

УДК 532.546

© 2006 г. М. В. КОРОТЕЕВ, А. П. ЧЕРНЯЕВ

ПЛОСКАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНАХ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ СТОКА

Построены плоские течения нелинейной фильтрации, моделирующие источник, расположенный на одинаковом расстоянии от кровли и подошвы пласта при двух нелинейных законах фильтрации. В качестве этих законов выбраны степенной закон фильтрации и закон специального вида, сводящийся в плоскости годографа к аналитическим функциям.

Ключевые слова: стационарная фильтрация, плоская задача, нелинейный закон сопротивления, несжимаемая жидкость.

Достаточно давно было обнаружено, что реальные течения флюидов в пористых средах испытывают значительные отклонения от закона Дарси [1, 2] как в области малых, так и в области больших скоростей фильтрации [3–5]. Окрестности скважин представляют собой области с большими скоростями фильтрации, где закон Дарси перестает согласовываться с опытом. В связи с важностью рассмотрения фильтрационных течений именно в этих областях предлагалось использовать различные нелинейные законы фильтрации, которые дают более адекватное описание течений.

После появления моделей течений флюидов вблизи скважин [6], в том числе и горизонтальных [7], они и далее продолжали совершенствоваться [8–10]. В работах [11–13] к описанию течений в окрестности скважин привлекались нелинейные законы фильтрации и на их основании строились численные модели расчета течений. В настоящей работе затрагивается другой аспект моделирования фильтрационных течений, связанный с построением точных решений задач нелинейной фильтрации в плоскости годографа.

1. Рассмотрим плоское установившееся движение несжимаемой однофазной жидкости в горизонтальном пласте к точечному стоку. Пласт представляет собой бесконечную горизонтальную полосу в плоскости (x, y) ширины $2h$ с непроницаемой кровлей и подошвой (фиг. 1). В начале координат тогда находится точечный сток.

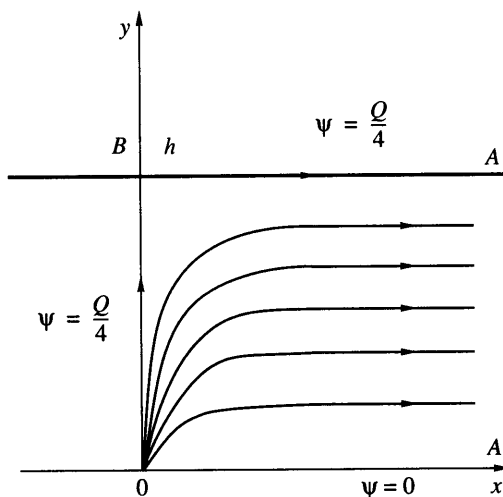
В рассматриваемой постановке течение симметрично как относительно оси x , так и относительно оси y (фиг. 1). Поэтому достаточно построить решение задачи лишь в одном первом квадранте. Теперь математическую постановку задачи можно дать через отыскание функции тока ψ [14], где

$$\psi = 0, \quad (x, y) \in OA; \quad \psi = \frac{Q}{4}, \quad (x, y) \in OB \cup BA$$

Здесь Q – заданная интенсивность источника

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

u и v – координаты вектора скорости фильтрации \mathbf{w} по осям x и y соответственно (фиг. 1).



Фиг. 1. Исходная область течения в физической плоскости

В случае, когда рассматриваемый закон фильтрации является нелинейным, указанная задача приводит к весьма сложным уравнениям [14]

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\chi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{\chi} \right) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\chi = \frac{w}{\Phi(w)}, \quad w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

где $\Phi(w)$ – закон фильтрации.

От (x, y) осуществляется переход к новым переменным (w, θ) , где θ – угол наклона вектора скорости фильтрации в данной точке. В этих переменных уравнения становятся линейными, и для их решения можно применить известные методы математической физики. Переход к переменным годографа систематически развивался С.А. Чаплыгиным и был успешно применен к фильтрационным течениям С.А. Христиановичем [14].

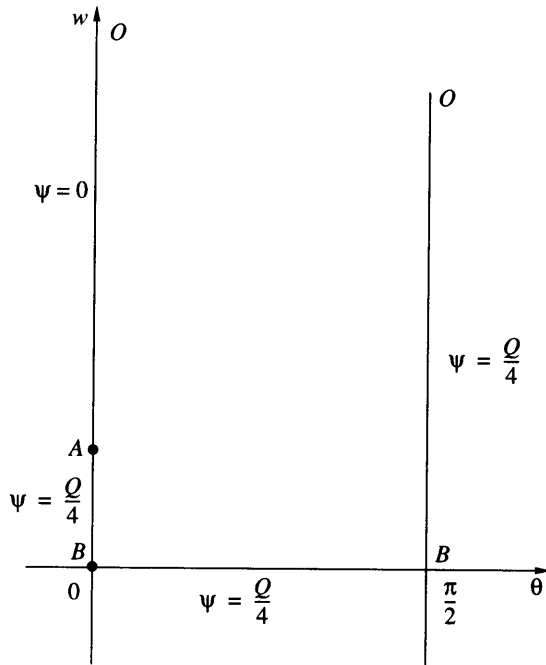
Исходная область течения в физической плоскости задается условиями $x \in [0, +\infty)$, $y \in [0, h]$, где $2h$ – ширина пласта (фиг. 1). При отображении на плоскость годографа эта область переходит в полуполосу $\{(w, \theta): 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq w < +\infty\}$ (фиг. 2). При этом функция тока ψ должна удовлетворять условиям:

$$\psi = 0, \quad (w, \theta) \in OA; \quad \psi = \frac{Q}{4}, \quad (w, \theta) \in AB \cup BB \cup BO$$

Зная функцию тока, можно найти скорости течения, однако нельзя найти давление p . Для построения искомых моделей фильтрации жидкости использовался обобщенный напор [15]

$$H = \frac{k}{\mu} \left(\frac{p}{\rho g} + y \right)$$

Здесь k – коэффициент проницаемости пористой среды, который зависит только от свойств данной среды, а μ – вязкость фильтрующейся жидкости. Движение флюида в



Фиг. 2. Образ исходной области течения в плоскости годографа

пористой среде описывается соотношением между градиентом напора и скоростью фильтрации [15]

$$-\text{grad}H = \Phi(w) \frac{\mathbf{w}}{w} \quad (1.1)$$

После применения преобразования годографа для ψ и H получается система линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами [15]

$$\frac{\Phi^2(w) \partial \psi}{w \Phi'(w) \partial w} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{\Phi(w) \partial \psi}{w^2 \partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial w} \quad (1.2)$$

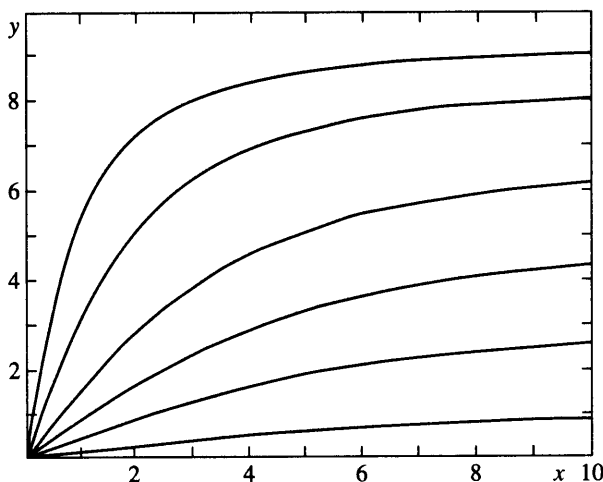
Из (1.2) исключим напор H , так как для ψ граничные условия более просты

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\Phi^2(w) \partial \psi}{w \Phi'(w) \partial w} \right) + \frac{\Phi(w) \partial^2 \psi}{w^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$\psi \left(\frac{\pi}{2}, w \right) = \frac{Q}{4}, \quad w \in [0, +\infty); \quad \psi(\theta, 0) = \frac{Q}{4}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (1.4)$$

$$\psi(0, w) = \frac{Q}{4}, \quad w \in [0, w_A]; \quad \psi(0, w) = 0, \quad w \in (w_A, +\infty)$$

Таким образом, в плоскости годографа (w, θ) получена краевая задача для уравнения (1.3) с разрывными граничными условиями (1.4).



Фиг. 3. Линии тока течения несжимаемой жидкости в окрестности стока (источника) при линейном законе фильтрации

Если справедлив закон Дарси, который следует из (1.1) при $\Phi(w) = w$, то искомое решение известно и имеет вид [16]

$$H_D = -\frac{Q}{4\pi} \ln(\text{sh}^2 mx + \sin^2 my), \quad \Psi_D = \frac{Q}{2\pi} \text{arctg}(\text{cth} mx \text{tg} my) \quad (1.5)$$

Здесь $m = \pi/(2h)$, где h – половина толщины пласта, а Q – расход. На фиг. 3 представлена картина линий тока (1.5).

На основании (1.1) при $\Phi(w) = w$ и (1.5) получается связь между переменными (w, θ) и (x, y)

$$\text{sh}^2 mx = -\frac{1}{2} + \frac{1+s}{2\sqrt{1-2s\cos 2\theta+s^2}} \quad (1.6)$$

$$\sin^2 my = \frac{1}{2} + \frac{1-s}{2\sqrt{1-2s\cos 2\theta+s^2}}, \quad s = \frac{4\pi^2 w^2}{Q^2 m^2}$$

Из (1.5), (1.6) для напора и функции тока в переменных годографа получаются следующие соотношения:

$$H_D = -\frac{Q}{4\pi} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1-2s\cos 2\theta+s^2}} \right] \quad (1.7)$$

$$\Psi_D = \frac{Q}{2\pi} \text{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{1-2s\cos 2\theta+s^2}+1-s\cos 2\theta}}{\sqrt{\sqrt{1-2s\cos 2\theta+s^2}+s\cos 2\theta-1}}$$

Формула для степенного закона фильтрации в переменных годографа имеет вид

$$\Phi(w) = w^n, \quad n = \text{const} > 0$$

Случай $n = 1$ соответствует задаче с законом Дарси, решение которой дается (1.7).

Уравнение (1.3) для степенного закона будет иметь вид [17]

$$\frac{w^2 \partial^2 \Psi}{n \partial w^2} + w \frac{\partial \Psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.8)$$

Вводится

$$\Psi = \psi - \psi_D \quad (1.9)$$

где ψ – функция тока для степенного закона фильтрации, а ψ_D – функция тока при законе фильтрации Дарси, которая дается вторым выражением (1.7). Уравнение для функции Ψ получается из (1.8) и (1.9) и имеет вид

$$\frac{w^2 \partial^2 \Psi}{n \partial w^2} + w \frac{\partial \Psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = - \left[\frac{w^2 \partial^2 \psi_D}{n \partial w^2} + w \frac{\partial \psi_D}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.10)$$

Поскольку граничные условия при обоих законах фильтрации одинаковы, то в задаче для функции Ψ , граничные условия нулевые

$$\Psi\left(\frac{\pi}{2}, w\right) = 0, \quad w \in [0, +\infty); \quad \Psi(\theta, 0) = 0, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (1.11)$$

$$\Psi(0, w) = 0, \quad w \in [0, w_A]; \quad \Psi(\theta, w) = 0, \quad w \in (w_A, +\infty)$$

Сделаем преобразование независимой переменной и неизвестной функции, полагая $w = \exp\{z/n^{1/2}\}$ и $\Psi(z, \theta) = \exp[(1-n)z/(2n^{1/2})]\Pi(z, \theta)$.

$$w = \exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}}\right\}, \quad \Psi\{z, \theta\} = \exp\left\{\frac{1-n}{2\sqrt{n}}z\right\}\Pi(z, \theta)$$

Тогда исходная полуполоса $\theta \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, +\infty)$ переходит в полосу $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in (-\infty, +\infty)$, а уравнение (1.10) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - \frac{(1-n)^2}{4n} \Pi = -\exp\left\{\frac{n-1}{2\sqrt{n}}z\right\} \left[\frac{\partial^2 \psi_D}{\partial z^2} + \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{\partial \psi_D}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.12)$$

Фундаментальное решение однородного уравнения (1.12) в плоскости (z, θ) , обладает тем свойством, что оно зависит лишь от расстояния до начала координат, т.е., от $\sqrt{z^2 + \theta^2}$ и имеет логарифмическую особенность в этой точке. Это решение имеет вид [18]

$$\Pi_0(z, \theta) = K_0 \left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}} \sqrt{z^2 + \theta^2} \right)$$

Здесь K_0 – функция Макдональда нулевого порядка. Чтобы найти решение в полосе $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in (-\infty, +\infty)$, нужно построить функцию Грина для однородного уравнения Гельмгольца. После этого решение неоднородного уравнения (1.12) может быть найдено по второй формуле Грина. Как известно, значение в некоторой точке искомой функции представляется в формуле Грина через фундаментальное решение, расположенное в этой точке. Таким образом, для построения функции источника поместим источник в произвольной точке (z, θ) и методом отражений относительно линий $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ до-

бьемся того, чтобы на этих линиях функция источника обращалась в ноль. В результате приходим к бесконечной системе источников вида [19, 20]

$$G(w, \theta, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[K_0 \left(\frac{1-n}{2\sqrt{n}} \sqrt{n(\ln w - \ln \xi)^2 + (\theta - \eta - \pi l)^2} \right) - K_0 \left(\frac{1-n}{2\sqrt{n}} \sqrt{n(\ln w - \ln \xi)^2 + (\theta + \eta + \pi l)^2} \right) \right], \quad \xi = \exp\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad w = \exp\frac{z}{\sqrt{n}} \quad (1.13)$$

где $n \neq 1$.

Учитывая (1.9), получим следующее выражение для функции тока течения жидкости при степенном законе фильтрации

$$\psi(w, \theta) = \frac{Q}{2\pi} \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{1-2s_0 \cos 2\theta + s_0^2} + 1 - s_0 \cos 2\theta}{\sqrt{1-2s_0 \cos 2\theta + s_0^2} + s_0 \cos 2\theta - 1}} - \frac{Qw^{(1-n)/2} \sqrt{n}}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{G(w, \theta, \xi, \eta) s \sin 2\eta}{(1-2s \cos 2\eta + s^2) \xi^{(3-n)/2}} \left[1 + \frac{1-3s^2 + 2s \cos 2\eta}{n(1-2s \cos 2\eta + s^2)} - \frac{2(1-s^2)}{1-2s \cos 2\eta + s^2} \right] d\eta d\xi \quad (1.14)$$

$$s_0 = \frac{4\pi^2 w^2}{Q^2 m^2}, \quad s = \frac{4\pi^2 \xi^2}{Q^2 m^2}$$

2. Ввиду сложности краевых задач нелинейной фильтрации возникают попытки предложить такие законы фильтрации, которые, с одной стороны, давали бы достаточно хорошее согласие с опытом, а с другой – позволяли бы упростить рассматриваемые уравнения. Один из таких законов имеет в плоскости годографа вид [21]

$$\Phi(w) = w \left[1 - \frac{w^2}{n^2} \right]^{-1/2} \quad (2.1)$$

Особенность закона (2.1) состоит в том, что для него функция напора оказывается аналитической функцией от переменной ζ [15]

$$\zeta = -\ln \left[\frac{2w}{(1 + \sqrt{1 - w^2/n^2})} \right] + i\theta, \quad |w| \leq n$$

Однако закон (2.1) имеет смысл лишь для небольших скоростей. Если рассмотреть закон

$$\Phi(w) = w \left[1 + \frac{w^2}{n^2} \right]^{-1/2} \quad (2.2)$$

то свойство функции напора быть аналитической от некоторой комплексной переменной сохраняется [22]. В то же время закон (2.2) может быть применен и к течениям с большими скоростями фильтрации. Применим этот закон для построения решения задачи об источнике.

При малых скоростях фильтрации закон (2.2) близок к линейному закону Дарси. В то же время этот закон нелинеен и, таким образом, дает представление об общем характе-

ре нелинейных эффектов, возникающих при рассмотрении фильтрации к стокообразным особенностям.

Подставляя выражение (2.2) в систему (1.2), получаем

$$w \left(1 + \frac{w^2}{n^2} \right)^{1/2} \frac{\partial \Psi}{\partial w} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = w \left(1 + \frac{w^2}{n^2} \right)^{1/2} \frac{\partial H}{\partial w} \quad (2.3)$$

Сделаем в уравнениях (2.3) замену переменной $r(w)$ так, чтобы избавиться от коэффициентов

$$r(w) = \ln \left[w \left(1 + \sqrt{1 + \frac{w^2}{n^2}} \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial r}$$

Таким образом, приходим к известной системе Коши-Римана для функций течения, а уравнения для функций ψ и H представляют собой просто уравнения Лапласа.

После преобразования переменной (2.4) исходная полуполоса переходит в новую полуполосу $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in (-\infty, \ln n]$. На границах этой полуполосы кроме отрезка $\theta \in [0, \pi/2]$, $r = \ln n$ для функции тока сохраняются те же значения, что и в (1.4). Значения функции тока на указанном отрезке получаются из второй формулы (1.7) предельным переходом при постоянном θ и стремлении $s \rightarrow +\infty$, т. е. при $w \rightarrow +\infty$. Внутри же области нужно найти решение уравнения Лапласа для функции тока ψ , т. е. решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа в неограниченной односвязной полуполосе $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in (-\infty, \ln n]$.

Найдем конформное в широком смысле [23, с. 101] отображение области, в переменных (r, θ) , на внутренность единичного круга и таким образом сведем решения задачи типа Дирихле в указанной выше полуполосе к решению в круге. Функция, заданная на границе, терпит разрыв в единственной точке $\theta = 0$, $r = r(w_A)$ (2.4) фиг. 2 и ограничена. Из выражения для расхода в бесконечности, фиг. 1, $Q/4 = w_A h$ следует, что $w_A = Q/(4h)$.

Введем комплексную переменную z следующим образом:

$$z = \theta + ir \Rightarrow \bar{z} = \theta - ir, \quad \theta = (z + \bar{z})/2, \quad r = (z - \bar{z})/(2i) \quad (2.5)$$

Конформное в широком смысле отображение области $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in (-\infty, \ln n]$ на внутренность единичного круга имеет вид

$$\omega(z) = \frac{\cos 2(\bar{z} + i \ln n) + i}{\cos 2(\bar{z} + i \ln n) - i} \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что точка разрыва граничных условий после преобразования попадает в первую четверть, откуда получим следующую постановку задачи типа Дирихле для функции тока, описывающей движение несжимаемой жидкости в окрестности искомого источника

$$\Delta \psi = 0, \quad 0 \leq \rho < 1$$

$$\rho = 1, \quad |\psi| = \frac{Q}{4}, \quad \varphi \in \left[0, \arccos \frac{\text{ch}^2 [2(r_A - \ln n)] - 1}{\text{ch}^2 [2(r_A - \ln n)] + 1} \right]$$

$$\psi = 0, \quad \varphi \in \left(\arccos \frac{\text{ch}^2 [2(r_A - \ln n)] - 1}{\text{ch}^2 [2(r_A - \ln n)] + 1}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\psi = \frac{Q}{8\pi} \left(\pi - 2 \arcsin \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right), \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$\psi = \frac{Q}{4}, \quad \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right); \quad \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{arg} z$$

Предпоследнее граничное условие получено при помощи предельного перехода во второй формуле (1.7) при $s \rightarrow \infty$, т. е. при $w \rightarrow +\infty$, при котором получится

$$\psi_\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_D = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} = \frac{Q\theta}{2\pi}$$

и (2.5), (2.6) при $\theta \in [0, \pi/2]$, $r \in (-\infty, \ln n]$.

Несмотря на то, что граничные условия данной задачи разрывны, для получения решения можно воспользоваться формулой Пуассона [24]

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \varphi) = & \frac{Q(1-\rho^2)^{\varphi_A}}{8\pi} \int_0^{\varphi_A} \frac{d\xi}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\xi)} + \frac{Q(1-\rho^2)^{3\pi/2}}{16\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\pi-2\arcsin(\operatorname{ctg}(\xi/2))}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\xi)} d\xi + \\ & + \frac{Q(1-\rho^2)^{2\pi}}{8\pi} \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{d\xi}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\xi)}, \quad \varphi_A = \arccos \frac{\operatorname{ch}^2[2(r_A - \ln n)] - 1}{\operatorname{ch}^2[2(r_A - \ln n)] + 1} \end{aligned}$$

Последние два равенства по сути и решают задачу о притоке жидкости к точечному стоку заданной интенсивности при законе фильтрации (2.2).

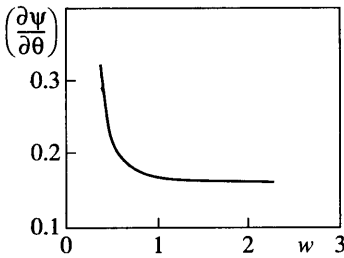
3. Пусть известно значение напора в какой-либо точке C рассматриваемой области плоскости годографа $\theta \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, +\infty)$. Тогда значение напора в любой другой точке D этой же области может быть выражено в виде криволинейного интеграла второго рода от величины dH , по любой кривой с началом в точке C и с концом в точке D .

Интеграл не зависит от кривой в силу равенства смешанных производных напора. В силу независимости интеграла от кривой, по которой производится интегрирование, ее естественно выбрать так, чтобы подынтегральное выражение выглядело наиболее просто. Предположим, что значение напора известно в некоторой достаточно удаленной от источника точке, в которой значение напора можно положить равным значению при линейном законе фильтрации Дарси. Существование такой точки можно обосновать тем, что на большом удалении от источника скорости всегда невелики, а значит можно говорить о справедливости линейного закона фильтрации, напор для которого в случае нашего притока к точечному стоку известен (1.7). Поскольку при удалении от источника величины скорости будут асимптотически совпадать на линиях $x = \operatorname{const}$, то без ограничения общности примем дополнительно, что эта точка расположена на оси абсцисс. Точка, которой определяется значение напора, лежит в окрестности источника и расположена также на оси абсцисс. Эта точка будет близка к началу координат, т.е., к точке расположения источника или стока, естественно она будет на оси абсцисс и в этой точке $\theta = 0$. Таким образом, криволинейный интеграл сводится к интегралу Римана по отрезку оси w и имеет вид

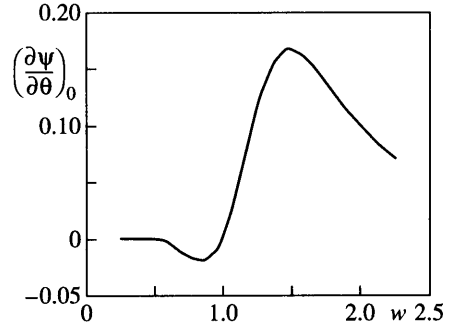
$$H(w, 0) = \int_{w_0}^w \frac{\partial H}{\partial \tau} d\tau$$

Для напора при законе фильтрации (2.2) получается соотношение

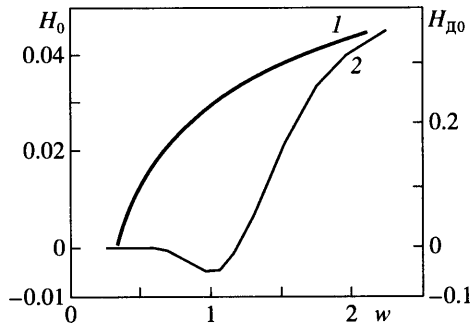
$$H(w, 0) = \int_{w_0}^w \frac{1}{\tau(1+\tau^2/n^2)^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\tau, 0) d\tau$$



Фиг. 4. Величина $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0) = (\frac{\partial\psi}{\partial\theta})_0$ для закона Дарси ($Q = 1, h = 1$)



Фиг. 5. Величина $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0) = (\frac{\partial\psi}{\partial\theta})_0$ для закона (2.2) ($Q = 1, h = 1$)



Фиг. 6. Поведение напора для закона Дарси (кривая 1), для закона (2.2) (кривая 2) ($Q = 1, h = 1$)

На фиг. 5 и 6 показано поведение $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0)$ и $H(w, 0)$ при (2.2), которое можно сравнить с поведением тех же величин на фиг. 4 и 6 при законе Дарси.

Величину $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0)$ мы хотим численно исследовать потому, что она является показателем эффекта горизонтальности. Действительно, эффект горизонтальности можно понимать как отличие исследуемого нами течения в горизонтальном пласте от радиального течения. При радиальном течении величина $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0)$ очевидно константа, равная $Q/(2\pi)$ при любом законе фильтрации, так как функция тока радиального течения равна $Q\theta/(2\pi)$. Тогда можно сделать следующий вывод: если при каком-то законе величина $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(w, 0)$ сильнее отличается от константы, то при этом законе и сильнее эффект горизонтальности. Из фиг. 4 видно, что при законе Дарси у исследуемого нами течения достаточно сильный эффект горизонтальности. Для закона (2.2) у исследуемого нами течения эффект горизонтальности выражен не так ярко.

Переходя теперь к численному исследованию напоров $H(w, 0)$ для законов Дарси и (2.2) из фиг. 6 можно заключить, что при линейном законе фильтрации Дарси с ростом скорости фильтрации w функция $H(w, 0)$ монотонно возрастает, стремясь при этом к бесконечности (фиг. 6, кривая 1), а при нелинейном законе фильтрации (2.2) имеют место нелинейные эффекты, заключающиеся в появлении интервала убывания напора

$H(w, 0)$ и образования минимума этой функции перед промежутком ее неограниченного возрастания (фиг. 6, кривая 2).

Заключение. Полученные решения можно интерпретировать как математическую модель притока жидкости к горизонтальной скважине бесконечной длины. Она может быть использована для получения приближенного решения задачи о притоке к горизонтальной скважине большой протяженности [25]. Кроме того, полученное решение может быть применено к модели притока к цепочке вертикальных скважин, которая имеет ту же математическую постановку, тем более что вблизи вертикальных скважин скорости обычно выше, чем вблизи горизонтальных, и нелинейные эффекты более существенны. В дальнейшем разработанную технику построения решения можно применить для исследования других областей течения, в частности, рассмотреть приток к разрезу конечной длины, что может соответствовать трещине гидроразрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 415 с.
2. Darcy H. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Paris: Dalmont; 1856. 647 p.
3. Форхгеймер Ф. Гидравлика (пер. с нем.). М. Л.: ОНТИ, 1935. 615 с.
4. Шелкачев В.Н., Ланук Б.Б. Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 736 с.
5. Краснопольский А. А. Грунтовые и артезианские колодцы // Горный ж., 1912. № 3–6. 176 с.
6. Андреев В.Б., Кряквина С.А. О функции источника сеточного оператора Лапласа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 364–373.
7. Peaceman D. W. Interpretation of wellblock pressure in numerical reservoir simulation // SPE Paper 6893; SPE J. Trans. AIME. 1978. V. 253. P. 183–194.
8. Андреев В.Б., Кряквина С.А. О фундаментальной решении однопараметрического семейства разностных аппроксимаций оператора Лапласа на плоскости // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 2. С. 313–355.
9. Peaceman D.W. Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation // SPE 21217, Proc. 11th SPE Symp. on Reservoir Simulation. Anaheim. California, 1991. P. 17–20; SPE Adv. Techn. Ser. 1993. V. 1. P. 7–16.
10. Вабищевич П.Н. Численное решение задач с особенностями на локально сгущающихся сетках // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 1. С. 61–68.
11. Eving R., Lazarov R., Lyons S.L., Papavassilion D.V., Pasciak J., Qin G. Numerical Well Model for Non-Darcy Flow through Isotropic Porous Media. Computational Geosciences, 1998.
12. Eving R., Lazarov R., Lyons S.L., Papavassilion D.V., Pasciak J., Qin G. Numerical Well Model for Non-Darcy Flow through Isotropic Media. ISC Research Report., 1998. ISC 98 11 MATH.
13. Papavassilion D.V., Lyons S.L. Non-Darcy Flow through Porous Media: Numerical and physical issues. Proc., Institute for Multifluid Science and Technology, 2nd annual meeting, Santa Barbara. 1998.
14. Христианович С.А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 33–52.
15. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
16. Лейбензон Л.С. Нефтепромысловая механика. Ч. 2. М.: Госгеонефтеиздат, 1934. 352 с.
17. Черняев А.П., Коротеев М.В. Нелинейные фильтрационные модели притока жидкости к горизонтальной скважине // Математика. Компьютер. Образование. М.: Прогресс–Традиция, 2001. Ч. 2. Вып. 8. С. 323–328.
18. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
19. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит. 2001. 576 с.

20. Черняев А. П., Коротеев М. В. Построение функции Грина в плоскости годографа для задачи нелинейной фильтрации к горизонтальной скважине по степенному закону // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Сб. тезисов 43-й конф. МФТИ. Ч. 7. Москва–Долгопрудный. 2000. С. 6–14.
21. Соколовский В.В. О нелинейной фильтрации грунтовых вод // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 525–536.
22. Шешуков Е.Г., Фомин В.М. К нелинейной теории фильтрации // Вакуумная техника. Татаркнигоиздат. 1970. Вып. 2. С. 83–89.
23. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
24. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 447 с.
25. Басниев К. С., Алиев З.С., Черных В.В. Методы расчетов дебитов горизонтальных наклонных и многоствольных газовых скважин. М.: ИРЦ Газпром, 1999. 47 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.1.2006