, 4 – газовая фаза, 5 – источник тепловыделения

Цель настоящей работы – математическое моделирование нестационарного теплопереноса с учетом механизмов кондукции и естественной конвекции в замкнутой прямоугольной области с локально сосредоточенным источником тепловыделения и неоднородными граничными условиями.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается процесс теплопереноса в области, представленной на фиг. 1. Область решения включает пять подобных по форме прямоугольников, имеющих разные размеры и различные теплофизические характеристики. Длина газовой полости – L , высота – H . Введена декартова система координат: начало координат совпадает с левым нижним углом области решения. На внутренней стороне одной из стенок локализован источник тепловыделения длиной l_{hs} и высотой h_{hs} . Расстояние от основания области решения, представляющего собой подобласть твердой фазы, до источника тепловыделения равно h_2 . Начальная температура во всей области решения, за исключением источника тепловыделения, постоянна и равна T_0 . Предполагалось, что источник тепловыделения имеет постоянную в течение всего времени температуру T_{hs} . Горизонтальные стенки конечной толщины ($y = 0$, $y = h_1 + H + h_3$) и вертикальная стенка ($x = 2l_1 + L$), образующие полость, рассматривались адиабатическими с наружной стороны. На стенке ($x = 0$) учитывался конвективно-радиационный теплообмен с окружающей средой.

Для описания полей течения и температур в газовой фазе использованы нестационарные двумерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска [16–21], а в твердой фазе рассматривалось двумерное уравнение теплопроводности [22, 23].

В качестве масштаба расстояния выбрана длина газовой полости L . Безразмерные переменные “завихренность скорости – функция тока – температура” приняты соответственно:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

$$\Delta T = T_{hs} - T_0, \quad V_0 = \sqrt{g\beta\Delta TL}$$

где β – температурный коэффициент объемного расширения, t – время, t_0 – масштаб времени, u , v – составляющие скорости в проекции на оси x , y соответственно, V_0 – масштаб скорости (скорость конвекции), T – температура, T_e – температура окружающей среды, g – ускорение свободного падения.

Безразмерные уравнения Буссинеска для газовой фазы (фиг. 1) запишем так:

$$\frac{1}{\text{No}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (1.1)$$

$$\Delta \Psi = -2\Omega \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\text{No}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Theta \quad (1.3)$$

$$\text{No} = \frac{V_0 t_0}{L}, \quad \text{Gr} = \frac{\beta g L^3 (T_{hs} - T_0)}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

Уравнение теплопроводности для твердой фазы имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \text{Fo}_i} = \Delta \Theta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Fo}_i = \frac{a_i t_0}{L^2} \quad (1.4)$$

Здесь No – число гомохронности, Gr – число Грасгофа, ν – коэффициент кинематической вязкости, Ω – вихрь скорости, Ψ – функция тока, Pr – число Прандтля, a_i – коэффициент температуропроводности i -й подобласти, Fo_i – число Фурье, соответствующее i -й подобласти.

Безразмерные граничные условия для системы уравнений (1.1)–(1.4) имеют вид:

$$(X, Y) \in AD$$

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, \tau)}{\partial X} = \text{Bi}_i \Theta_i(X, Y, \tau) + \text{Bi}_i \frac{T_0 - T_e}{T_{hs} - T_0} + Q$$

$$Q = N_i \left[\left(\Theta_i(X, Y, \tau) + \frac{T_0}{T_{hs} - T_0} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{T_{hs} - T_0} \right)^4 \right], \quad i = 1, 3$$

$$\text{Bi}_i = \frac{\alpha L}{\lambda_i}, \quad N_i = \frac{\varepsilon \sigma L (T_{hs} - T_0)^3}{\lambda_i}$$

$$(X, Y) \in AB \cup BC \cup CD$$

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, \tau)}{\partial X^k} = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad k = 1, 2; \quad X^1 \equiv X, \quad X^2 \equiv Y$$

$$(X, Y) \in EJ \cup FK \cup RS \cup GW \cup MP$$

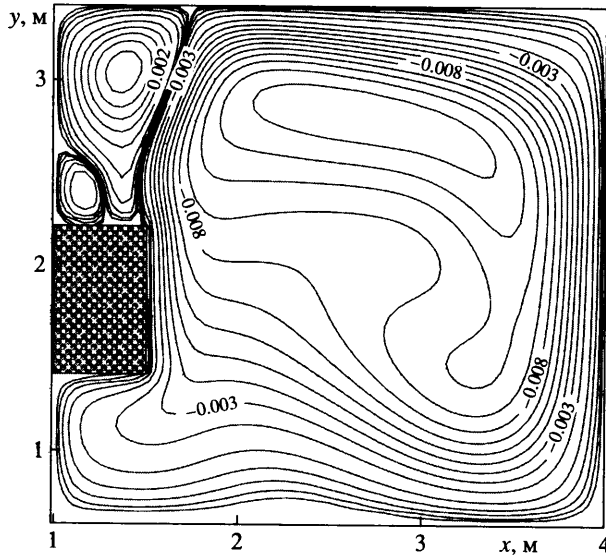
$$\Theta_i = \Theta_j; \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{j,i} \frac{\partial \Theta_j}{\partial X^k}, \quad i = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{1, 4}; \quad k = 1, 2$$

$$(X, Y) \in FK \cup RM \cup GP \quad (k=1, i=1)$$

$$(X, Y) \in FG \cup MP \quad (k=2, i=2, 3)$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X^k} = 0, \quad \Theta_i = \Theta_4; \quad \frac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{4,i} \frac{\partial \Theta_4}{\partial X^k}$$

Здесь Bi_i – число Био, соответствующее i -й подобласти; α – коэффициент теплообмена между внешней средой и рассматриваемой областью решения; N_i – число, характеризующее отношение тепловых потоков за счет излучения к тепловым потокам за счет кондукции, соответствующее i -й подобласти; ε – приведенная степень черноты; σ – постоянная Стефана–Больцмана; $\lambda_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$ – относительный коэффициент теплопроводности; λ_i – коэффициент теплопроводности i -ой подобласти.



Фиг. 2. Линии тока при $Gr = 10^7$

Уравнения (1.1)–(1.4) решались конечно-разностным методом [24] на равномерной сетке по неявной двухслойной схеме.

Для аппроксимации конвективных слагаемых в эволюционных уравнениях применялась монотонная схема Самарского [24]. Значение вихря скорости на границе определялось по формуле Вудса [25]. Для численного решения уравнений (1.1), (1.2) применялась разностная схема, которая строится по аналогии с известной схемой переменных направлений, предложенной в [26, 27] для решения уравнения теплопроводности. В этой схеме решение двумерной системы сводится к последовательному решению одномерных систем методом прогонки [24] как систем разностных уравнений с трехдиагональными матрицами. Уравнения (1.3), (1.4) решались с использованием локально одномерной схемы Самарского [24], причем для разрешения нелинейного граничного условия III рода использовался метод простой итерации.

Используемый метод переменных направлений и локально одномерная схема абсолютно устойчивы, и порядок аппроксимации разностной схемой исходной дифференциальной задачи $O(\tau + h^2 + l^2)$ [24].

Уравнение Пуассона (1.2) для функции тока решалось на каждом шаге по времени методом установления [25].

2. Обсуждение результатов. Исследования проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $Ho = 1$, $Gr = 10^7$ – 10^9 , $Pr = 0.71$ и определяющих температур: $T_e = 253^\circ\text{K}$, $T_{hs} = 333^\circ\text{K}$, $T_0 = 293^\circ\text{K}$. Численный анализ проведен на равномерной сетке размерностью 200×200 при следующих геометрических параметрах (фиг. 1): $l_1 = 1.0$ м, $l_{hs} = 0.5$ м, $L = 3.0$ м, $h_1 = 0.6$ м, $h_2 = 0.8$ м, $h_{hs} = 0.8$ м, $h_3 = 0.6$ м, $H = 2.8$ м. Поскольку рассматривался существенно нестационарный процесс $Ho = 1$, для определения масштаба времени использовалось следующее выражение: $t_0 = L/V_0 = \sqrt{L/g\beta\Delta T}$. Представленные распределения гидродинамических и тепловых параметров соответствуют моменту времени $t = 24$ ч.

Источник тепловыделения – причина появления трех циркуляционных течений (фиг. 2). Самый большой вихрь находится в центре воздушной полости и представляет собой движение воздуха по замкнутым кривым. В окрестности источника тепловыделе-

ния газовая среда поднимается, а у противоположной стены опускается. В газовой полости находятся еще два мелкомасштабных вихря над источником, появление которых объясняется конечным размером источника тепловыделения. Область над источником можно рассматривать как зону, одна из стенок которой имеет максимальную температуру. И, как видно из рисунка, массы газовой фазы опускаются вдоль холодной стены, а поднимаются со стороны движения центрального вихря.

Распределение изолиний вектора вихря наглядно показывает распространение возмущений от стенки и источника тепловыделения в глубь воздушной полости (фиг. 3, *a*). Интенсивнее всего образование вихрей происходит у источника тепловыделения, это объясняется интенсификацией процессов переноса у нагретого участка.

Распределение температуры (фиг. 3, *б*) демонстрирует влияние подъемной силы $\rho g \beta (T_{hs} - T_0)$, которая появляется вследствие неоднородности поля температуры. Температура в газовой среде распределяется достаточно неравномерно вследствие влияния архимедовой силы. Источник тепловыделения также оказывает влияние на распределение температуры на участке прямоугольной формы, у которого он находится. Поскольку рассматривается область с неоднородными теплофизическими характеристиками, то можно отметить, что изотермы при приближении к нижнему основанию рассматриваемой области выравниваются по границе раздела двух сред.

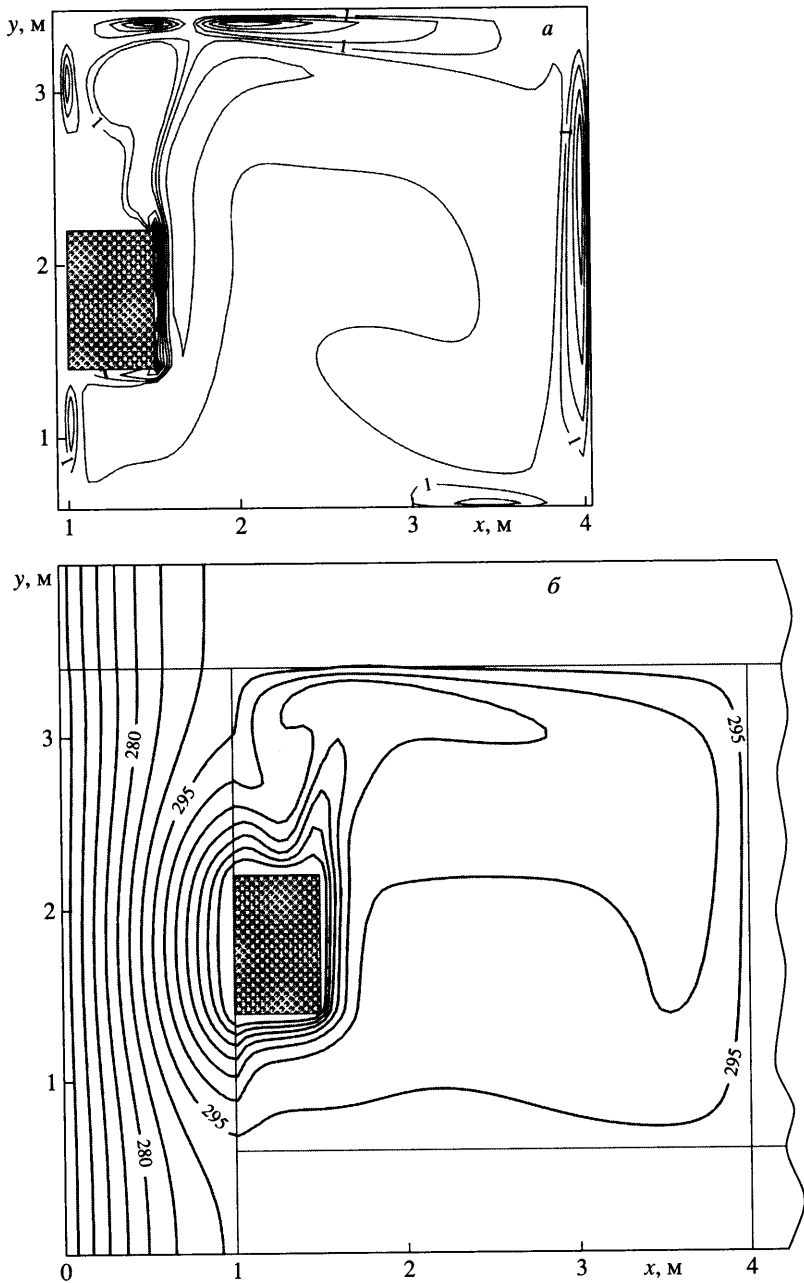
Силы внутреннего трения препятствуют возмущениям, исходящим от стенок. Объемные силы, наоборот, усиливают неупорядоченность течения. Следовательно, силы вязкого трения и объемные силы оказывают на течение противоположное влияние. Характер движения в рассматриваемой области связан с численным значением критерия Gr. Изменение характера движения влечет за собой изменение механизма переноса количества движения и тепла.

Были получены поля искоемых величин в режиме свободно-конвективного течения, соответствующего $Gr = 10^8$. При увеличении числа Грасгофа от 10^7 до 10^8 наблюдается существенное изменение в структуре течения (фиг. 4, *a*). Центральный вихрь неустойчив и распадается на вихри более малого масштаба. Вследствие влияния возмущений от твердой фазы в области основания появляется вторичное течение слабой интенсивности.

Поле температуры (фиг. 4, *б*) заметно изменяется; с ростом Gr происходит более интенсивный прогрев газовой фазы. Это отражается в положении изотермы, соответствующей 300°K . В области над источником тепловыделения немонотонная структура изотерм более отчетлива, чем на фиг. 3, *б*. Интенсивное свободно-конвективное течение может приводить к интенсификации кондуктивного теплопереноса в твердой фазе [8]. Результаты расчетов (фиг. 4, *б*) подтверждают данное утверждение – на границе твердой фазы и газовой над источником тепловыделения заметно продвижение изотермы, соответствующей 295°K , в глубь твердой фазы. Подобный характер распределения изолиний температуры в режиме $Gr = 10^7$ не отмечался, что доказывает существенную взаимосвязь между процессами теплопереноса в газовой фазе и элементах твердой стенки.

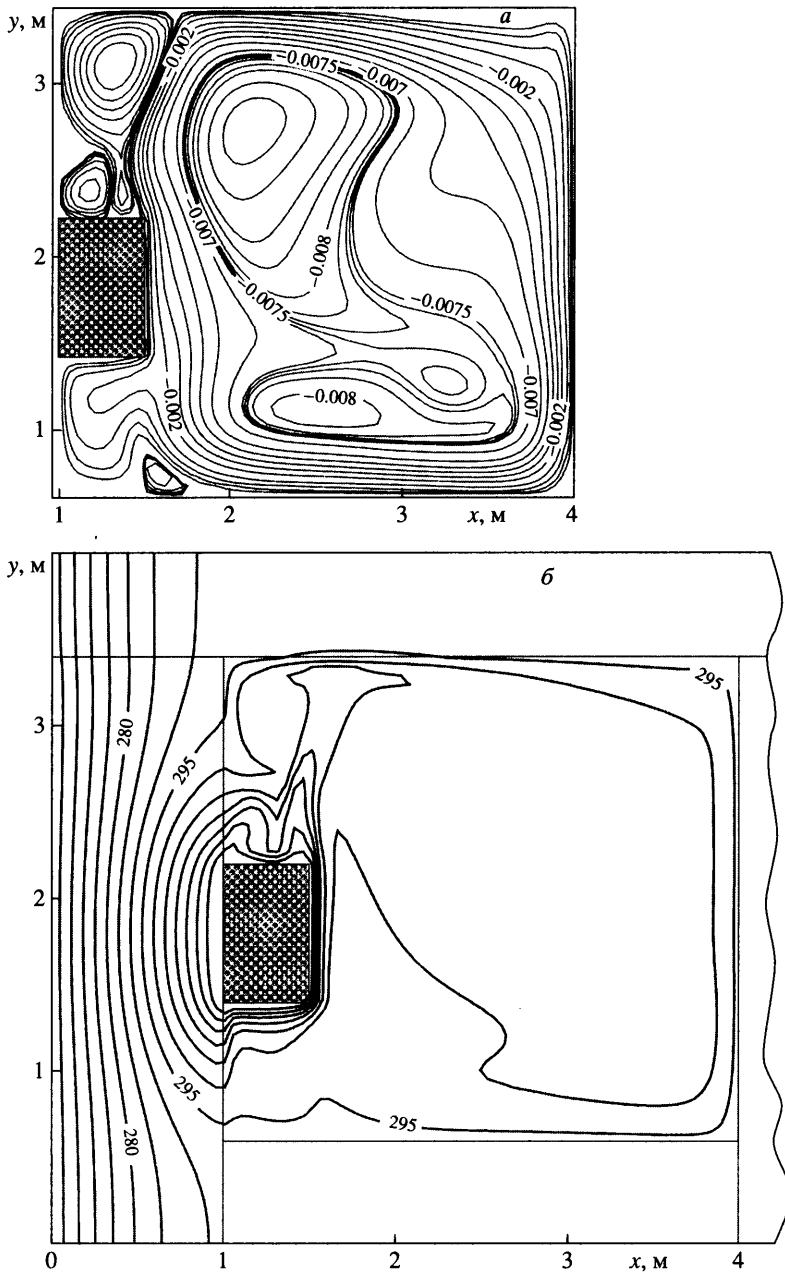
В режиме течения $Gr = 10^9$ вихрь над источником тепловыделения увеличивается в размерах и охватывает верхнюю область газовой фазы (фиг. 5, *a*). Заметно увеличение размеров области, соответствующей вторичному течению, в зоне над источником тепловыделения, что отражается на распределении температуры (фиг. 5, *б*). Вихрь на границе основания и газовой полости исчезает. При этом появляется вторичное течение, подобное исчезнувшему вихрю, на той же границе, но смещенное к правому углу. Структура центрального циркуляционного движения меняется, исчезает раздробленность, структура вихря становится целостной.

Происходит заметное перераспределение температуры (фиг. 5, *б*). Размеры зоны повышенной температуры (граница – изотерма 300°K) уменьшаются по сравнению со случаем $Gr = 10^8$. Происходит также уменьшение области распространения изотермы, соответствующей 305°K . Зона кондуктивного теплопереноса в твердой фазе над источни-



Фиг. 3. Поля вектора вихря скорости (а) и температуры (б) при $Gr = 10^7$ (изотермы изображены через $5^\circ K$)

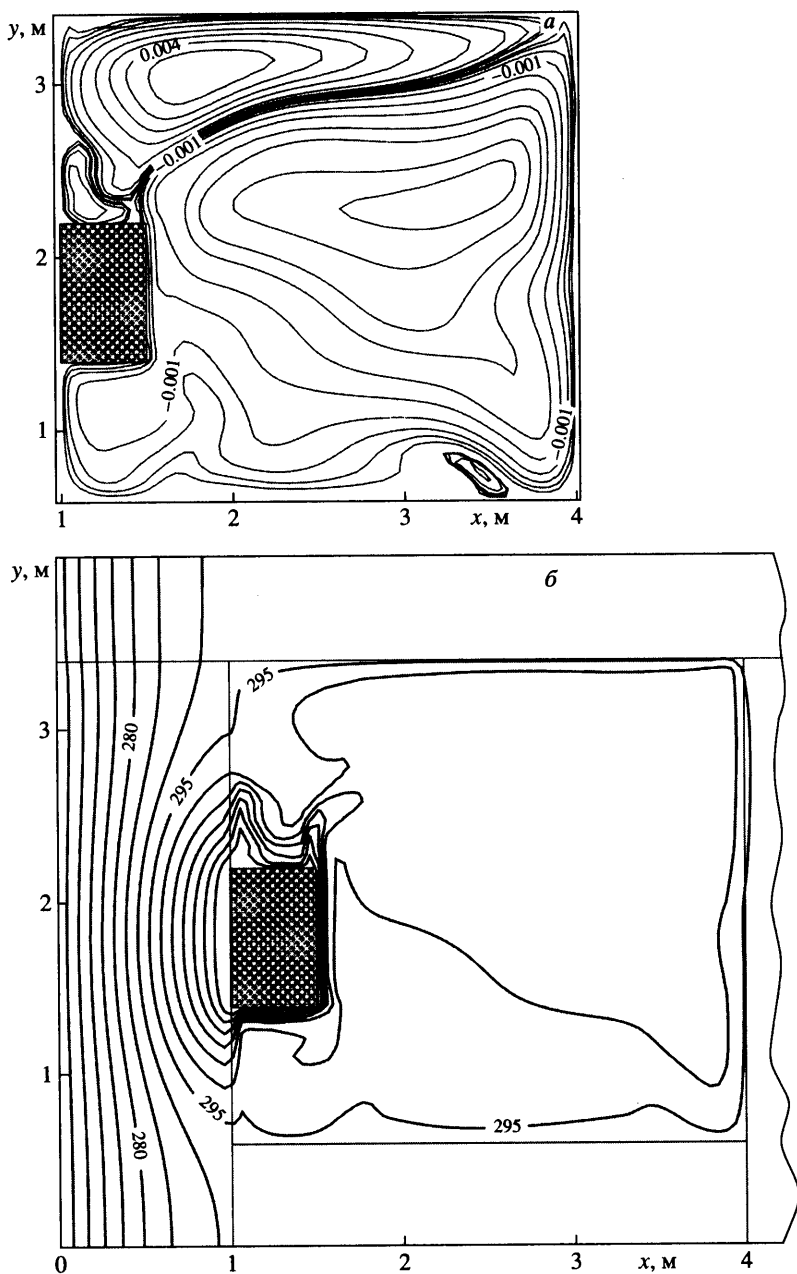
ком тепловыделения уменьшается по сравнению с фиг. 4, б, но при этом происходит интенсификация кондуктивного теплообмена в элементе твердой стенки, расположенном справа от источника. Область интенсивного теплопереноса смещается к левому верхнему углу источника тепловыделения.



Фиг. 4. Линии тока (а) и поле температуры (б) при $Gr = 10^8$ (изотермы изображены через $5^\circ K$)

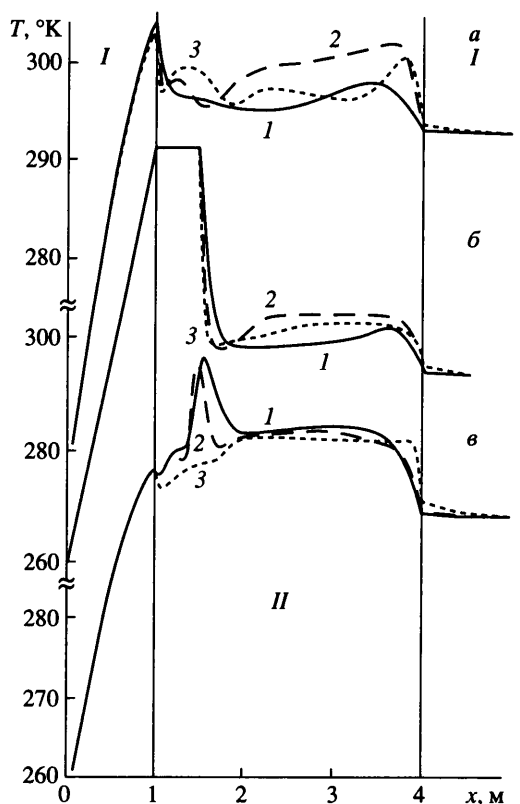
Рассмотрено влияние Gr на распределение температуры по длине области решения в трех характерных сечениях – под источником тепловыделения, по источнику и над источником.

При $Gr = 10^8$ наибольшая температура под источником достигается в области $1.8 < x < 4.0$ (фиг. 6, а). При этом в зоне, близкой к источнику тепловыделения, $1.2 < x < 1.8$ наи-



Фиг. 5. То же, что на фиг. 4 при $Gr = 10^9$

большая температура соответствует режиму $Gr = 10^9$. Большой градиент температуры на границе твердой и газовой фаз ($x = 1.0$ м) объясняется тем, что в твердой фазе температура распределяется достаточно равномерно, в то время как в газовой фазе вследствие существенного влияния подъемной силы интенсификация процесса теплопереноса происходит в области над источником тепловыделения.



Фиг. 6. Распределение температуры в сечении, проходящем под источником тепловыделения (а) ($y = 1.0$ м), по источнику (б) ($y = 1.8$ м), над источником (в) ($y = 2.8$ м) при $Gr = 10^7, 10^8, 10^9$ – кривые 1–3, I – твердая стенка, II – газовая полость

В сечении, проходящем через источник тепловыделения, в области нагревателя температура при $1.5 < x < 1.8$, соответствующая режиму $Gr = 10^7$, наибольшая (фиг. 6,б). С продвижением вглубь газовой фазы максимальная температура соответствует режиму $Gr = 10^8$.

Температура (фиг. 6,в) в каждом из режимов имеет достаточно немонотонный профиль, что объясняется большим влиянием подъемной силы.

Численный анализ показал, что режим свободно-конвективного течения, соответствующий $Gr = 10^9$, качественно отличается от остальных режимов. При таких значениях чисел Грасгофа формируется практически однородное в верхней половине области решения температурное поле. Это обусловлено тем, что на определенном уровне интенсивности процессов подвода энергии от источника и отвода через внешние границы происходит стабилизация течения и теплообмена. При этом локальность и ограниченность размеров источника тепловыделения незначительно отражаются на температурном поле большей части области решения. Сравнение обсуждаемых результатов с характеристиками процессов теплопереноса, соответствующих режимам относительно низких значений Gr (фиг. 2, 3), показывает, что интенсификация локального тепловыделения приводит к достаточно неочевидному результату. Вместо роста количества вихревых структур за счет их распада при увеличении Gr и соответствующего изменения температурных распределений осуществляется определенная стабилизация течения и теплообмена за счет влияния энергоемкой конденсированной фазы.

Заключение. Проведено численное исследование теплопереноса в замкнутой прямоугольной области при наличии внутри источника тепловыделения конечных размеров и стенок конечной толщины с различными теплофизическими характеристиками и с учетом теплообмена с внешней средой при числах Грасгофа 10^7 , 10^8 и 10^9 . Интенсификация теплопереноса в твердой фазе (температура в твердой фазе увеличилась на 2°K) вследствие влияния свободной конвекции была обнаружена при $\text{Gr} = 10^8$, 10^9 . С ростом числа Gr происходит изменение как масштабов, так и положения области интенсификации процесса теплопереноса. При этом при $\text{Gr} = 10^9$ имеет место существенно более равномерное распределение температуры по всей полости по сравнению с $\text{Gr} = 10^7$, 10^8 , что свидетельствует о смене режима течения. При больших Gr имеет место стабилизация течения и теплообмена за счет влияния энергоемкой конденсированной фазы, способной аккумулировать энергию в сотни раз превышающую по величине тепловыделение источника.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Томской области (код проекта 05-02-98006 конкурс p_обь_a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горобец В.Г. Сопряженный теплообмен вертикальных поверхностей с непрерывным оребрением при естественной конвекции // Изв. РАН. Энергетика. 2003. № 3. С. 132–140.
2. Петрикевич Б.Б., Панин С.Д., Астрахов А.В. Применение интегральной теории пограничного слоя для решения сопряженных задач теплообмена в каналах высокоэнергетических установок // Инж.-физ. ж. 2000. Т. 73. № 1. С. 131–137.
3. Лыков А.В., Алексащенко В.А., Алексащенко А.А. Сопряженные задачи конвективного теплообмена. Минск: Изд-во БГУ, 1971. 346 с.
4. Макаров М.В., Яньков Г.Г. Численное исследование процессов тепломассообмена в криогенном топливном баке // Тр. 3-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 2002. Т. 3. С. 102–107.
5. Бердников В.С., Винокуров В.В., Панченко В.И., Соловьев С.В. Теплообмен в классическом методе Чохральского // Инж.-физ. ж. 2001. Т. 74. № 4. С. 122–127.
6. Моисеева Л.А., Черкасов С.Г. Естественная конвекция и теплообмен в цилиндрической емкости при распределенном подводе тепла и наличии локальных тепловых стоков на стенке // Тр. 2-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1998. Т. 3. С. 108–111.
7. Моисеева Л.А., Черкасов С.Г. Теоретическое исследование квазистационарного режима естественной конвекции в вертикальной цилиндрической емкости с теплопроводной стенкой // Труды 3-й Рос. нац. конф. по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 2002. Т. 3. С. 116–119.
8. Эль-Шербини, Холландс, Рейтби. Влияние температурных граничных условий на свободную конвекцию в вертикальных и наклонных слоях воздуха // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача. 1982. Т. 104. № 3. С. 107–114.
9. Catton I. Natural convection in enclosures // Proc. 6th Intern. Heat Transfer Conf. Toronto, Washington, D.C.: Hemisphere, 1978. V. 6. P. 13–31.
10. Catton I. The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1972. V. 15. № 4. P. 665–672.
11. Ким, Висканта. Влияние теплопроводности стенки на теплообмен при свободной конвекции в полости квадратного сечения // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача. 1985. Т. 107. № 1. С. 141–150.
12. Larson D.W., Viskanta R. Transient combined laminar free convection and radiation in a rectangular enclosure // J. Fluid. Mech. 1976. V. 78. Pt. 1. P. 65–85.
13. Koutsoheras W., Charters W.W.S. Natural convection phenomena in inclined cells with finite walls – a numerical solution // Solar Energy. 1977. V. 19. № 5. P. 433–438.
14. Мейер, Митчелл, Эль-Вакил. Влияние тепловых свойств ячейки на свободную конвекцию в наклонных прямоугольных ячейках // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача. 1982. Т. 104. № 1. С. 120–126.

15. Kim D.M., Viskanta R. Heat transfer by combined wall conduction and natural convection through a rectangular solid with a cavity // Proc. ASME/JSME Joint Thermal Engineering Conf. N. Y., 1983. V. 1. P. 313–322.
16. Джалурия Й. Естественная конвекция: Тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 399 с.
17. Соковишин Ю.А., Мартыненко О.Г. Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 224 с.
18. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
19. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
20. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск: Изд-во Университетское, 1988. 167 с.
21. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Влияние числа Прандтля на структуру и теплообмен при естественной конвекции // Инж.-физ. ж. 1973. Т. 24. № 5. С. 842–849.
22. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.
23. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование пространственного теплопереноса в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2003. Т. 306. № 6. С. 69–72.
24. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
25. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
26. Douglas J. On the numerical integration of $D^2u - D_x^2 + D^2u - D_y^2 = Du - Dt$ by implicit methods // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1955. V. 3. № 1. P. 42–65.
27. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1955. V. 3. № 1. P. 28–41.

Томск

Поступила в редакцию
6.VI.2005