

УДК 532.546.013.4:536.24:519.6

© 2006 г. В. Н. ГОВОРУХИН, И. В. ШЕВЧЕНКО

## СЦЕНАРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрена задача плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере с постоянно поддерживаемым линейным профилем температуры на границе. Численно исследовано появление нестационарных режимов. Показано, что сценарии их возникновения зависят от размеров контейнера и фильтрационного числа Рэлея и могут быть следующими: рождение устойчивого и неустойчивого периодических режимов в результате односторонней бифуркации, рождение устойчивого периодического режима в результате косимметричной бифуркации Андронова–Хопфа, возникновение хаотического аттрактора, ответвление устойчивого квазипериодического режима от точки однопараметрического семейства стационарных режимов и рождение неустойчивых периодических режимов в результате распада гомоклинных траекторий. Специфика большинства перечисленных бифуркаций объясняется косимметрией изучаемой задачи.

*Ключевые слова:* фильтрационная конвекция, косимметрия, семейства равновесий, нестационарные режимы, косимметричные бифуркации.

Задача плоской фильтрационной конвекции уже многие годы служит предметом активного изучения. Теоретический интерес к ней обусловлен наличием у исследуемых уравнений косимметрии, являющейся причиной неклассических бифуркаций и существованием однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов. При исследовании конвекции в горизонтальном цилиндре с произвольной формой поперечного сечения и с высокотеплопроводными боковыми стенками [1] было обнаружено однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов. Несколько позже этот факт нашел экспериментальное подтверждение [2]. В дальнейшем было показано [3], что причина существования такого семейства – косимметрия соответствующих дифференциальных уравнений. В результате первого бифуркационного перехода при потере устойчивости состоянием покоя рождается однопараметрическое семейство (цикл) устойчивых стационарных режимов.

Теория косимметрии получила дальнейшее развитие в ряде работ. В [4, 5] детально рассмотрены и проанализированы возможные бифуркации однопараметрических семейств равновесий косимметричных динамических систем. В случае бифуркации Андронова–Хопфа в косимметричных системах было установлено [6], что рождение периодического режима в таких системах не обязательно связано с первой потерей устойчивости на семействе равновесий, а имеет место эффект затягивания бифуркации по параметру. Здесь же дано необходимое условие ответвления периодического режима от некосимметричного равновесия, принадлежащего однопараметрическому семейству. В [7] исследована бифуркация ответвления тора от семейства стационаров, которая, как и бифуркация Андронова – Хопфа, отличается от классического случая, и дано условие рождения тора.

Параллельно с теоретическими исследованиями проводились работы по численному анализу двумерной задачи фильтрационной конвекции с косимметрией. До сих пор основное внимание в этих исследованиях уделялось однопараметрическим семействам стационарных режимов, их бифуркациям и специальным численным методам, позволяющим сохранить свойство косимметрии и проводить исследования в условиях вырожде-

ния решения. В первых вычислительных работах [8, 9] с помощью метода Галеркина исследовалась потеря устойчивости на первичном однопараметрическом семействе стационарных режимов и был предложен алгоритм вычисления однопараметрических семейств равновесий. Подробно метод продолжения кривой равновесий по скрытому параметру был изложен в [10]. В [11] дан детальный анализ второго бифуркационного перехода – возникновение неустойчивых дуг на первичном семействе стационарных режимов. Аналогичные исследования однопараметрических семейств стационарных режимов проводились и с использованием сеточных аппроксимаций исходных уравнений в частных производных (например [12]).

На данный момент детальных исследований возникновения нестационарных режимов не проводилось, если не считать некоторых результатов работ [8, 13, 14]. Ниже будут приведены численные результаты анализа возникновения нестационарных режимов и описаны соответствующие бифуркации. Особое внимание будет уделено роли косимметрии и однопараметрического семейства стационарных режимов в этих механизмах.

**1. Постановка задачи и схема численного исследования.** Рассмотрим прямоугольный контейнер  $D = [0, a] \times [0, b]$ , заполненный пористой средой и насыщенный жидкостью. Запишем уравнения гравитационной конвекции жидкости, находящейся в контейнере  $D$  и подогреваемой снизу, в виде [1, 3]

$$\Delta\psi = \frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \Delta\theta + \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \lambda = \frac{\beta g A K l}{\chi\nu}$$
(1.1)

Здесь  $\psi(x, y, t)$  – функция тока,  $\theta(x, y, t)$  – отклонение температуры от равновесного по вертикали профиля,  $(x, y)$  – декартовы координаты на плоскости,  $t$  – время, а индекс при функции определяет соответствующую производную. Параметр  $\lambda$  – фильтрационное число Рэлея,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $A$  – характерная разность температур,  $K$  – проницаемость,  $l$  – характерная длина,  $\chi, \nu$  – коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости жидкости.

На границе области  $D$  заданы краевые условия, соответствующие постоянному линейному температурному профилю на границе и ее непроницаемости

$$\theta|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0$$
(1.2)

Начальное условие для системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$t = 0: \theta(x, y) = \theta_0(x, y)$$
(1.3)

где  $\theta_0(x, y)$  – заданная в  $D$  функция.

Задача (1.1), (1.2) обладает косимметрией  $L$  [3,15]

$$\int_D (\Delta\theta + \lambda\psi_x - \psi_y\theta_x + \psi_x\theta_y)L dx dy = 0, \quad L = \psi$$
(1.4)

Кроме того, система (1.1), (1.2) имеет две дискретные симметрии, глобально разрешима, диссипативна и при малых значениях параметра  $\lambda$  глобально устойчиво состояние покоя. Выражение для критических значений устойчивости состояния покоя имеет вид [15]

$$\lambda_{m,n} = 4\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad m, n = 1, 2, \dots$$
(1.5)

Все критические числа (1.5), по крайней мере, двукратны, и каждому переходу параметра  $\lambda$  через значение  $\lambda_{m,n}$  соответствует бифуркация рождения однопараметрического семейства стационарных режимов. При  $\lambda = \lambda_{1,1}$  от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов [3]. Все равновесия семейства нейтрально устойчивы вдоль цикла и асимптотически устойчивы в трансверсальных к нему направлениях, и их спектр зависит от координат равновесия. Это говорит о том, что семейство не может быть результатом действия никакой группы симметрий [15]. Каждому переходу  $\lambda$  через последующие критические значения  $\lambda_{m,n}$  соответствует бифуркация рождения цикла неустойчивых режимов.

Численный анализ показал [8, 11], что имеется значение  $\lambda_i$ , при котором возникает неустойчивость на первичном семействе стационарных режимов. Тип неустойчивости зависит от отношения сторон прямоугольника и может быть как колебательной, так и монотонной. При  $\lambda > \lambda_i$  на семействах могут сосуществовать устойчивые и неустойчивые дуги стационарных режимов с различным типом неустойчивости.

Из теории косимметрии [6, 7] и результатов вычислений [8, 14] известно, что наряду с семейством стационарных конвективных режимов в задачах с косимметрией могут существовать нестационарные. Поиск таких режимов и дальнейшее их изучение аналитическими методами в исследуемой задаче практически невозможно, поэтому приходится прибегать к численному анализу.

Для аппроксимации задачи (1.1)–(1.3) используется метод Галеркина. Решение задачи разыскивается в следующей форме:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \psi_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y), \quad \theta = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \theta_{i,j}(t) \phi_{i,j}(x, y), \quad (1.6)$$

$$\phi_{i,j}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(m_i \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n_j \frac{\pi y}{b}\right)$$

Подстановка (1.6) в (1.1) и операции проектирования приводят к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $N = n_x \times n_y$  относительно функций  $\theta_{i,j}$ . Коэффициенты  $\psi_{i,j}$  однозначно выражаются через неизвестные  $\theta_{i,j}$  из аппроксимации первого уравнения системы (1.1). В качестве участвующих в разложении (1.6) функций использовались  $\phi_{i,j}(x, y)$  с номерами  $m_i = i$  и  $n_j = j$ , определяемыми по схеме, предложенной в [11].

Для проверки адекватности вычислений рассматривались аппроксимации различных порядков и проводился сравнительный анализ результатов. Размерность системы  $N$  считалась достаточной только в том случае, если увеличение  $N$  в 2 раза влекло изменение численных результатов, не превосходящее 5%. В численном исследовании рассматривались системы различных порядков аппроксимации, гарантирующих допустимое расхождение на рассматриваемом интервале изменения параметра  $b$  при  $a = 20$ . Ниже представлена зависимость размерности используемой галеркинской системы от интервала изменения параметра  $b$ .

Диапазон изменений $b$	$8 \leq b \leq 19$	$19 < b \leq 35$	$35 < b \leq 75$
Размерность системы	200/400	175/350	150/300

Исследование устойчивых режимов выполнено методом установления, основанном на методе Рунге – Кутты 4-го порядка, а неустойчивых периодических режимов – методом неподвижной точки отображения сдвига вдоль траектории. Кратко опишем второй метод.

Рассмотрим систему обыкновенных автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (x \in R^n) \quad (1.7)$$

Обозначим через  $U_t(x)$  оператор сдвига вдоль траектории системы (1.7) на время  $t$  из точки  $x$ . Задача поиска решения системы (1.7) с периодом  $T$  сводится к нахождению неподвижной точки оператора  $U_T(x)$ , т.е. точки  $x_*$ , удовлетворяющей условию  $x_* = U_T(x_*)$ . Для ее поиска следует решать систему уравнений вида

$$g(x) = x - U_T(x) = 0 \quad (1.8)$$

где  $T$  – неизвестный период, а  $x$  – неизвестная точка, принадлежащая периодическому решению. Система уравнений (1.8) имеет размерность  $n$  и содержит  $n + 1$  неизвестных. Для того чтобы сделать систему определенной, предположим, что известна достаточно близкая к периодическому решению точка  $x_0$ . Тогда можно зафиксировать одну из координат  $x_*$ , например, с номером  $k$ , а неизвестной с номером  $k$  будем считать период  $T$ . Теперь можно применить для решения уравнения (1.8) метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - M^{-1}(x_n)g(x_n)$$

Здесь  $M$  – матрица Якоби системы (1.8). Для вычисления элементов матрицы  $M$  вместе с решением задачи Коши для уравнения (1.7) следует решать  $n - 1$  линейаризованных на решении задач Коши (для поиска производных по начальным данным). Таким образом, для каждого шага метода Ньютона необходимо решить задачу Коши для системы  $n(n - 1)$  обыкновенных дифференциальных уравнений.

Бифуркационная кривая, соответствующая рождению нестационарных режимов, строилась по следующей схеме. Для фиксированного значения  $b \in [8, 75]$  и заданного значения  $\lambda > \lambda_c$  методом установления находился устойчивый периодический или квазипериодический режим. Далее развитие режима прослеживалось при уменьшении параметра  $\lambda$  с шагом  $\Delta\lambda$  (минимальное используемое значение равнялось 0.0001) вплоть до его рождения.

**2. Результаты исследования.** Построена критическая кривая, соответствующая возникновению нестационарных режимов, изучено развитие наиболее сложных режимов. Расчеты проводились при изменении параметров  $\lambda$  и  $b$  и фиксированном значении параметра  $a = 20$ .

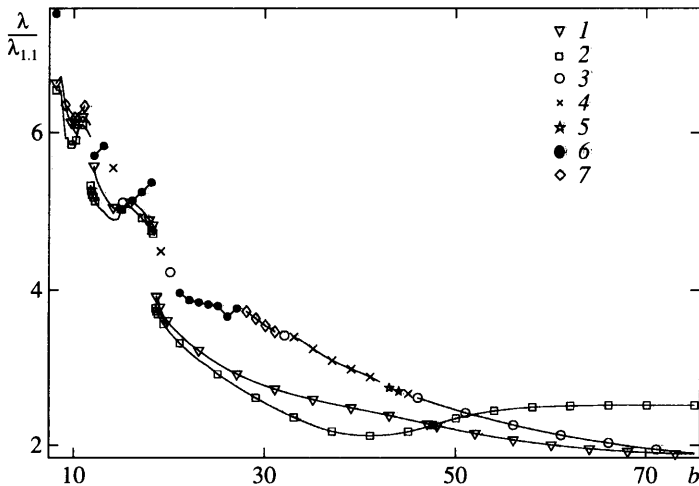
Для полноты изложения наряду с критическими кривыми рождения нестационарных режимов приведены кривые, соответствующие колебательной и монотонной потери устойчивости на первичном семействе стационаров, детальный анализ которых проведен в [11].

Часть результатов исследований представлена графически, где в качестве осей координат выбраны вертикальный поток тепла  $Nu_v$  через нижнюю границу и горизонтальный поток тепла  $Nu_h$  через середину области, определяемые выражениями

$$Nu_v = \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad Nu_h = \int_0^b \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\frac{a}{2}} dy$$

Значение  $Nu_v$  определено с точностью до константы –  $A/b$ .

В работе введена параметризация стационарных конвективных режимов семейства в диапазоне  $s \in [0, 1]$  и нестационарных – на отрезке  $\tau \in [0, T]$ , причем точке  $s = 0$  соответствует точка  $(\min(Nu_v), 0)$  плоскости  $(Nu_v, Nu_h)$ , а отсчет ведется по часовой стрелке. Точке  $\tau = 0$  соответствует нестационарный конвективный режим в начальный момент времени  $t = 0$ .



Фиг. 1. Критические кривые для различных бифуркаций ( $a = 20$ ): 1 – колебательная потеря устойчивости, 2 – монотонная потеря устойчивости, 3 – односторонняя бифуркация рождения устойчивого и неустойчивого периодических режимов, 4 – рождение хаотического режима, 5 – бифуркация распада гомоклининой траектории, 6 – бифуркация Андронова–Хопфа рождения устойчивого периодического режима, 7 – бифуркация рождения устойчивого инвариантного тора

Локальная вертикальная теплопередача на нижней и верхней границах контейнера, определяемая выражениями

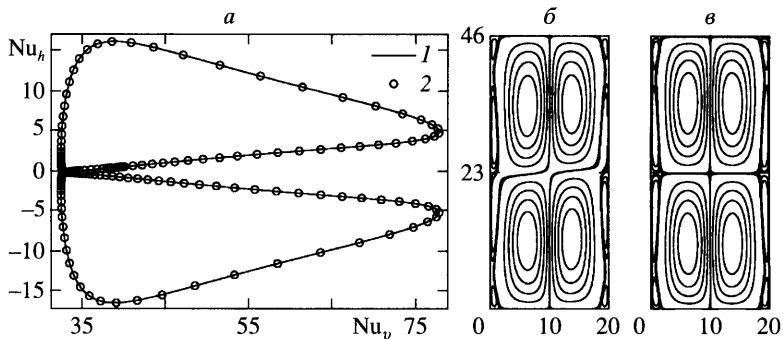
$$Nu_l^0(x) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad Nu_l^b(x) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=b}, \quad x \in [0, a]$$

сильно зависит от геометрии контейнера, и на семействе стационаров могут существовать конвективные режимы с различной теплопередачей [11]. Для вытянутых по вертикали прямоугольников сосуществуют режимы с высокой и низкой теплопередачей, а для широких контейнеров характеристики всех режимов практически одинаковы. Исследование теплопередачи проведено и для нестационарных режимов.

На фиг. 1 представлены критические кривые, соответствующие рождению нестационарных режимов при изменении отношения сторон контейнера. Из рисунка видно, что в зависимости от размеров контейнера нестационарные режимы рождаются в результате различных бифуркаций. Во всех случаях режимы возникают при  $\lambda > \lambda_c$ , причем в большинстве случаев после второй потери устойчивости на однопараметрическом семействе стационаров, а при  $b \geq 51.691$  – после первой. При этом во многих случаях с нестационарными режимами сосуществуют устойчивые стационарные режимы, принадлежащие однопараметрическому семейству. Перейдем к описанию обнаруженных бифуркаций и исследованию возникающих нестационарных режимов.

*Односторонняя бифуркация рождения пары периодических режимов.* При  $b = 15, 20, 32$  и на интервале  $b \in [46, 75]$  автоколебания возникают в результате односторонней бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого периодических режимов (фиг. 1, обозначение 3). В этой ситуации существует значение  $\lambda^0$  такое, что при  $\lambda < \lambda^0$  периодических режимов не обнаруживается, а при  $\lambda = \lambda^0$  имеет место одновременное рождение устойчивого и неустойчивого периодических режимов.

Вдали от точки бифуркации периоды устойчивого и неустойчивого предельных циклов сильно отличаются, а по мере приближения к точке бифуркации (при уменьшении



Фиг. 2. Поведение симметричных периодических режимов вблизи точки односторонней бифуркации ( $b = 46$ ,  $\lambda = 0.30712394$ ):  $a$  – устойчивый (1) и неустойчивый (2) периодические режимы. В качестве горизонтальных и вертикальных осей выбраны  $Nu_v$  и  $Nu_h$ . Поведение функции тока для  $\tau = 0$  (б);  $\tau = 17.932$  (в)

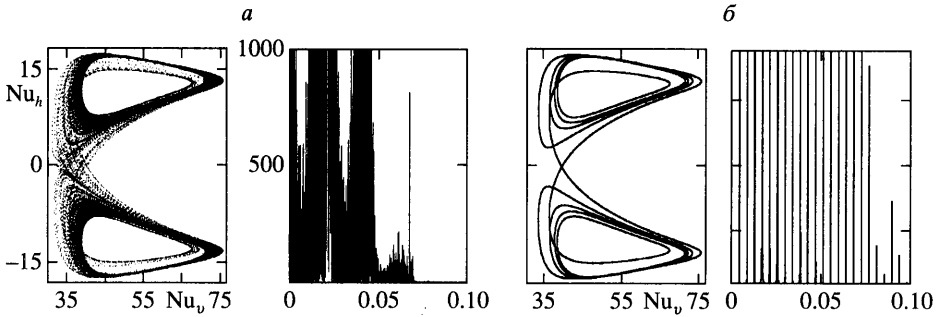
параметра  $\lambda$ ) периоды обоих циклов стремятся к одной величине, и при  $\lambda^0 \approx 0.307124$  равны  $T = 98.67$  (фиг. 2,  $a$ ). Ведущие мультипликаторы (ближайшие к границе единичной окружности) матрицы монодромии циклов при этом стремятся к единице. Это дает основание утверждать, что имеет место односторонняя бифуркация периодических режимов.

Исследование поведения нестационарного конвективного режима при  $b = 46$  и  $\lambda = \lambda^0$  показывает, что форма и число конвективных валов претерпевают значительные изменения с течением времени. Изменение функции тока происходит либо за счет изменения числа валов (переход от  $\tau = 0$  – фиг. 2, б к  $\tau = 17.932$  – фиг. 2, в), либо изменения формы конвективных ячеек. Число валов меняется со временем и может быть пять (фиг. 2, б) или восемь (фиг. 2, в), причем их форма существенно отличается от стационарных режимов однопараметрического семейства. Максимальное значение локальной теплопередачи нестационарного конвективного режима достигается в точке  $x \approx a/2$  и незначительно меняется во времени, причем  $Nu_l^0(x) \approx Nu_l^b(x)$  для всех  $\tau \in [0, T]$ . Таким образом, возникающий периодический конвективный режим сильно отличается от стационарных режимов однопараметрического семейства как числом и структурой конвективных ячеек, так и характеристиками теплопередачи.

Во всех исследованных случаях, где наблюдается описанная бифуркация, при  $\lambda > \lambda^0$  в силу дискретных симметрий задачи сосуществует два или четыре устойчивых периодических режима. При росте  $\lambda$  эти циклы, в свою очередь, претерпевают ряд сложных бифуркаций, анализ которых в настоящей работе не проводился.

*Переход от стационарных движений непосредственно к хаотическим.* При  $b = 14, 19, 45$  и  $b \in [33, 42]$  были найдены значения параметра  $\lambda = \lambda^x$ , при котором в системе реализуется хаотический режим. При этом в результате счета на установление из множества различных начальных данных при  $\lambda < \lambda^x$  всегда реализовывалось одно из устойчивых равновесий однопараметрического семейства. Такому сценарию возникновения нестационарных режимов на фиг. 1 соответствует обозначение 4. Проиллюстрируем его расчетами для  $b = 38$ .

При  $\lambda = 0.38210454$  решения из всех выбранных начальных данных стремятся к одному из устойчивых стационарных режимов однопараметрического семейства. Малое увеличение параметра ( $\lambda^x \approx 0.38210455$ ) приводит к рождению нестационарного режима (фиг. 3,  $a$ ). Спектр Фурье  $Nu_v$  сплошной (фиг. 3,  $a$ ), что указывает на хаотичность появившегося режима. При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda$  спектр режима упрощается (фиг. 3, б), и при  $\lambda = 0.383$  (фиг. 3, б) движение становится периодическим.



Фиг. 3. Рождение и развитие хаотического режима и спектр Фурье вертикального потока тепла через нижнюю границу для  $b = 38$  и  $\lambda = 0.38210455, 0.383$  (а, б). Частота спектра Фурье, отложенная по оси абсцисс, нормирована на общую продолжительность численного эксперимента

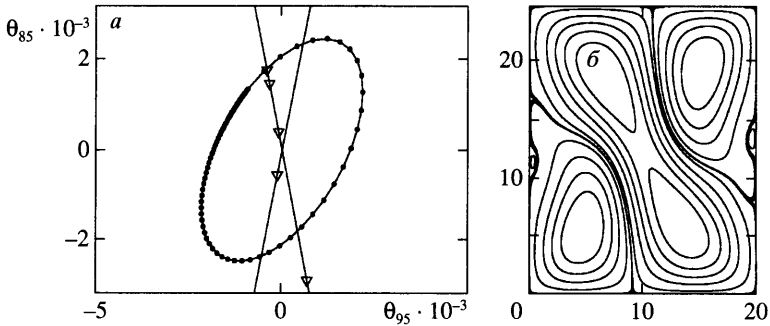
Форма хаотического конвективного режима претерпевает значительные изменения с течением времени и качественно схожа с режимом на фиг. 2, б. Меняется форма конвективных ячеек, а число валов при данных значениях параметров равно пяти и остается постоянным. Значение локальной теплопередачи достигает максимума в середине контейнера и  $Nu_i^0(x) \approx Nu_i^b(x)$  для всех  $t \in [0, T]$ . Характеристики хаотического режима сильно отличаются от характеристик стационарных режимов однопараметрического семейства для  $b = 38$  и  $\lambda = \lambda^*$ .

Переход от хаоса к периодическому режиму и структура хаотического аттрактора (см., например, фиг. 3, а), дают основание предполагать существование в исследуемой задаче большого числа неустойчивых периодических режимов. Одним из путей возникновения этих режимов могут быть бифуркации распада гомоклинных и гетероклинных траекторий.

*Рождение периодических режимов в результате нелокальных бифуркаций.* Бифуркация распада гомоклинной траектории одного из равновесий однопараметрического семейства была обнаружена при  $b = 43, 44$ ; и  $\lambda = \lambda^*$  (фиг. 1, обозначение 5). При исследовании гомоклинных бифуркаций в многомерных системах, как правило, не прибегают к расчету устойчивого и неустойчивого многообразий, а ограничиваются поиском устойчивого или неустойчивого периодического режима с дальнейшим его продолжением по параметру вплоть до точки бифуркации, что и было выполнено в этой работе. Для поиска и продолжения по параметру периодических режимов здесь использовался изложенный выше метод неподвижной точки отображения сдвига вдоль траектории.

В результате анализа неустойчивых циклов при стремлении параметра  $\lambda$  справа к  $\lambda^*$  был обнаружен рост периода у этих режимов, причем динамика зависимости периода от параметра позволяет утверждать, что период стремится к бесконечности при  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ . Изученные периодические режимы приближаются в фазовом пространстве к одному из седловых равновесий семейства стационарных режимов. Этим семейством оказывается не первичное семейство равновесий, а полностью неустойчивое семейство, родившееся в результате перехода числа Рэлея через второе критическое значение  $\lambda_{1,2}$ . При  $\lambda < \lambda^*$  периодический режим исчезает. Сказанное подтверждает, что в системе при  $\lambda = \lambda^*$  возникает гомоклинная траектория, в результате разрушения которой рождается неустойчивый предельный цикл.

Изложенный сценарий возникновения неустойчивых периодических режимов в силу громоздкости вычислений был детально изучен для двух значений параметра  $b$ , но существование бесчисленного множества седловых равновесий при всех значениях параметра  $b$  и  $\lambda > \lambda_{1,2}$  позволяет предположить типичность такой бифуркации.



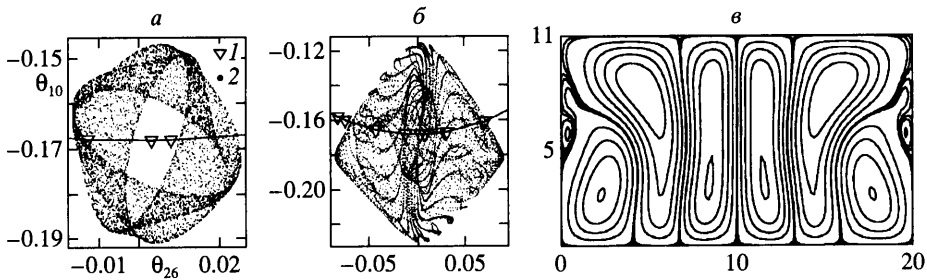
Фиг. 4. Устойчивый предельный цикл и семейство стационаров в окрестности точки бифуркации Андронова – Хопфа при ( $b = 25$ ,  $\lambda = 0.6134$ );  $a$  – неустойчивые равновесия на семействе (1), периодический режим (2),  $b$  – стационарный конвективный режим семейства при  $s = 0$

*Ответвление периодического режима от стационарного.* В косимметричных системах наряду с бифуркациями распада, слияния, рождения и гибели равновесных циклов возможны локальные бифуркации [6], связанные с возникновением колебательной неустойчивости равновесий семейства и дальнейшим ответвлением периодического режима. Бифуркация Андронова – Хопфа в косимметричных системах [6] отличается от классического случая изолированного равновесия. Периодический режим ответвляется с запаздыванием по параметру от равновесия, входящего в однопараметрическое непрерывное семейство стационаров, и имеется возможность сверхкритического ответвления предельного цикла. Условие существования косимметричной бифуркации Андронова–Хопфа имеет вид [6]  $\text{Im}((\phi, L\phi)) = 0$ , где  $L$  – косимметрия задачи (1.1), (1.2), определяемая формулой (1.4), а  $\phi$  – комплексный собственный вектор, отвечающий паре чисто мнимых значений в спектре устойчивости равновесий однопараметрического семейства.

В результате численного исследования при  $b = 8, 12, 13$ ,  $b \in [16, 18]$  и  $b \in [21, 27]$  была обнаружена сверхкритическая бифуркация Андронова – Хопфа при  $\lambda = \lambda^*$ . Рассмотрим эту бифуркацию подробно для  $b = 25$ ,  $\lambda^* \approx 0.6134$  (фиг. 4,  $a$ ). При  $\lambda < \lambda^*$  на семействе стационарных режимов имеются устойчивая и неустойчивая дуги, разделенные нейтральным равновесием с парой чисто мнимых собственных значений. Значение  $\text{Im}((\phi, L\phi))$  быстро стремится к нулю с ростом  $\lambda$  и меняет знак при  $\lambda = 0.61339$ . Таким образом, при  $\lambda > \lambda^*$  в результате бифуркации Андронова–Хопфа в системе рождается устойчивый периодический режим. При  $\lambda > \lambda^*$  был обнаружен устойчивый предельный цикл. При стремлении  $\lambda$  справа к  $\lambda^*$  период предельного цикла меняется медленно и в точке бифуркации равен  $T = 11.5931$ , а сам цикл стягивается к одному из равновесий семейства. В ряде случаев рождение цикла происходит одновременно с полной потерей устойчивости на первичном семействе стационаров, хотя этот сценарий не преобладает. При дальнейшем увеличении  $\lambda$  происходит множество различных бифуркаций нестационарных режимов, что в работе детально не исследовано.

Так как периодический конвективный режим возникает в малой окрестности стационарного режима, то все его характеристики близки с характеристиками режима, от которого он ответвляется ( $s = 0$ , фиг. 4,  $b$ ) при малых надкритичностях. Это сходство проявляется не только в форме и количестве конвективных ячеек, но и в качественном совпадении величин  $\text{Nu}_l^0(x)$  и  $\text{Nu}_l^b(x)$ , достигающих максимума в точке  $x \approx a/2$ . Форма





Фиг. 5. Рождение и развитие инвариантного тора (а, б) для  $b = 11$ ,  $\lambda = 2.696, 2.6966$ : 1 – неустойчивые равновесия на семействе, 2 – тор. Функция тока (в) стационарного режима для  $s = 0$

конвективных ячеек остается практически неизменной с течением времени, а число конвективных валов и локальная теплопередача  $Nu_l^0(x) \approx Nu_l^b(x)$  также слабо меняются.

*Ответвление квазипериодического режима от стационарного.* Наличие в системах с косимметрией бифуркации ответвления инвариантного тора от равновесия семейства стационаров было установлено в [7]. Данная бифуркация отличается от классических сценариев рождения квазипериодических режимов. Во-первых, бифуркация рождения тора имеет коразмерность 1, тогда как для классического случая ее коразмерность равна 2. Во-вторых, бифуркация не сопровождается рождением нормального предельного цикла. Кроме того, возможно появление устойчивой дуги на однопараметрическом семействе равновесий в результате этой бифуркации. Условием ответвления тора от семейства равновесий является наличие нуля и пары чисто мнимых значений в спектре равновесия [7], расположенного на границе устойчивой и неустойчивой дуг семейства. Потеря устойчивости этим равновесием влечет бифуркацию рождения тора.

Проведенный численный анализ показал, что для  $b \in [9, 11]$  и  $b \in [28, 31]$  при некотором значении параметра  $\lambda = \lambda^\circ$  от первичного семейства стационарных конвективных режимов ответвляется квазипериодический режим. Например, при  $b = 11$ ,  $\lambda^\circ \approx 2.696$ , на однопараметрическом семействе стационарных конвективных режимов было найдено равновесие, имеющее нулевое и пару чисто мнимых значений в спектре устойчивости. При  $\lambda > \lambda^\circ$  в окрестности этого равновесия был обнаружен устойчивый квазипериодический режим (фиг. 5). При росте параметра  $\lambda$  тор изменяется (фиг. 5 а, б), его спектр Фурье упрощается и является дискретным с одной ведущей частотой. При достаточно больших надкритичностях квазипериодический режим гибнет, что приводит к рождению периодического режима.

В силу того что квазипериодический режим ответвляется от точки равновесного цикла, форма и число его конвективных ячеек при малых надкритичностях незначительно меняются с течением времени и слабо отличаются от характеристик порождающего его стационарного режима (фиг. 5, в).

**Заключение.** Результаты численного анализа показали большое разнообразие и сложность сценариев возникновения нестационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции. Большую роль в этом играют наличие косимметрии у соответствующей системы уравнений в частных производных и существующие однопараметрические семейства стационарных режимов. Характер переходов существенно зависит от геометрии изучаемой области и фильтрационного числа Рэлея. Были обнаружены практически все теоретически возможные варианты: рождение устойчивого и неустойчивого периодических режимов в результате односторонней бифуркации, ответвление устойчивого периодического и квазипериодического режимов от стационарного режима, принадлежащего однопараметрическому семейству. Кроме того, была показана возможность существования нелокальных бифуркаций, связанных с равновесиями семей-

ства, которые могут приводить к рождению большого числа неустойчивых периодических и хаотических режимов. Наличие таких режимов объясняет в некоторых случаях возможность перехода от стационарного движения жидкости непосредственно к хаотическому при увеличении интенсивности подогрева.

Характеристики возникающих нестационарных конвективных режимов зависят от сценария их возникновения. Общей чертой нестационарных режимов, ответвившихся от одного из равновесий семейства стационаров, является их сходство с режимом, от которого они ответвились как по количеству валов и их форме, так и по значениям локальной теплопередачи, а также несущественное их эволюционирование во времени при малых надкритичностях. В случае сценариев, не связанных с семейством стационарных режимов, возникают качественно новые конвективные движения жидкости. Эти режимы достаточно сильно меняются во времени, движение жидкости происходит через изменение формы валов и их числа.

При росте фильтрационного числа Рэлея все описанные нестационарные режимы претерпевают еще более сложные перестройки. Детальное изучение этих бифуркаций очень трудоемко в силу их большого разнообразия и, видимо, будет предметом дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ № 07-01-00367, 05-01-00567) и гранта поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5747.2006.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
2. Глухов А.Ф., Любимов Д.В., Путин Г.Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 549–551.
3. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.
4. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. V. 10. № 2. P. 311–330.
5. Куракин Л.Г., Юдович В.И. Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 29–33.
6. Юдович В.И. О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // ПИММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 22–34.
7. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Codimension one bifurcation of 2-dimension tori born from an equilibrium family in systems with Cosymmetry // Math. Notes. 2003. V. 73. № 5. P. 751–755.
8. Говорухин В.Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 6. С. 772–774.
9. Говорухин В.Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53–62.
10. Govorukhin V.N. Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtrational convection problem // Continuation Methods in Fluid Dynamics / eds. D. Henry and A. Bergeon Vieweg, 2000. P. 133–144.
11. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 115–128.
12. Tsybulin V., Karasozen B. Finite-difference approximations and cosymmetry conservation in filtrational convection problem. // Physics Letters A. 1999. V.262. № 4–5. P. 321–329.
13. Bratsum D.A., Lyubimov D.V., Roux B. Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Physica D. 1995. V. 82. № 4. P. 398–417.
14. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Численное решение задачи плоской конвекции Дарси на компьютере с распределенной памятью // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 1. С. 3–12.
15. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5. № 2. P. 402–411.