

УДК 532.526+536.24

© 2006 г. И. И. ЛИПАТОВ

ВОЗМУЩЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ

Исследованы локальные течения в ламинарном пограничном слое при обтекании расположенных на поверхности нагревательных элементов. На основе асимптотического анализа построены математические модели возмущенных течений и определены параметры подобия. Изучены режимы нестационарного локального нагревания, обеспечивающие управление отрывом и устойчивостью течения в пограничном слое. Получены результаты численного и аналитического анализа.

Ключевые слова: пограничный слой, управление течением, математические модели.

В настоящее время интенсивно исследуются способы управления течением в пограничном слое с помощью выделения энергии за счет электрических разрядов, нагревания или охлаждения поверхности. Наряду с этим рассматриваются устройства, отклоняющие миниатюрные щитки, или локализованный выдув (отсос) в пограничном слое. Применение такого рода устройств позволяет управлять отрывом пограничного слоя (иницирование или подавление), характеристиками неустойчивости (затягивание ламинарно-турбулентного перехода), а также параметрами турбулентных пограничных слоев.

Настоящая работа ставит своей целью анализ возможных схем применения локализованного нагрева поверхности для определения возникающих изменений в пограничном слое, формулирование краевых задач с одновременным определением параметров подобия и определение характеристик течения в пограничном слое.

Предполагается, что на поверхности обтекаемого тела находятся участки, температура которых отличается от температуры газа в пограничном слое. Причем разница температур может меняться со временем. Технически осуществить такой способ управления сравнительно несложно, например, пропуская электрический ток через полоски электропроводящего материала [1].

Рассмотрим физические свойства такого рода течений. Наиболее важный фактор при нагревании поверхности – это изменение плотности в области, где существенно влияние энерговыделения. Размеры этой области определяются процессами конвекции и теплопереноса. Повышение температуры газа вызывает понижение плотности, что меняет толщину вытеснения пограничного слоя. Это изменение может вызывать во внешнем потоке индуцированные возмущения давления. Ситуация во многом сходна с обтеканием неровностей, расположенных на дне пограничного слоя. Отличие в том, что эффективная форма неровности не задана заранее, а формируется в результате энерговыделения в пограничном слое и образования области с измененной плотностью. Анализ течения в пограничном слое при скачкообразном изменении температуры поверхности и каталитических свойств проведен в [2–4].

Для дальнейшего анализа воспользуемся результатами работ [3, 5–7], в которых проанализировано обтекание локальных неровностей, находящихся на дне ламинарного пограничного слоя. Анализ возмущенного течения в пограничном слое проводится в предположении, что число Рейнольдса велико, но не превосходит критических значений, при

которых происходит ламинарно-турбулентный переход. Последующий анализ основан на оценках влияния физических механизмов и определении параметров подобия, область применимости которых, как правило, справедлива и при умеренных числах Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Рассматривается обтекание плоской полубесконечной пластины равномерным сверхзвуковым или дозвуковым потоком вязкого газа при больших, но докритических числах Рейнольдса $Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty = \varepsilon^{-2} \rightarrow \infty$, где ρ_∞ , u_∞ , μ_∞ – плотность, продольная скорость и динамический коэффициент вязкости в невозмущенном течении над поверхностью, где расположен нагретый участок, l – расстояние от передней кромки до области энерговыделения. Выбраны следующие безразмерные величины для декартовых координат, компонентов вектора скорости, плотности, давления, температуры, динамического коэффициента вязкости:

$$xl, yl, zl, lu_\infty^{-1} t, u_\infty v, u_\infty w, \rho_\infty \rho, u_\infty^2 R^{-1} T, \mu_\infty \mu.$$

В общем случае предполагается, что изменение температуры поверхности в локальной области конечно: $\Delta T \sim T \sim O(1)$, а область повышенной температуры характеризуется продольным размером $a \leq O(1)$, поперечным размером $b \leq O(1)$ и характерным временем изменения $O(\tau)$.

Рассматриваемое невозмущенное течение двумерное стационарное, а возмущенное течение трехмерное и нестационарное. Предварительный анализ проведен для двумерного течения, а далее результаты анализа распространены на трехмерные течения.

Следуя методу сращиваемых асимптотических разложений [8], вначале рассматривается область с одинаковыми продольным и поперечным размерами, сравнимыми с характерной длиной тела $x \sim y \sim z \sim O(1)$. При больших числах Рейнольдса течение в этой области описывается уравнениями Эйлера. Для случая обтекания пластины нулевой толщины и расположенной под нулевым углом атаки решением этих уравнений является невозмущенный набегающий поток. Для удовлетворения граничного условия прилипания на поверхности пластины необходимо ввести в рассмотрение пограничный слой – область с характерными размерами $x \sim z \sim O(1)$, $y \sim O(\varepsilon)$.

Нагрев поверхности приводит к формированию эффективной неровности, толщину которой можно оценить, используя уравнение продольного импульса.

Изменение температуры участка поверхности пластины будет вызывать изменение плотности газа $\Delta \rho \sim \rho \sim O(1)$ в пристеночном слое. Рассматривая конечные значения числа Прандтля $Pr \sim O(1)$, в общем случае можно получить, что толщины вязкого и теплопроводного слоев одинаковы по порядку величины. В пристеночном слое продольная скорость при малых расстояниях от поверхности меняется пропорционально y/ε . Используя оценку для продольной скорости $u \sim O(y/\varepsilon)$ и приравнявая порядки величин конвективных и диссипативных членов в уравнении сохранения продольного импульса, для толщины возмущенного пристеночного слоя получим оценку, зависящую от протяженности a

$$y \sim O(\varepsilon a^{1/3}) \leq O(\varepsilon) \tag{1.1}$$

Дальнейший анализ зависит от протяженности нагретого участка. Можно выделить по крайней мере три характерных режима, которые характеризуются разными соотношениями длины участка и толщины пограничного слоя.

2. Анализ течения в области с длиной, меньшей по порядку величины, чем толщина пограничного слоя. Используя оценку (1.1), можно определить длину участка, которой соответствует такой же порядок толщины возмущенной области

$$a \sim O(\varepsilon a^{1/3}), \quad a \sim \varepsilon^{3/2} \tag{2.1}$$

Существенно, что этот размер превосходит толщину слоя Кнудсена, поэтому для описания возмущенного течения можно использовать уравнения Навье–Стокса с дополненными граничными условиями, типа условий скольжения. Совпадение продольного и поперечного масштабов приводит к одному порядку величин возмущений вертикальной и продольной скоростей. Предполагается, что трансверсальный размер области энерговыделения сравним с продольным размером $b \sim a$, а характерные времена изменения температуры и конвекции в возмущенной области течения совпадают: $\tau \sim \varepsilon^{-1}$. Конечные перепады давления приводят к конечным изменениям плотности (как будет показано ниже, локальные изменения давления при этом оказываются малыми). Таким образом, в локальном течении вблизи поверхности необходимо учитывать изменения температуры и плотности.

Можно ввести следующие асимптотические представления координат и функций течения:

$$\begin{aligned} x &= 1 + ax_a, & y &= ay_a, & z &= bz_a, & t &= \tau t_a \\ u(x, y, z, t) &= a\varepsilon^{-1}u_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots; & v(x, y, z, t) &= a\varepsilon^{-1}v_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots \\ w(x, y, z, t) &= a\varepsilon^{-1}w_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots; \\ p(x, y, z, t) &= (\gamma M_\infty^2)^{-1} a^2 \varepsilon^{-2} p_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots; & T(x, y, z, t) &= T_a(x_a, y_a, z_a, t_a) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

В результате подстановки разложений (2.2) в систему уравнений Навье–Стокса и предельного перехода

$$\text{Re} \rightarrow \infty, \quad a \rightarrow 0, \quad a\text{Re}^{3/4} = O(1) \quad (2.3)$$

получается следующая система уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_1 \frac{\partial u_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial y_a} + \Pi_1 w_a \frac{\partial u_a}{\partial z_a} \Pi_1 + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x_a} &= \\ = \frac{1}{\rho_a \text{Re}_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_a} \left(\mu \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial y_a} \left(\mu \frac{\partial u_a}{\partial y_a} \right) + \Pi_1^2 \frac{\partial}{\partial z_a} \left(\mu \frac{\partial u_a}{\partial z_a} \right) \right] \\ \text{Sh}_1 \frac{\partial v_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial v_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial v_a}{\partial y_a} + \Pi_1 w_a \frac{\partial v_a}{\partial z_a} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial y_a} &= \\ = \frac{1}{\rho_a \text{Re}_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_a} \left(\mu \frac{\partial v_a}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial y_a} \left(\mu \frac{\partial v_a}{\partial y_a} \right) + \Pi_1^2 \frac{\partial}{\partial z_a} \left(\mu \frac{\partial v_a}{\partial z_a} \right) \right] \\ \text{Sh}_1 \frac{\partial w_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial w_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial w_a}{\partial y_a} + \Pi_1 w_a \frac{\partial w_a}{\partial z_a} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial z_a} &= \\ = \frac{1}{\rho_a \text{Re}_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_a} \left(\mu \frac{\partial w_a}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial y_a} \left(\mu \frac{\partial w_a}{\partial y_a} \right) + \Pi_1^2 \frac{\partial}{\partial z_a} \left(\mu \frac{\partial w_a}{\partial z_a} \right) \right] \\ \frac{\partial T_a}{\partial t_a} + u_a \frac{\partial T_a}{\partial x_a} + v_a \frac{\partial T_a}{\partial y_a} + \Pi_1 w_a \frac{\partial T_a}{\partial z_a} &= \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{\rho_a \text{Re}_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T_a}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial y_a} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T_a}{\partial y_a} \right) + \Pi_1^2 \frac{\partial}{\partial z_a} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T_a}{\partial z_a} \right) \right]$$

$$\text{Sh}_1 \frac{\partial \rho_a}{\partial t_a} + \frac{\partial(\rho_a u_a)}{\partial x_a} + \frac{\partial(\rho_a v_a)}{\partial y_a} + \Pi_1 \frac{\partial(\rho_a w_a)}{\partial z_a} = 0$$

$$\text{Re}_1 = \text{Re}^{3/2} \quad a^2 = \varepsilon^{-3} a^2, \quad \text{Sh}_1 = \tau^{-1} \varepsilon, \quad \Pi_1 = ab^{-1}$$

Уравнение состояния совершенного газа с учетом введенных ранее обозначений принимает вид $\rho_a T_a = 1$.

Систему (2.4), (2.5) дополним следующими граничными и начальными условиями:

$$y_a = 0, \quad u_a = u_w(x_a, z_a, t_a), \quad v_a = w_a = 0, \quad T_a = T_w(x_a, z_a, t_a)$$

$$y_a \rightarrow \infty, \quad u_a \rightarrow a_0 y_a, \quad v_a \rightarrow 0, \quad w_a \rightarrow 0, \quad T_a \rightarrow T_0 \quad (2.5)$$

$$x_a^2 + z_a^2 \rightarrow \infty, \quad u_a \rightarrow a_0 y_a, \quad v_a \rightarrow 0, \quad w_a \rightarrow 0, \quad T_a \rightarrow T_0$$

Здесь $u_w(x_a, z_a, t_a)$ – скорость скольжения, которая при конечных величинах градиента температуры поверхности имеет тот же порядок, что и продольная скорость возмущенного тепловой неоднородностью течения [9].

Течение в указанной области зависит от трех безразмерных параметров: локального числа Рейнольдса, вычисленного для локальных величин скоростей в пристеночной области и на основе характерной длины, определяемой размерами нагретого участка, от локального числа Струхала Sh_1 и от геометрического параметра Π_1 , характеризующего отношение продольного и трансверсального размеров.

При малых значениях параметров Sh_1 и Π_1 задача приводится к двумерной и стационарной. Соответственно большие значения указанных параметров требуют проведения дополнительного анализа, который представлен ниже.

При конечных величинах локального числа Рейнольдса и конечных перепадах температур имеют место уравнения Навье–Стокса для трехмерного нестационарного течения сжимаемого течения. Малые изменения температуры приводят к линейным изменениям продольной скорости в локальной области. Такие течения будут описываться линеаризованными уравнениями (уравнениями Озеена).

Решение сформулированной задачи в общем случае (конечные перепады температур, конечные значения локального числа Рейнольдса) можно найти только численными методами. Существенно только, что при рассмотренных параметрах локальный нагрев (охлаждение) поверхности будет изменять локальные величины поверхностного трения и теплопередачи в главном порядке и управлять таким образом течением в пограничном слое.

При малых величинах локального числа Рейнольдса $\text{Re}_1 = a^2 \text{Re}^{3/2} \rightarrow 0$ определяющими в локальном течении становятся процессы диффузии и теплопроводности при несущественной роли конвективных процессов. Соответствующая такому режиму задача будет описываться уравнениями Стокса, так же как и при обтекании локальных неровностей, имеющих соответствующие размеры [7].

При больших относительных размерах длины нагретого участка $a^2 \text{Re}^{3/2} = \text{Re}_1 \rightarrow \infty$ необходимо ввести в рассмотрение тонкую область, в которой процессы конвекции и диффузии одинаковы по порядку величины (локальный пограничный слой на дне основного пограничного слоя). При этом необходимо также ввести в рассмотрение область, размер которой в поперечном направлении сравним с длиной неровности. Течение в этой

области будет в первом приближении невязким из-за большой величины локального числа Рейнольдса Re_1 .

Как было показано при исследовании обтекания локальных неровностей [7], в этом случае реализуется компенсационный режим обтекания, при котором индуцируется возмущение давления, приводящее суммарно к нулевому изменению толщины вытеснения.

Аналогичный режим возникает и в случае, когда длина участка совпадает по порядку величины с толщиной пограничного слоя. Течение описывается уравнениями сжимаемого пограничного слоя с компенсационным условием взаимодействия, определяющим распределение возмущенного давления при заданной температуре поверхности.

Компенсационный режим реализуется и при больших длинах участка, когда поперечный размер области возмущенного течения превосходит по порядку величины толщину пограничного слоя, но меньше, чем размер, характерный для режима свободного взаимодействия.

3. Анализ течения в области, длина которой сравнима с длиной области свободного взаимодействия. Режим свободного взаимодействия реализуется при одновременном проявлении в пристеночной области нелинейности, вязкости и индуцированного градиента давления.

Порядок изменения толщины пристеночного слоя можно получить из оценки (1.1) при учете, что основная причина изменения толщины вытеснения обусловлена прогревом локальной пристеночной области и тем самым соответствующим изменением плотности $\Delta\delta \sim \epsilon a^{1/3} \Delta T$. Сомножитель ΔT введен для учета режимов течения с малыми перепадами температуры. Это изменение толщины вытеснения индуцирует за счет взаимодействия с набегающим равномерным сверхзвуковым потоком возмущение давления $\Delta p \sim O(\Delta y/a) \sim O(\epsilon a^{-2/3} \Delta T)$. Принимая, что в общем случае возмущение давления вызывает нелинейные возмущения скорости u в пристеночном слое $u \sim \Delta u \sim \Delta p^{1/2}$ (в случае малых перепадов температуры $u \Delta u \sim \Delta p^{1/2}$, $u \sim a^{1/3}$, $\Delta u \sim a^{1/3} \Delta T$), получим, что оценка для возмущения давления Δp согласуется с оценкой (1.1) только при

$$a \sim O(\epsilon^{3/4}), \quad y \sim \Delta y \sim O(\epsilon^{5/4}), \quad \Delta p \sim O(\epsilon^{1/2}) \quad (3.1)$$

Это известные масштабы теории свободного взаимодействия, выведенные ранее в [10–12]. Представленные оценки определяют протяженность области энерговыделения, при обтекании которой необходимо учитывать индуцированное возмущение давления.

При малых изменениях температуры оценки имеют вид

$$a \sim O(\epsilon^{3/4}), \quad \Delta y \sim O(\epsilon^{5/4} \Delta T), \quad \Delta p \sim O(\epsilon^{1/2} \Delta T) \quad (3.2)$$

В соответствии с обычной методикой метода сращиваемых асимптотических разложений рассмотрим вначале возмущенную область I, представляющую собой равномерный сверхзвуковой или дозвуковой поток над областью взаимодействия со следующими характерными размерами: $\delta \ll x \sim y \sim z \sim O(\epsilon^{3/4}) \ll 1$ ($\delta \sim O(\epsilon)$) – толщина пограничного слоя), в которой справедливы независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида

$$x = 1 + ax_1, \quad y = ay_1, \quad z = bz_1, \quad t = \tau t_1$$

$$u = 1 + \epsilon^{1/2} u_1 + \dots, \quad v = \epsilon^{1/2} v_1 + \dots, \quad \rho = 1 + \epsilon^{1/2} \rho_1 + \dots, \quad (3.3)$$

$$p = (\gamma M_\infty^2)^{-1} + \epsilon^{1/2} p_1 + \dots, \quad T = (\gamma M_\infty^2)^{-1} + \epsilon^{1/2} T_1 + \dots$$

Подстановка разложений (3.3) в уравнения Навье–Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывают, что в первом приближении течение в области I описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \Pi_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = \frac{(\gamma - 1) \partial p_1}{\gamma \partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \Pi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) сводятся к одному уравнению

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} - \Pi_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z_1^2} = 0 \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5), связывающее распределение вертикальной скорости на внешней границе пограничного слоя и распределение давления, зависит от числа Маха внешнего потока. Так, для сверхзвуковых и дозвуковых течений справедливы следующие формулы:

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} p_1(x_1, 0) = v_1(x_1, 0) \quad (3.6)$$

$$\sqrt{1 - M_\infty^2} p_1(x_1, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(\xi, 0)}{(x - \xi)} d\xi \quad (3.7)$$

Рассмотрим область возмущенного течения II, расположенную в пограничном слое и имеющую следующие характерные размеры $\delta \ll x \sim O(\varepsilon^{3/4}) \ll 1$, $y \sim \delta \sim O(\varepsilon)$. В этой области вводятся новые независимые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$\begin{aligned} x = 1 + ax_2, \quad y = \varepsilon y_2, \quad z = bz_2, \quad t = \tau t_2 \\ u = u_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} u_{21} + \dots, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_{21} + \dots, \quad \rho = \rho_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} \rho_{21} + \dots \\ p = (\gamma M_\infty^2)^{-1} + \varepsilon^{1/2} p_2 + \dots, \quad T = T_{20}(y_2) + \varepsilon^{1/4} T_{21} + \dots, \quad w = \varepsilon^{1/4} w_{21} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $u_{20}(y_2)$, $\rho_{20}(y_2)$, $T_{20}(y_2)$ – профили продольной скорости, плотности, температуры в невозмущенном пограничном слое перед областью повышенной температуры. Подстановка разложений (3.8) в уравнения Навье–Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают в области II систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + u_{20} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial x_2} + \rho_{20} \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} + v_{21} \frac{d\rho_{20}}{dy_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{du_{20}}{dy_2} = 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad u_{20} \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + v_{21} \frac{dT_{20}}{dy_2} = 0, \quad \rho_{20} u_{20} \frac{\partial w_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial z_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решение системы (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{21} = \frac{Ddu_{20}}{dy_2}, \quad v_{21} = -\frac{u_{20}dD}{dx_2}, \quad \rho_{21} = \frac{Dd\rho_{20}}{dy_2} \\ T_{21} = \frac{DdT_{20}}{dy_2}, \quad p_2 = p_2(x_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $D = D(x_2, z_2, t_2)$ – произвольная функция.

В вязком теплопроводном и диффузионном пристеночном слое III с характерными размерами $\delta \ll x \sim O(\varepsilon^{3/4}) \ll 1$, $y \sim O(\varepsilon^{5/4}) \ll \delta$ вводятся независимые переменные и асимптотические разложения функций течения вида

$$\begin{aligned} x &= 1 + ax_3, & y &= \varepsilon a^{1/3} y_3, & z &= bz_3, & t &= \tau t_3 \\ u &= a^{1/3} u_3 + \dots, & v &= \varepsilon a^{-1/3} v_3 + \dots, & \rho &= \rho_3 + \dots \\ p &= p_\infty + a^{2/3} p_3 + \dots, & T &= T_3 + \dots, & w &= ba^{-2/3} w_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подстановка разложений (3.11) в уравнения Навье–Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ дают в главном приближении для слоя III уравнения сжимаемого пограничного слоя

$$\begin{aligned} \text{Sh}_2 \frac{\partial \rho_3}{\partial t_3} + \frac{\partial(\rho_3 u_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial(\rho_3 v_3)}{\partial y_3} + \frac{\partial(\rho_3 w_3)}{\partial z_3} &= 0 \\ \rho_3 \left(\text{Sh}_2 \frac{\partial u_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \Pi_1 w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) \\ \rho_3 \left(\text{Sh}_2 \frac{\partial w_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + \Pi_1 w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} &= \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) \\ \frac{\partial p_3}{\partial y_3} &= 0, \quad 1 = \rho_3 T_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\rho_3 \left(\text{Sh}_2 \frac{\partial T_3}{\partial t_3} + u_3 \frac{\partial T_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial T_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial T_3}{\partial z_3} \right) = \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial T_3}{\partial y_3} \right)$$

Внешние краевые условия получаются из сращения асимптотических разложений для давления (3.3), (3.8) и (3.11) в областях I, II и III с учетом (3.7) и (3.10)

$$\begin{aligned} p_3(x_3) &= p_2(x_2) = p_1(x_1, 0) = \\ &= \frac{v_1(x_1, 0)}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} = \frac{v_{21}(x_2, \infty)}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} = -B_1 \frac{dD/dx_2}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}}, \quad B_1 = \frac{\varepsilon}{a^{4/3}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Начальные краевые условия выводятся из сращения с пристеночной частью невозмущенного пограничного слоя на пластине

$$u_3 \rightarrow a_0 y_3, \quad T_3 \rightarrow T_0(0), \quad p_3, D \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty) \quad (3.14)$$

На поверхности пластины для компонентов скорости должны выполняться условия прилипания и непротекания

$$u_3 = v_3 = w_3 = 0, \quad T_3 = T_{3w} \quad (y_3 = 0) \quad (3.15)$$

Условия на больших расстояниях от поверхности принимают вид

$$u_3 \rightarrow a_0(y_3 + D), \quad T_3 \rightarrow T_{20}(0), \quad y_3 \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

Для приведения краевой задачи (3.12)–(3.16) к виду, удобному для численного интегрирования, делается замена переменных

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_b, \quad y_3 = \frac{1}{a_0^{1/3}} \int_0^{y_b} \frac{dy_b}{\rho_b}, \quad u_3 = a_0^{2/3} u_b, \quad w_3 = a_0^{2/3} w_b \\
 p_3 &= \rho_{20}(0) a_0^{2/3}, \quad B_2 = B_1 \rho_{20}(0)^{-1} a_0^{-5/3} (M_\infty^2 - 1)^{-1/2} \\
 \rho_3 &= \rho_{20}(0) \rho_b, \quad T_3 = T_{20}(0) T_b, \quad D = \frac{d}{a_0^{1/3}}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

При этом принимаются упрощающие допущения, что динамический коэффициент вязкости линейно зависит от температуры $\rho_3 \mu = 1$, $\text{Pr} = \text{const}$. Тогда в переменных (3.17) краевая задача записывается стандартным образом:

$$\begin{aligned}
 \text{Sh}_2 \frac{\partial u_b}{\partial t_b} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x_b} + v_b \frac{\partial u_b}{\partial y_b} + \Pi_1 w_b \frac{\partial u_b}{\partial z_b} + T_b \frac{\partial p_b}{\partial x_b} &= \frac{\partial^2 u_b}{\partial y_b^2} \\
 \text{Sh}_2 \frac{\partial w_b}{\partial t_b} + u_b \frac{\partial w_b}{\partial x_b} + v_b \frac{\partial w_b}{\partial y_b} + \Pi_1 w_b \frac{\partial w_b}{\partial z_b} + T_b \frac{\partial p_b}{\partial z_b} &= \frac{\partial^2 w_b}{\partial y_b^2} \\
 \text{Sh}_2 \frac{\partial T_b}{\partial t_b} + u_b \frac{\partial T_b}{\partial x_b} + v_b \frac{\partial T_b}{\partial y_b} + \Pi_1 w_b \frac{\partial T_b}{\partial z_b} &= \frac{\partial^2 T_b}{\partial y_b^2} \\
 \frac{\partial u_b}{\partial x_b} + \frac{\partial v_b}{\partial y_b} + \frac{\partial w_b}{\partial z_b} &= 0 \\
 u_b(x_b, 0, z_b, t_b) = w_b(x_b, 0, z_b, t_b) = v_b(x_b, 0, z_b, t_b) &= 0 \\
 T_b(x_b, 0, z_b, t_b) &= T_w(x_b, z_b, t_b) \\
 u_b \rightarrow y_b + d, \quad d_1 = \int_0^\infty (1 - T_1) d\eta + d, \quad T_1(x_b, \infty) \rightarrow 1, \quad y_b \rightarrow \infty \\
 d(-\infty) &\rightarrow 0 \\
 p_b(x_b, t_b) &= -B_2 \frac{\partial d_1}{\partial x_b}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из приведенных выше формул следует, что суммарное изменение толщины вытеснения определяется как сумма из вклада от изменения плотности и из-за изменения скорости (под влиянием градиента давления).

Существенную роль при этом играет параметр B_2 . При больших значениях этого параметра условие взаимодействия приводится к условию компенсации, при малых – реализуется режим линейных возмущений.

При больших длинах участка возмущенное течение описывается уравнениями сжимаемого пограничного слоя с заданным распределением давления, получаемым на осно-

ве условия взаимодействия с внешним потоком. Конкретный вид условия взаимодействия зависит от течения в области I.

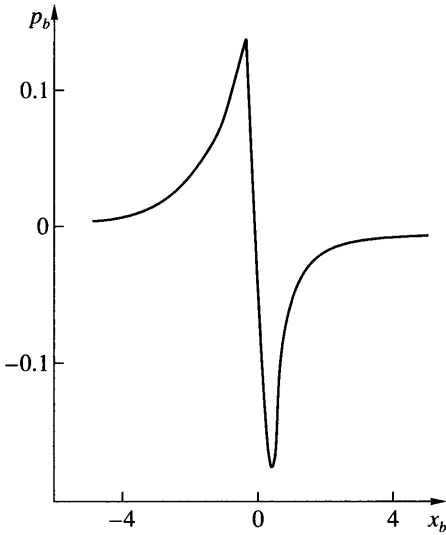
Принципиально важно, что для рассматриваемой задачи не реализуется режим нелинейного невязкого взаимодействия, поскольку сам поперечный масштаб области возмущенного течения определяется из условий равенства сил вязкости (теплопроводности) и сил инерции. Определенные особенности могут возникнуть при малых или больших величинах числа Прандтля, но в данной работе эти случаи не рассматриваются.

4. Анализ других пространственных режимов и эффектов нестационарности. Выше рассмотрены случаи, для которых трансверсальный размер области возмущенного течения совпадал с продольными размерами (квадратные в плане элементы). Достаточно просто описать режимы, для которых трансверсальный размер много меньше продольного и меньше или сравним с характерным поперечным размером. При этом получается некоторый вариант параболизированных уравнений Навье–Стокса, для которых процессы диффузии и теплопроводности проявляются и в трансверсальном и поперечном направлениях. Соответствующая такому режиму задача имеет вид

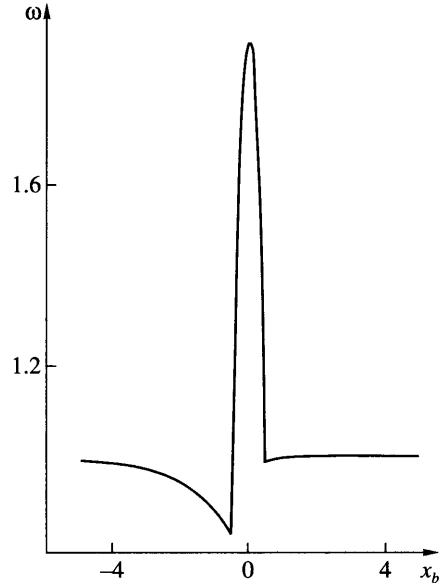
$$\begin{aligned} \text{Sh}_3 \frac{\partial u_c}{\partial t_c} + w_c \frac{\partial u_c}{\partial x_c} + v_c \frac{\partial u_c}{\partial y_c} + w_c \frac{\partial u_c}{\partial z_c} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p_c}{\partial x_c} &= \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{\partial}{\partial y_c} \left(\mu \frac{\partial u_c}{\partial y_c} \right) + \frac{\partial}{\partial z_c} \left(\mu \frac{\partial u_c}{\partial z_c} \right) \right] \\ \text{Sh}_3 \frac{\partial T_c}{\partial t_c} + w_c \frac{\partial T_c}{\partial x_c} + v_c \frac{\partial T_c}{\partial y_c} + w_c \frac{\partial T_c}{\partial z_c} &= \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{\partial}{\partial y_c} \left(\mu \frac{\partial T_c}{\partial y_c} \right) + \frac{\partial}{\partial z_c} \left(\mu \frac{\partial T_c}{\partial z_c} \right) \right] \\ \text{Sh}_3 \frac{\partial w_c}{\partial t_c} + w_c \frac{\partial w_c}{\partial x_c} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial y_c} + w_c \frac{\partial w_c}{\partial z_c} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p_c}{\partial z_c} &= \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{\partial}{\partial y_c} \left(\mu \frac{\partial w_c}{\partial y_c} \right) + \frac{\partial}{\partial z_c} \left(\mu \frac{\partial w_c}{\partial z_c} \right) \right] \\ \text{Sh}_3 \frac{\partial \rho_c}{\partial t_c} + \frac{\partial(\rho_c u_c)}{\partial x_c} + \frac{\partial(\rho_c v_c)}{\partial y_c} + \frac{\partial(\rho_c w_c)}{\partial z_c} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Некоторые особенности связаны с трехмерными течениями около неровностей, имеющими трансверсальный размер больший, чем толщина, но меньший, чем длина. В этом случае в области вблизи тепловой неровности можно определить величину трансверсальной скорости и найти соответствующее изменение давления в трансверсальном направлении. При этом оказывается, что градиент давления в продольном направлении в первом приближении отсутствует. Трансверсальная скорость в общем случае не стремится к нулю при больших расстояниях от тепловой неровности и необходимо ввести в рассмотрение область, масштабы которой в продольном и трансверсальном направлениях одинаковы и в которой в плоскости симметрии задана трансверсальная скорость, индуцируемая тепловой неровностью. Эти возмущения приводят к появлению линейно возмущенной области. Иерархия соответствующих режимов во многих чертах совпадает с соответствующими режимами обтекания локальных неровностей [7].

Выше рассмотрены только такие режимы энерговыделения, для которых нестационарные эффекты проявляются в пристеночной области. В общем случае при нестационарном изменении температуры необходимо учитывать, что характерное число Струхала пропорционально отношению времени конвекции (отношение соответствующей длины и скорости) и времени изменения температуры. Структура возмущенных областей течения такова, что они имеют одинаковую протяженность и разную высоту и соответственно разные характерные величины продольной скорости. Скорость в расположенных выше областях больше, а время конвекции меньше, поэтому наименьшее время конвекции будет именно в пристеночной области. Если характерное число Струхала велико, в течении в пристеночной области существенны диффузия и нестационарные эффекты, а конвективные эффекты отсутствуют.



Фиг. 1. Стационарное распределение возмущения давления p_b в зависимости от продольной координаты x_b



Фиг. 2. Стационарное распределение поверхностного трения в зависимости от продольной координаты x_b

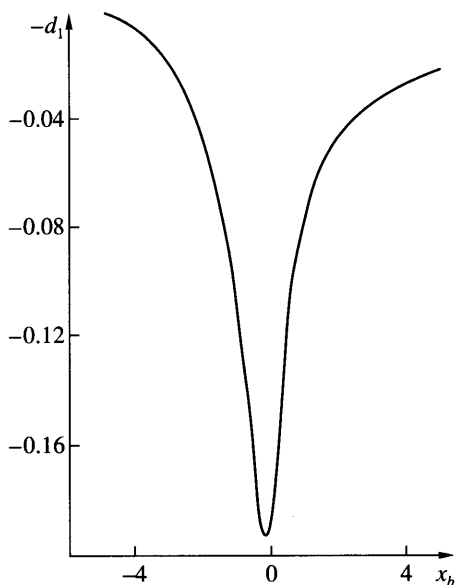
Одновременное влияние конвективных и нестационарных членов будет проявляться в области критического слоя. Влияние нестационарного нагрева на течение в критическом слое позволяет в принципе управлять параметрами устойчивости, поскольку течение в пристеночной области влияет на течение в критическом слое.

5. Результаты численных расчетов. Из приведенных краевых задач получено решение задачи (3.18) при следующем распределении температуры поверхности:

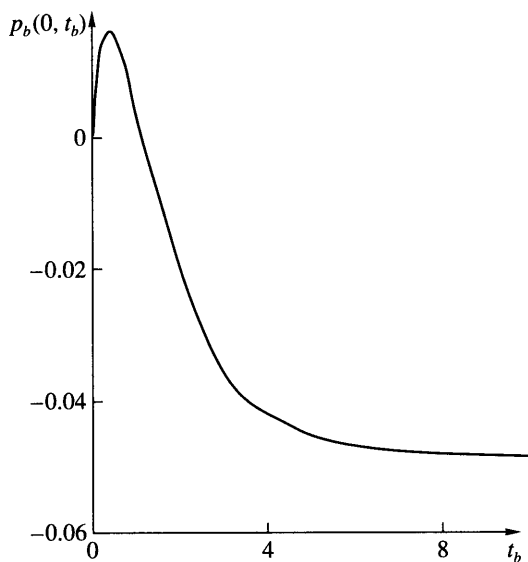
$$T_w(|x_b| \leq 0.5, t_b) = 1 + (1 - \exp(-t_b))(0.25 - x_b^2), \quad T_w(|x_b| > 0.5, t_b) = 1, \quad B_2 = 1$$

Распределение индуцированного давления $p_b(x_b, t_b \rightarrow \infty)$ при больших значениях времени качественно совпадает с решениями, полученными при обтекании локальных неровностей [7] (фиг. 1). Также типично распределение поверхностного трения $\omega = \frac{du_b}{dy_b}(x_b, 0, t_b \rightarrow \infty)$ (фиг. 2). Негладкость производных обусловлена разрывом в распределении производной температуры по продольной координате. Также и распределение толщины вытеснения $-d_1(x_b, t_b \rightarrow \infty)$ (фиг. 3). Изменение толщины определяется вкладом двух составляющих, определяющихся изменением температуры и изменением скорости. Изменение температуры порождает эффективную неровность, простирающуюся на большие расстояния вниз по потоку от источника. Ситуация в этом смысле схожа с обтеканием полубесконечной неровности. Зависимость возмущения давления в точке наибольшей температуры от времени $p_b(0, t_b)$ (фиг. 4) показывает, что давление достигает положительного максимума (заброс), а потом выходит на некоторое стационарное значение. Аналогично выглядит и распределение поверхностного трения в точке максимума температуры от времени $\omega = \frac{du_b}{dy_b}(0, 0, t_b)$ (фиг. 5).

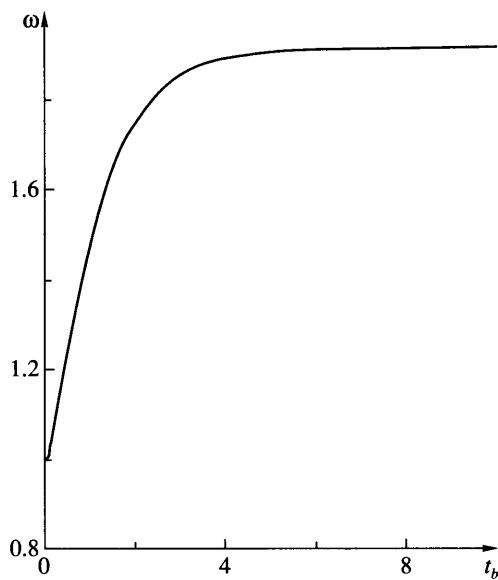
Заключение. Исследовано влияние нестационарного локального изменения температуры поверхности на течение в ламинарном пограничном слое. Показано, что определя-



Фиг. 3. Стационарное распределение изменения толщины вытеснения пограничного слоя $-d$ в зависимости от продольной координаты x_b



Фиг. 4. Зависимость возмущения давления в точке максимума температуры поверхности от времени



Фиг. 5. Зависимость трения на поверхности в точке максимума температуры поверхности от времени

ющие параметры – это геометрические размеры области измененной температуры. В зависимости от этих параметров в пограничном слое могут возникать различные структуры возмущенного течения, описываемые различными математическими моделями. Результаты численного анализа для одного из возможных режимов показывают, что локализованное тепловое воздействие на течение в ламинарном пограничном слое качественно совпадает с воздействием неровностей и может использоваться для управления отрывом и ламинарно-турбулентным переходом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 05-01-00555) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (№ НШ-8597.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurchenko N., Voropaev G., Pavlovsky R., Vinogradsky P., Zhdanov A.* Flow control using variable temperature boundary conditions, Proc. Eur. Fluid Mechanics Conf. EFMC-2003, Toulouse, 24–28 August, France. 2003.
2. *Соколов Л.А.* К асимптотической теории плоских течений ламинарного пограничного слоя с разрывом температуры на теле // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1650. С. 18–23.
3. *Гершбейн Э.А., Казаков В.Ю., Тирский Г.А.* О развитии ламинарного пограничного слоя за точкой разрыва каталитической активности поверхности // Теплофизика высоких температур. 1986. Т. 24. № 6. С. 1132–1142.
4. *Боголепов В.В., Лунатов И.И., Соколов Л.А.* Структура химически неравновесных течений при скачкообразном изменении температуры и каталитических свойств поверхности // ПМТФ. 1990. № 3. С. 30–41.
5. *Боголепов В.В., Нейланд В.Я.* Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа // Тр. ЦАГИ. 1971. Вып. 1363.
6. *Боголепов В.В., Нейланд В.Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений // Аэромеханика. М.: Наука, 1976. С. 104–118.
7. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Лунатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 455 с.
8. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
9. *Коган М.Н., Галкин В.С., Фридендер О.Г.* О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородностей температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111–125.
10. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
11. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate // *Mathematika*. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106–121.
12. *Messiter A.F.* Boundary-layer flow the trailing edge of a flat plate // *SIAM Journal. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.

Москва

Поступила в редакцию
17.1.2006