

УДК 533.6.011:534.23

© 2006 г. А. Н. КРАЙКО, К. С. ПЬЯНКОВ

ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С ОТРЫВНЫМИ ЗОНАМИ И НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОНТАКТНЫМИ РАЗРЫВАМИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Приводятся примеры течений с отрывными зонами и с движущимися контактными разрывами, которые получаются в результате численного интегрирования нестационарных уравнений идеального газа. Указанные примеры представляют стационарную кольцевую отрывную зону на затупленной головной части в сверхзвуковом набегающем потоке, периодический сход нестационарных разрывов с цилиндра при его обтекании стационарным равномерным дозвуковым потоком со сверхкритическим числом Маха и сложную нестационарную деформацию контактного (тангенциального) разрыва – границ плоской до- или сверхзвуковой струй в спутном дозвуковом потоке малой скорости. Многократное увеличение мощности разностных сеток при численном интегрировании уравнений Эйлера показывает отсутствие в рассчитанных примерах заметного влияния схемной вязкости. В пользу невязкой природы полученных отрывов говорят и их известные аналоги, построенные в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Осредненные по времени поля скорости плоской струи и интенсивность ее звукового поля в разумных пределах согласуются с известными данными.

Ключевые слова: идеальный газ, численное интегрирование уравнений Эйлера, замкнутая отрывная зона, подвижные контактные разрывы, нестационарная структура и акустическое поле плоской сверхзвуковой струи.

Для идеальной несжимаемой жидкости плоскопараллельные, осесимметричные и даже пространственные течения с отрывными зонами и с контактными разрывами, сходящими с острых кромок или с гладких участков обтекаемых тел, давно представляются достаточно привычными гидродинамическими объектами [1–15]. Одна из причин этого состоит в том, что построение таких течений опирается на аналитические, точнее, частично аналитические подходы. Последняя оговорка означает, что, хотя и здесь без вычислений обойтись не удастся, указанные подходы сводятся, например, к численному решению полученной аналитически системы интегральных уравнений, а не к интегрированию дифференциальных уравнений Эйлера, описывающих те же течения. В противоположность этому течения с отрывными зонами, получающимися при численном интегрировании уравнений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа, обычно воспринимаются как счетный феномен, обязанный своим появлением схемной вязкости. Опыт авторов показывает, что это далеко не всегда так. Одна из целей данной статьи – попытаться убедить в этом читателя.

Для подтверждения заявленной позиции сравниваются результаты, полученные на сетках разной мощности, и даются ссылки на соответствующие несжимаемые аналоги. При этом наряду с замкнутым стационарным отрывом на осесимметричной головной части с передним торцом приводится пример периодического течения с регулярными отрывными структурами типа дорожки Кармана. Такое течение получается при расчете поперечного обтекания кругового цилиндра равномерным стационарным дозвуковым потоком в узком диапазоне сверхкритических чисел Маха. С ростом числа Маха вместо нестационарного обтекания с вихревыми структурами, попеременно сходящими

с верхней и нижней сторон цилиндра, реализуется в основном стационарное течение с интенсивными колебаниями лишь в отрывной донной области и в начинающемся от ее вершины следе. Аналогичный результат получается при сверхзвуковом обтекании полубесконечной пластины с задним торцом (донным срезом). В отличие от остальных задач обтекание такой пластины рассчитывалось и в двумерном, и в трехмерном приближениях.

Примеры иного типа относятся к расчету также в рамках идеального газа истечения плоской до- или сверхзвуковой струй в спутный дозвуковой поток малой скорости. В отличие от регулярного периодического течения, получающегося в случае нестационарного обтекания цилиндра, изменение параметров струи, включая крайне сложную форму ее границы (в идеальном газе – контактного или тангенциального разрыва) приобретает нерегулярный (“хаотический”) характер. При этом осредненные по времени распределения скорости и уровень интенсивности звукового поля такой струи, оказываются близкими к известным экспериментальным данным.

1. Стационарная отрывная зона на затупленной головной части. В [16] при расчете обтекания идеальным газом короткой головной части с передним торцом над примыкающей к нему с изломом выпуклой образующей получилась замкнутая отрывная зона. В этом примере число Маха набегающего потока $M_\infty = 1.5$, а удлинение головной части $l = L/R = 0.25$, где L и R – длина и радиус основания головной части. Здесь и далее газ совершенный с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$, а индекс “ ∞ ” метит параметры невозмущенного набегающего потока. Нестационарные уравнения Эйлера интегрировались с помощью программы [17], в основе которой лежит схема С.К. Годунова [18], модифицированная в соответствии с предложениями [19–22]. В областях гладкого распределения параметров на близких к равномерным разностным сеткам эта схема обеспечивает аппроксимацию дифференциальных уравнений течения со вторым порядком. В данном примере головной скачок выделялся явно с использованием идей [23].

Обтекаемая головная часть, примыкающая к круговому цилиндру, самая густая разностная сетка, отошедшая ударная волна и изомахи через $\Delta M = 0.1$ показаны на фиг. 1, *a* (см. вклейку). Красные кривые – звуковые линии ($M = 1$), включающие “размазанный” скачок, замыкающий местную сверхзвуковую зону. В дополнение периодическая цветовая палитра дает представление о непрерывном распределении чисел Маха. Передний излом контура равен 45° . Из-за небольшой выпуклости примыкающего к излому наклонного участка излом в точке его стыковки с цилиндрической образующей уменьшается до 39° . Часть поперечных сеточных линий приходит в точки излома. В увеличенном масштабе изомахи и непрерывное распределение чисел Маха показаны на фиг. 1, *b* в пристеночной области, в прямоугольнике, выделенном на фиг. 1, *a*. В верхней части фиг. 1, *b* приведены распределения числа Маха (отрицательного в обратном токе), полученные на трех разностных сетках в одном из сечений отрывной зоны (N – общее число ячеек, 1, 2, 3 – $N = 1656, 6624, 26496$) как функции расстояния от стенки n . Сетки с $N = 6624$ и 26496 получались увеличением в 2 и 4 раза числа сеточных линий каждой семейства во всех блоках самой грубой ($N = 1656$) многоблочной сетки. На фиг. 1, *в* и *г* для того же сечения представлены распределения энтропийной функции $S = p/\rho^\kappa$ и полной энтальпии H . Здесь $\Delta\phi = \phi/\phi_\infty - 1$, ϕ – M, S и H, p – давление и ρ – плотность газа. Фигура 1, *б–г* демонстрирует сходимость результатов по N и сильную неизэнтропичность и неизоэнергетичность течения в отрывной зоне (ΔS достигает 1.1, а $-0.3 < \Delta H < 0.45$). Значительное отличие S в отрывной области от значений за стационарным головным скачком, а H – от постоянного вне этой области значения H_∞ – результат нестационарного этапа развития течения, когда при обтекании излома в сильно перерасширенном потоке возникали интенсивные нестационарные скачки и волны разрежения.

Равномерное измельчение разностной сетки в 2 и 4 раза не позволяет в данном сечении показать скачки параметров на тангенциальном разрыве, который служит границей зоны отрыва. В то же время в его совпадающей с изломом начальной точке (фиг. 1, *a*) на-

личие скачков скорости и числа Маха не вызывает сомнения. В итоге, как представляется авторам, распределения M , S и H , построенные на фиг. 1 по результатам расчета на трех сетках, можно рассматривать как подтверждение существования течения идеального газа со стационарными отрывными зонами. В качестве дополнительной аргументации укажем на известные плоские и осесимметричные стационарные течения с отрывными зонами, построенные в рамках идеальной несжимаемой жидкости (см. [1–6] и цитируемую там литературу).

При заданном удлинении $l = 0.25$ головная часть, обтекание которой представлено на фиг. 1, оптимальна по волновому сопротивлению в приближении формулы Ньютона. Наряду с ней для $0.25 \leq l \leq 8$ и $1.2 \leq M_\infty \leq 10$ в [16] построены головные части, оптимальные в рамках полной системы уравнений Эйлера. Их контуры, как и контур на фиг. 1, имели передний торец, однако для $M_\infty = 1.5$ и $l = 0.25$ излом в точке стыковки торца с пологим участком равен не 45° , а 33° , а за счет большей выпуклости контура второй излом (в точке стыковки головной и цилиндрической частей) уменьшился до 28° . Расчет обтекания всех головных частей включал численное интегрирование по программе [17] и процесс установления. При построении тел, оптимальных в приближении уравнений Эйлера, установлением получались примыкающее к торцу дозвуковое течение и сверхзвуковой поток в пучке C^+ -характеристик, образующемся при обтекании излома в точке стыковки торца и заранее неизвестных оптимальных пологих участков. Последние строились затем методом характеристик. Для контроля все течение около построенных тел, как и обтекание головной части на фиг. 1, находились численным интегрированием уравнений Эйлера. Несмотря на присутствующую при этом схемную вязкость, обтекание их пологих участков всегда получалось безотрывным и практически неотличимым от полученного методом характеристик. Для $M_\infty \geq 2$ и $l \geq 0.25$ при расчете установлением обтекания ньютоновских головных частей отрывы около пологих участков их контуров также отсутствовали.

В связи с обнаруженным в [16] отрывом Ю.Д. Шмыглевский – рецензент этой работы написал в своем отзыве: “При расчете обтекания тел численным методом (со схемной вязкостью) у боковой поверхности возникает возвратное течение, которого не было бы при использовании метода характеристик. Точных доказательств невозможности такого эффекта в идеальном газе при непрерывности течения или доказательств его возможности нет. Поэтому существование подобных возвратных течений остается делом веры. Авторы статьи являются высококвалифицированными и известными научными работниками. Поэтому им можно предоставить возможность выступить с рискованной деталью работы”. В связи с этим замечанием в дополнение к сказанному выше отметим, что для расчета обтекания пологого участка ньютоновской головной части методом характеристик нужно, чтобы получающийся установлением пучок C^+ -характеристик – волн разрежения, начинающихся в верхней точке торца, простирался до головного скачка. В рассматриваемом примере требуемый стационарный пучок с падением давления в 13.6 раза при развороте в таком случае звукового потока на 45° в процессе установления не получался. Причина этого не в схемной вязкости, а в том, что в разогнавшемся в изломе до $M = 2.765$ потоке при обтекании почти прямолинейной пологой стенки (угол ее наклона уменьшается всего на 6°) возникает скачок, ограничивающий снизу по течению пучок волн разрежения [24–28]. Этот быстро набирающий интенсивность скачок, взаимодействующий сначала с пучком волн разрежения, а затем с головным скачком, по-видимому, является главным препятствием для реализации стационарного сверхзвукового безотрывного течения над пологим участком.

Для головной части, спрофилированной для $M_\infty = 1.5$ и $l = 0.25$ в рамках уравнений Эйлера, давление за изломом в 33° меньше, чем перед ним, в 6.1 раза, $M = 2.245$, а угол наклона касательной к пологой образующей убывает не на 6, а на 29° . Такая сильно выпуклая образующая уже по способу ее построения [16] обтекается без скачка, который мог бы ограничивать снизу по течению менее интенсивный пучок волн разрежения.

Это, как отмечено ранее, подтверждает и сходимость процесса установления при численном интегрировании нестационарных уравнений Эйлера.

Итак, в данном примере течение идеального газа с замкнутым стационарным отрывом возникает из-за того, что соответствующее безотрывное стационарное обтекание просто не может реализоваться. Рассмотренная ситуация противоположна той, которая имеет место в случае обтекания идеальным газом профиля с острой задней кромкой. Как известно, в идеальной жидкости задача безотрывного стационарного обтекания профиля имеет континуум решений с разными значениями циркуляции Γ . Единственное решение и значение $\Gamma = \Gamma_0$, которые отбираются условием Чаплыгина–Жуковского, обеспечивают обтекание задней кромки с конечными скоростью и давлением. Если угол δ между верхней и нижней образующими ненулевой, то при $\Gamma = \Gamma_0$ скорость жидкости на задней кромке равна нулю, а линия тока сходит с нее по биссектрисе угла заострения. В идеальном газе при сколь угодно малом M_∞ единственное безотрывное обтекание острой задней кромки – это сход по биссектрисе, и какое-либо дополнительное условие отбора излишне. Дело в том, что для безотрывного стационарного обтекания острого угла поток идеального газа прежде всего должен быть хотя бы звуковым [29]. Однако, если это произойдет даже на самой кромке, то у звукового потока есть предельный угол разворота ϑ^m такой, что для любых реальных k разность $(\pi - \vartheta^m)$ много больше любых разумных углов заострения. Наконец, у сверхзвукового потока величина ϑ^m меньше, чем у звукового. Таким образом, несмотря на схемную вязкость, которая, как следует из приведенной выше цитаты, согласно широко распространенной точке зрения, могла бы обеспечить отрывное обтекание профиля с острой задней кромкой, при численном интегрировании уравнений Эйлера для идеального газа в процессе установления без использования условия схода с задней кромки автоматически выбирается решение именно с таким сходом. В [30], где при расчете установлением обтекания решетки профилей, по-видимому, впервые подробно исследовалась роль условия схода с задней кромки, возможные механизмы правильного отбора связывались с устойчивостью и диссипативными разностными эффектами.

В принципе возможны газы (например, с близким к единице показателем адиабаты), для которых при обтекании задней кромки ограничение, связанное с величиной ϑ^m , несущественно, и ее стационарное обтекание вроде бы реально. Для них, однако, поток при развороте вокруг задней кромки на угол $(\pi - \delta)$ разгонится до большой сверхзвуковой скорости и малого давления. В подобной ситуации критичными станут условия встречи развернувшегося сверх- или гиперзвукового потока с низким давлением и текущего ему навстречу до- или трансзвукового потока с высоким давлением. Выполнение этих условий при стационарном безотрывном обтекании столь мало вероятно, что и в этом случае процесс установления почти наверняка выберет решение со сходом с задней кромки.

Обтекание равномерным потоком идеального газа головных частей далеко не любой формы обязано быть стационарным (безотрывным или отрывным). В качестве примера нестационарного обтекания сверхзвуковым потоком идеального газа с $M_\infty = 5$ осесимметричных головных частей сошлемся на построенные в [31] конфигурации с затупленным штырем и вторым (задним) торцом в плоскости их основания. Указанные конфигурации обтекаются идеальным газом с образованием сложной системы скачков. Важный ее элемент – скачок, отошедший от заднего торца и взаимодействующий с косым (в тройной точке) головным скачком, возникающим при обтекании штыря. По направлению к штырю из тройной точки идет косой скачок. Сверхзвуковой поток за ним после поворота в отраженном скачке, как и в одной из исследованных ранее [32] конфигураций (см. также [22, 33–36]), формирует низкоэнтропийную струю с повышенным давлением торможения. Отличие от течений, исследованных в [22, 32–36], в данном случае состоит в присутствии у стенки тонкой высокоэнтропийной струйки, прошедшей через близкий к прямому скачок перед передним торцом. Наличие этой струйки вызывает

отрывы потока в окрестностях точек отражения от нее косога скачка и стыковки штыря с задним торцом. Заполнение и опорожнение отрывных зон высокоэнтропийным газом – один из механизмов нестационарных колебаний, возникающих при обтекании таких головных частей.

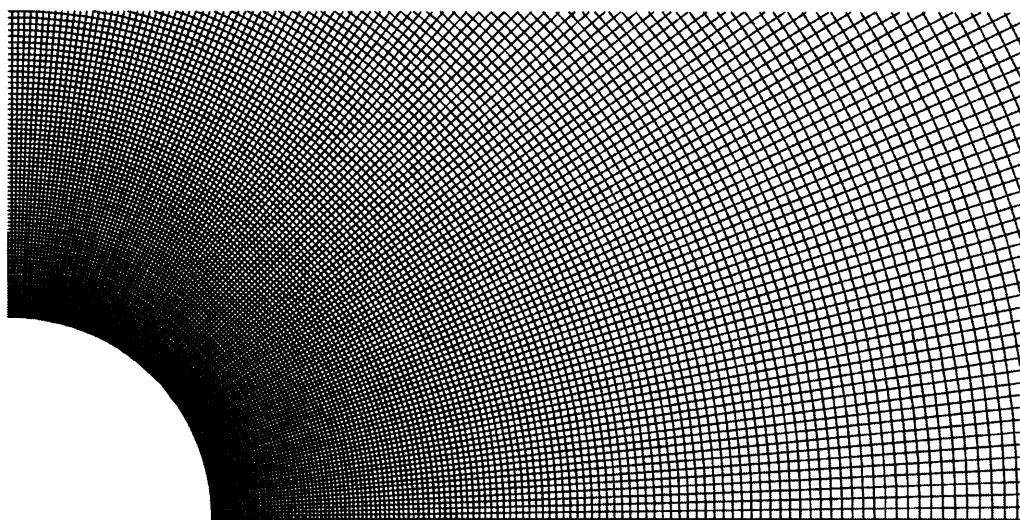
В процессе установления допускается интегрирование со своим шагом для ячеек разных размеров. При расчете по-настоящему нестационарных течений, как при обтекании головных частей со штырем и в примерах, рассмотренных далее, движение по времени в блоках с ячейками с сильно отличающимися размерами должно быть синхронным. Требуемая синхронизация обеспечивалась приемом, развитым при выполнении [37, 38].

2. Поперечное нестационарное обтекание кругового цилиндра. При расчете поперечного обтекания кругового цилиндра равномерным потоком идеального газа в зависимости от величины M_∞ наблюдаются различающиеся принципиально режимы течения: стационарный, периодический с регулярными отрывными структурами типа дорожки Кармана и квазистационарный с небольшими колебаниями параметров в отрывной донной области и значительными колебаниями следа. Для нестационарных режимов существенно, что рассчитывается все течение, а не его верхняя (или нижняя) половина с постановкой условия непротекания на разделяющей их плоскости симметрии цилиндра и равномерного набегающего потока. Все приводимые в данном разделе результаты получены без предположений о симметрии течения, т.е. расчетом не половины, а всего течения.

Прежде чем переходить к результатам, полученным для течений идеального газа, отметим, что нестационарные отрывные течения идеальной жидкости с использованием тех или иных упрощений строились многими исследователями (см. [7–15] и цитированную там литературу). При этом, как и для исследуемых ниже течений идеального газа, рассматривая обтекание одних конфигураций (в частности, отрывное обтекание расширяющейся пластины [7–9]) можно ограничиться половиной плоскости течения, а для других, начиная с некоторого значения аналога угла атаки (в задачах отрывного обтекания расширяющегося цилиндра и его комбинации с пластиной [10–12]), необходимо рассматривать все течение.

Принципиальное отличие моделирования стационарных отрывных течений идеальной жидкости [1–6] от моделирования нестационарных отрывных течений также идеальной жидкости [7–15] состоит в том, что во втором случае используются “сингулярные” объекты (вихревые нити, вихререзрезы, бесконечно скручивающиеся на концах вихревые пелены, дискретные вихри), которые, строго говоря, далеко нефизичны. Более того, выявляя многие особенности исследуемых течений (например, невязкую природу несимметрии обтекания аналога кругового конуса под большими углами атаки [10–12]) и позволяя, как метод дискретных вихрей [15], рассчитывать важные для приложений характеристики двумерных и пространственных конфигураций, указанные методы вызывают определенное чувство неудовлетворения. Например, в [7–9, 14] вместо бесконечной скорости и минус бесконечного давления на острых кромках появляются аналогичные бесконечности в вихревых нитях – двумерных вихрях, заменяющих не более физичные бесконечно скручивающиеся концы вихревых пелен. Отличие результатов, получающихся для идеального газа численным интегрированием нестационарных уравнений Эйлера, состоит в отсутствии подобных полезных, но нефизичных “химер”.

Как правило, интегрирование уравнений Эйлера велось на разностных сетках с общим числом ячеек $N \approx (5-15) \cdot 10^5$, покрывавших кольцевую расчетную область с внешним радиусом, равным сорока радиусам цилиндра. Размер ячеек рос с удалением от цилиндра с двукратным уменьшением их числа на двух сеточных окружностях. В результате, например, при 1024 ячейках у поверхности цилиндра их число на внешней границе уменьшалось до 256. Увеличение размера ячеек при приближении к внешней границе автоматически обеспечивало выполнение условия отсутствия отражения. Представле-



Фиг. 2. Фрагмент разреженной разностной сетки (вдвое по сеточным линиям обоих семейств при $N \approx 0.5 \cdot 10^6$)

ние о структуре разностной сетки дает фигура 2. На ней для $N \approx 0.5 \cdot 10^5$ показан малый фрагмент расчетной области с половиной сеточных линий каждого семейства.

В начале расчета на пренебрежимо малом, по сравнению с полным временем счета временном интервале, в параметры набегающего потока вносилась, как правило, пренебрежимо малая несимметрия. В дальнейшем она либо полностью затухала, либо приводила к периодическим или беспорядочным изменениям параметров в каких-то частях потока. Как показали многочисленные тесты, характер и величина этих изменений не зависели ни от величины, ни от способа указанных возмущений.

Представленные на фиг. 3 (см. вклейку) поля температуры и энтропийной функции $S = p/\rho^k$, полученные численным интегрированием нестационарных двумерных уравнений Эйлера, реализуются при поперечном обтекании кругового цилиндра равномерным (после “выключения” начальных возмущений) потоком идеального газа с разными значениями числа Маха. В случае $M_\infty = 0.4$ течение стационарное, безотрывное и симметричное с небольшими местными сверхзвуковыми зонами на боковых поверхностях цилиндра (фиг. 3, а). Число Маха в них не превышает 1.01. С увеличением M_∞ растет размер сверхзвуковых зон и интенсивность замыкающих эти зоны скачков. При $M_\infty \approx 0.435$ течение становится нестационарным с образованием, усилением, а затем ослаблением скачков, движущихся против сверхзвукового (в сверхзвуковых зонах) и дозвукового потоков попеременно вдоль верхней и нижней поверхностей цилиндра. В интервалы времени, когда интенсивность скачков близка к максимальной, поток за ними течет вдоль поверхностей в направлении движения скачков. В результате этого и роста энтропии в скачках меняющейся интенсивности с цилиндра сходят вихревые образования типа дорожки Кармана. На фиг. 3, б для $M_\infty = 0.5$ дан мгновенный снимок распределения энтропийной функции, а на фиг. 4 для того же M_∞ – в разные моменты времени поля температуры. В этом примере при расчете на четырех сетках с $N \approx 6.4 \cdot 10^3, 2.6 \cdot 10^4, 10^5$ и $0.4 \cdot 10^6$ период колебаний $\tau = 11.84, 11.76, 11.70$ и 11.70 . Здесь период отнесен к R/V_∞ , где R – радиус цилиндра, V – скорость.

Для $M_\infty = 0.7$ моментальный снимок поля температуры дан на фиг. 3, в. По мере приближения M_∞ к единице характер нестационарного течения вблизи цилиндра изменяется: вместо попеременного схода вихрей образуется колеблющаяся донная область и вы-

ходящий из нее след. При $M_\infty > 1$ при сохранении интенсивных колебаний следа возмущения границ донной области становятся меньше. Это иллюстрирует мгновенный снимок поля температуры для $M_\infty = 2$ на фиг. 3, г. Образование следа – результат достаточно интенсивного нестационарного течения в треугольной отрывной зоне за цилиндром (см. ниже).

Интересно сравнить показанные на фиг. 3 и 4 (см. вклейку) картины течения, полученные численным интегрированием нестационарных двумерных уравнений течения идеального газа с тем, что наблюдается в эксперименте. Сопоставление с приведенными в [39] теневыми фотографиями обтекания цилиндра до- и околозвуковыми потоками вязкого газа показывает, что для $M_\infty = 0.45$ и $Re = 1.1 \cdot 10^5$ представленные в [39] напоминающие дорожку Кармана нестационарные периодические структуры имеют чисто вязкую природу. При этом влияние вязкости столь велико, что течение всюду дозвуковое. Для $M_\infty = 0.64$ и 0.8 и $Re = 1.35 \cdot 10^6$ на фотографиях из [39] в похожем нестационарном периодическом течении видны сложные, несимметричные, движущиеся ударные волны. При дальнейшем росте числа Маха ($M_\infty = 0.9, 0.95$ и 0.98), как и по результатам расчета идеального газа, течение в примыкающей к цилиндру отрывной донной области стабилизируется. К сожалению, и в [39], и в указанном там первоисточнике отсутствует информация о периоде колебаний.

Вернемся к сверхзвуковому обтеканию цилиндра (фиг. 3, г). Если в сверхзвуковой набегающий поток вместо цилиндра поставить клин конечной длины с полууглом при вершине δ , то при $\delta \leq \delta^*$, где δ^* зависит от M_∞ , за присоединенным к вершине клина скачком $M \geq 1$. Нулевому углу δ отвечает полубесконечная пластина с задним торцом, разделяющая идентичные равномерные потоки с $M_\infty \geq 1$. В рамках стационарных уравнений течения идеального газа в таких случаях к торцу клина (пластины) можно пристроить континуум треугольных отрывных (донных) областей, заполненных неподвижным газом. Верхняя и нижняя границы донной области – тангенциальные разрывы, отделяющие покоящийся газ от сверхзвуковых потоков, которые после поворота в симметричных косых скачках текут в первоначальном направлении, т.е. вдоль плоскости симметрии клина (пластины). В случае пластины возможные значения постоянных в донной области донных давлений p_b удовлетворяют неравенствам $p_\infty \geq p_b \geq p_m \geq 0$. Для достаточно больших M_∞ величина $p_m = 0$. Для умеренных M_∞ она отвечает такому разгону исходных сверхзвуковых потоков до $M = M_1$, для которого каждый разогнавшийся поток при встрече поворачивается на максимальный для M_1 угол поворота в косом скачке.

Согласно [40–42], из континуума допустимых в рамках стационарных решений уравнений течения идеального газа значений p_b единственную величину выбирает вязкость. Однако интересно выяснить, что даст численное интегрирование нестационарных уравнений. С этой целью на разных сетках были проведены расчеты сверхзвукового обтекания полубесконечной пластины при разных $M_\infty \geq 1$. Согласно выполненным расчетам, при численном интегрировании двумерных нестационарных уравнений из-за достаточно интенсивного квазипериодического нестационарного течения в практически замкнутой и близкой к треугольной донной области полного установления не наступает. В то же время действующие на торец осредненные по времени давления p_b , много меньшие значений, известных из эксперимента и получающихся по вязким моделям, по порядку величины близки к p_m . В связи с этим напомним, что в двумерном приближении тангенциальный разрыв, ограничивающий покоящийся газ, при выполнении некоторого неравенства, содержащего скорость сверхзвукового потока и скорости звука с обеих сторон от разрыва, становится устойчивым [43] (как установлено в [44], нейтрально устойчивым). Если использовать осредненные параметры, то рассчитанные течения находятся в окрестности границы устойчивости. По отношению же к пространственным возмущениям тангенциальный разрыв неустойчив всегда [43].

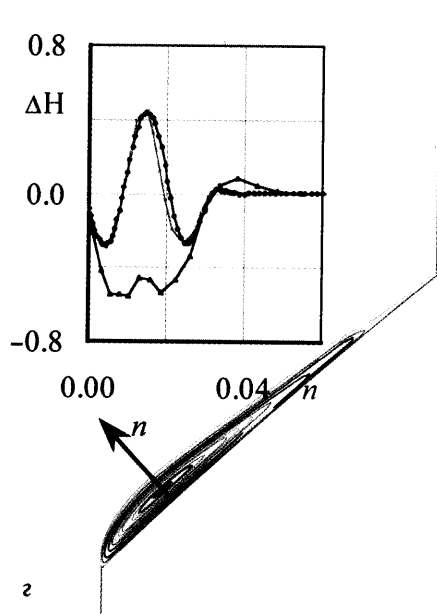
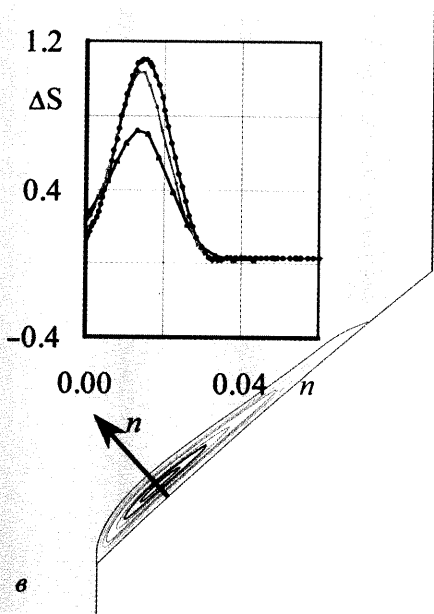
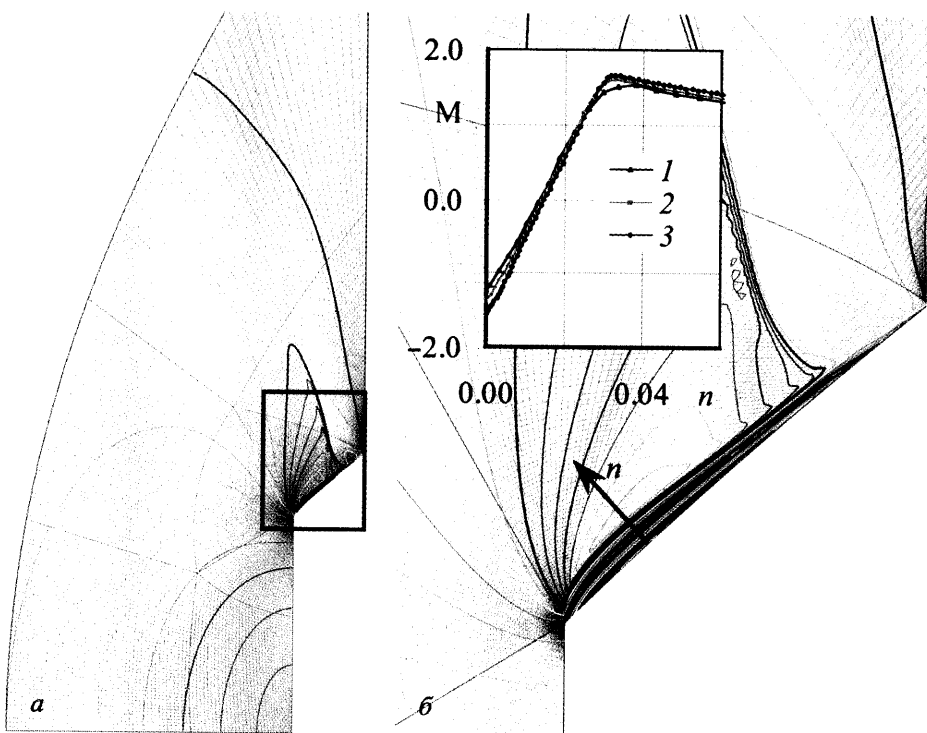
При всех $M_\infty > 1$ получающиеся в расчете потоки обтекают донную область с большой сверхзвуковой скоростью, поэтому даже двух-трехкратные изменения давления

внутри и на границе этой области приводят к заметно меньшим возмущениям направления сверхзвуковых потоков и локальных углов наклона ее границ. Как следствие, форма донной области, близкая к равнобедренному треугольнику, сравнительно стабильна. От ее вершины идут косые скачки. В каждый момент начальные наклоны скачков определяются условиями равенства за ними давлений и направлений встречающихся высокоскоростных потоков. Вблизи точки встречи изменения направлений и других их параметров приводят к существенно большим возмущениям течения за скачками. Один из результатов такого усиления и небольших вертикальных перемещений точки встречи – нестационарный след с вихревыми структурами, хорошо видимыми на фиг. 3, г. При этом, как показывают полученные на разных сетках распределения энтропийной функции, несмотря на интенсивные квазипериодические колебания в донной области, газ из нее практически не вытекает. Квазипериодические колебания в донной области и нестационарный след, идущий от ее вершины, обнаруживаются и при расчете половины течения с условием непротекания на “плоскости симметрии”. В такой постановке направление потока за скачком и вертикальная координата его начальной точки фиксированы. В результате колебания в донной области оказываются менее интенсивными, а напоминающие дорожку Кармана вихревые структуры в нестационарном следе отсутствуют.

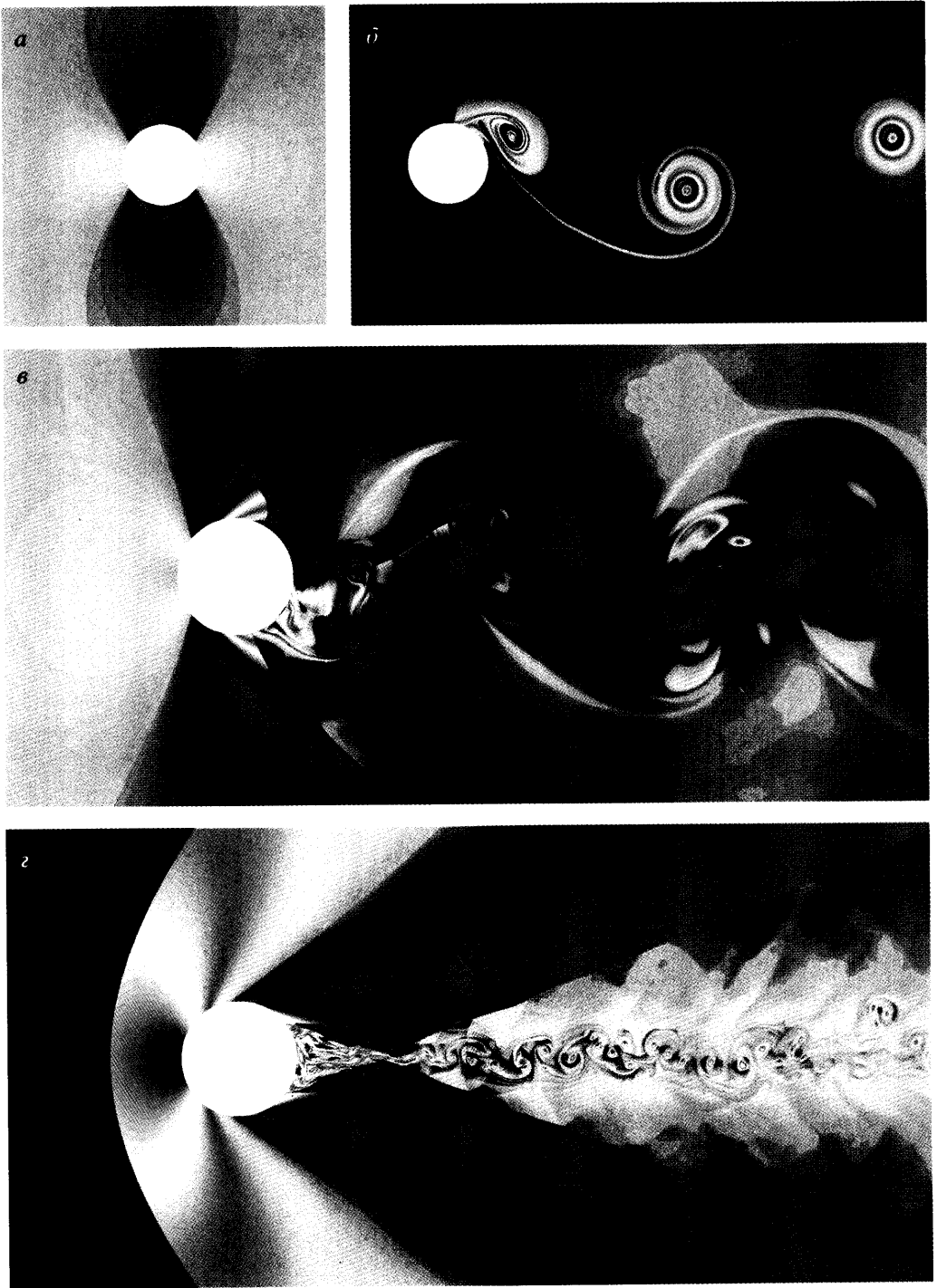
Для $M_\infty = 2.0$ расчет обтекания заднего торца был выполнен не только в двумерном, но и в трехмерном приближении. При этом рассчитывалась половина течения с условием непротекания на плоскости симметрии пластины, а протяженность расчетной области по оси z – в направлении ребра торца была равна его высоте – полувысоте торца h в полной задаче. На боковых границах (при $z/h = \pm 0.5$) ставились условия либо непротекания, либо периодичности. В обоих постановках расчеты, выполненные на нескольких сетках, дали значения донного давления, близкие к известным величинам: $p_0/p_\infty = 0.31-0.35$ при практически таких же экспериментальных и расчетных значениях из [41]. Расчетные “двумерные” величины, полученные в том же случае на эквивалентных двумерных сетках, в 3–4 раза меньше.

3. Плоская струя в спутном дозвуковом потоке. В данном разделе, представляющем изложение доклада [45] одного из авторов, приведены результаты численного моделирования истечения плоских до- или сверхзвуковых струй в спутный дозвуковой поток. Эти результаты получены численным интегрированием двумерных нестационарных уравнений Эйлера с помощью тех же разностной схемы и численного алгоритма, которые применялись при получении результатов предыдущего раздела.

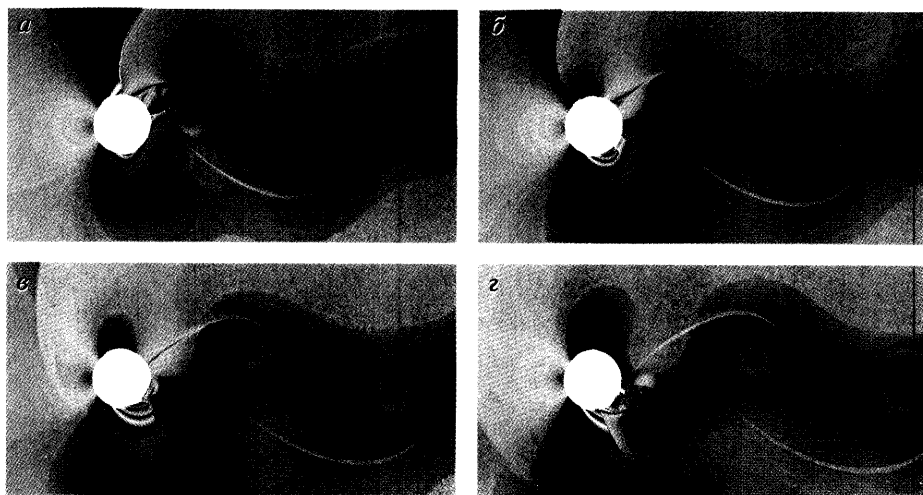
Выполнение условия отсутствия отражения на внешних границах расчетной области обеспечивалось увеличением размера ячеек при удалении от струи и введением слоев “окаймляющих” ячеек с фиксированными параметрами. Слева (вне сопла), сверху, снизу и частично справа они брались равными параметрам невозмущенного спутного дозвукового потока. Используемая разностная схема “распадная”. В процессе счета процедура распада разрыва переносит из окаймляющих ячеек на границу расчетной области только то число задаваемых в них величин (на самом деле определенных по ним инвариантов нестационарного течения), которое требует решаемая задача. Близким способом задавались параметры струи в “дозвуковой” части сопла. В первом приближении они брались из одномерного расчета, а затем подправлялись так, чтобы определяемые из распада разрыва полное давление p_0 и температура T_0 на каждом отрезке входной границы не отличались от заданных величин. Еще одно отличие – добавление к подправленным значениям скорости и плотности малых возмущений в виде “белого шума”, вводимого генератором случайных чисел. Значения p_0 и T_0 такие случайные добавки изменяли не более чем на несколько десятых процента. Будучи разными по высоте вспомогательного слоя, они же приводили к несимметрии течения. Расчеты с четверо увеличенной и нулевой амплитудой белого шума не выявили ее влияние на средние параметры и на акустические характеристики струи.



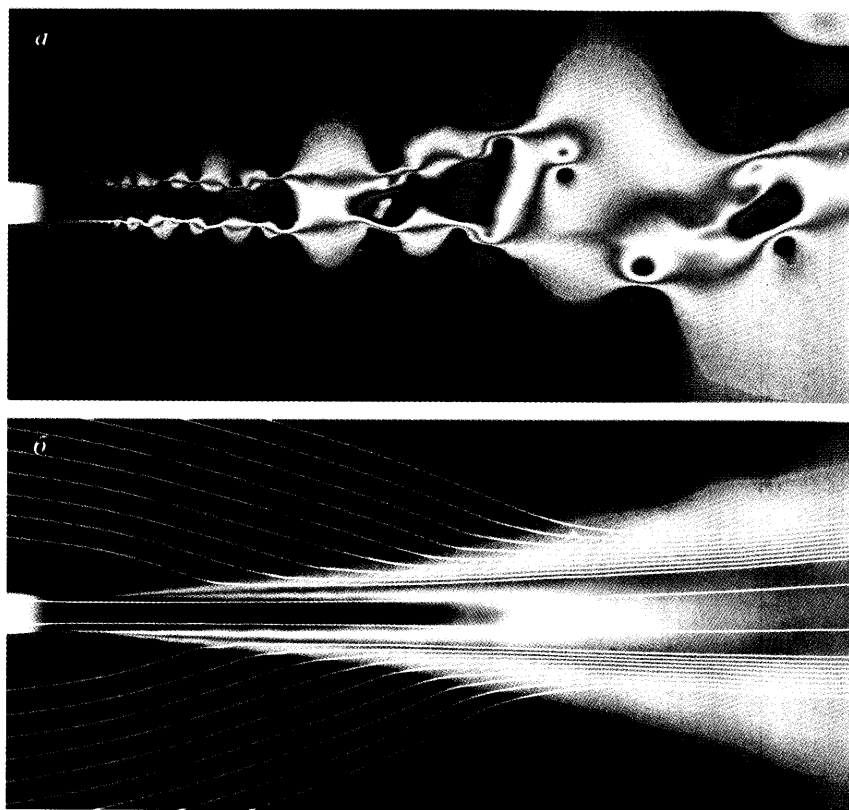
Фиг. 1. Общая картина течения (а) и распределения в пристеночной области за изломом числа Маха (б), энтропийной функции (в) и полной энтальпии (з) при обтекании короткой головной части с $M_\infty = 1.5$, $l = 0.25$



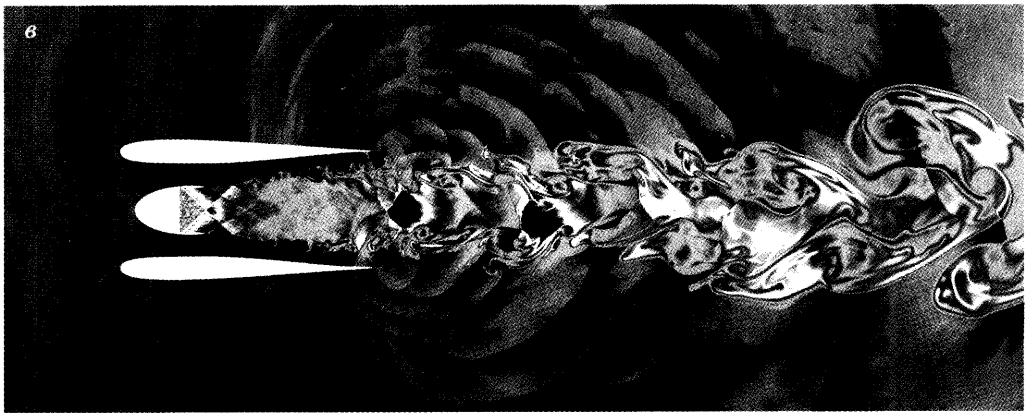
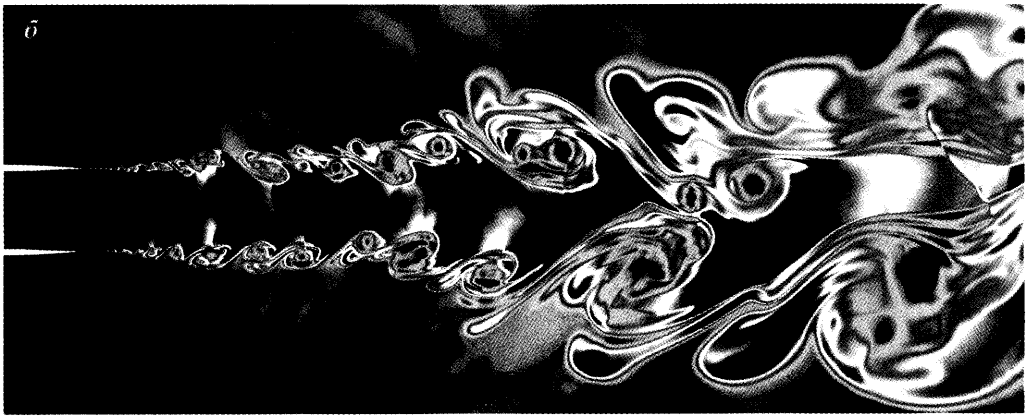
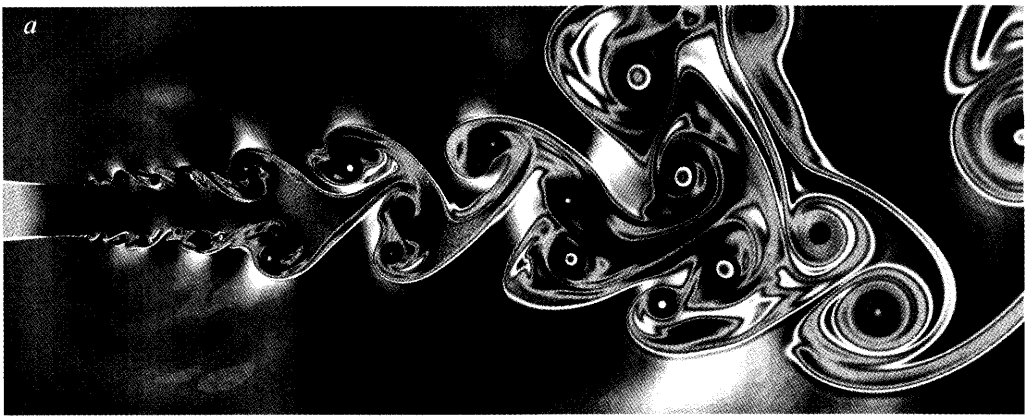
Фиг. 3. Мгновенные поля температуры (а), (в), (г) и энтропийной функции (б) при обтекании цилиндра потоком: а-г – $M_\infty = 0.4, 0.5, 0.7$ и 2



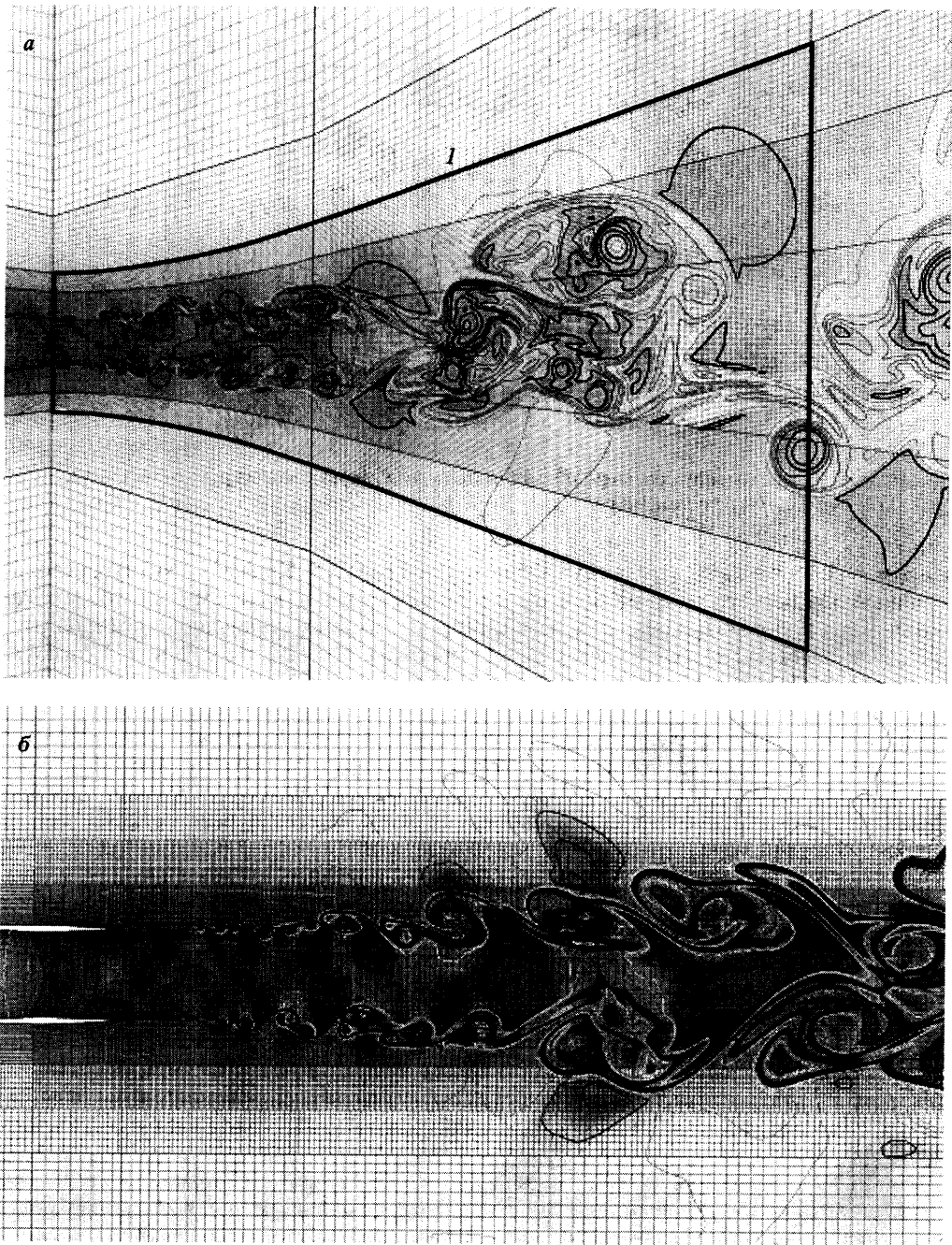
Фиг. 4. Мгновенные поля температуры через одну восьмую периода при обтекании цилиндра потоком с $M_\infty = 0.5$



Фиг. 7. Мгновенное (а) и осредненное (б) поля продольной скорости при истечении дозвуковой струи

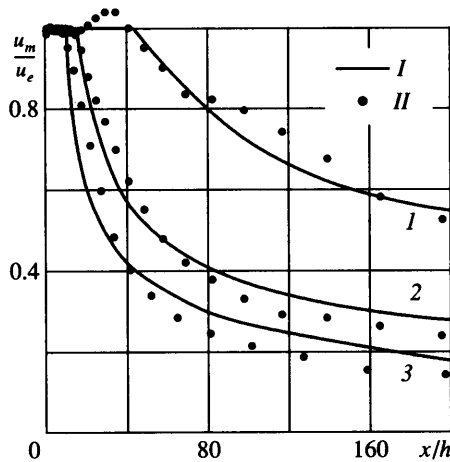


Фиг. 6. Мгновенные поля температуры при истечении дозвуковой (а) и сверхзвуковых (б, в) струй



Фиг. 5. Фрагменты сеток и мгновенных полей температуры для дозвуковой (а) и сверхзвуковой (б) струй

Два фрагмента использовавшихся разностных сеток вместе с мгновенными изолиниями температуры приведены на фиг. 5, где дан малый фрагмент самой грубой разностной сетки (а) для расчета истечения дозвуковой струи при докритическом перепаде



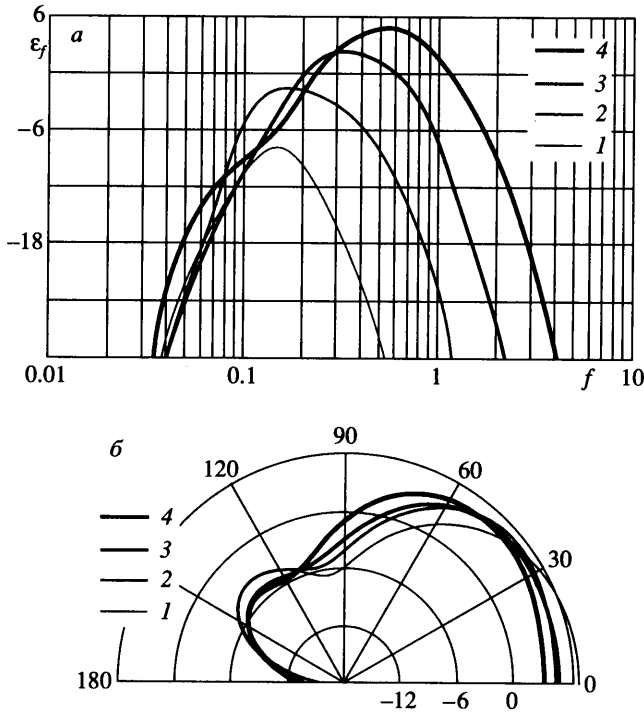
Фиг. 8. Распределения осредненной скорости на “оси” дозвуковых струй: $l-3 - \tau = 0.2$, 1, 2; $l - [47]$, $II -$ результаты расчета

$\pi \equiv p_0/p_\infty = 1.5$ и $\tau \equiv T_0/T_\infty = 1.0$ в спутный поток с $M_\infty = 0.025$. Кривая l – контур, использованный для расчета акустических характеристик струи в “дальнем поле” по методу [46]. Фигура 5, б показывает часть области (по вертикали – половину), в которой рассчитывалось истечение из сопла сверхзвуковой струи с $M_\infty \approx 1.2$, $\pi = 2.65$ и $\tau \approx 1.7$ в спутный поток с $M_\infty = 0.2$. На срезе сопла при близком к нулю наклоне вектора скорости давление $p_e \approx p_\infty$.

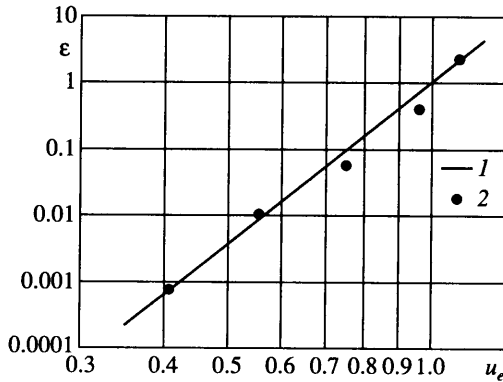
Мгновенные распределения температуры даны на фиг. 6 (см. вклейку) для трех струй: уже упоминавшихся дозвуковой (а) с $\pi = 1.5$ и сверхзвуковой (б) с $M_e \approx 1.2$ и сверхзвуковой (в) с $M_e \approx 1.7$, $\pi = 5.0$ и $\tau = 2.65$ в эжекторном увеличителе реактивной тяги при $M_\infty = 0.2$. Для всех струй хорошо видны нестационарные структуры с четкими, хотя и весьма сложными контактными разрывами, отделяющими более холодный (а) или горячий (б) и (в) газ струи от газа спутного потока. Как и ранее, цветовая палитра периодическая, поэтому, например, на фиг. 6, а температура наиболее сильно охладившегося газа в вихревых образованиях подобно температуре спутного потока красного цвета.

На фиг. 7 (см. вклейку) для дозвуковой струи ($M_\infty = 0.025$, $\pi = 1.5$, $\tau = 1.0$) показаны мгновенное (а) и осредненное по времени (б) поля продольной скорости. Кроме того, на фиг. 7, б нарисованы линии тока, рассчитанные по осредненным компонентам скорости. На фиг. 8 найденные интегрированием уравнений Эйлера зависимости от расстояния x от среза сопла осредненной продольной скорости u_m/u_e на плоскости симметрии изотермической и неизотермических дозвуковых струй с теми же, что и выше, M_∞ и π сравниваются с известными зависимостями из [47] (h – полувысота среза сопла и u_e – скорость на его срезе).

Фигуры 9 и 10 демонстрируют возможности расчета акустических характеристик плоской струи по результатам численного интегрирования двумерных нестационарных уравнений Эйлера. На фиг. 9 представлены мощностной октавный спектр (а, f – отнесенная к $2h/u_e$ частота; по оси ординат отложена плотность спектральной мощности ϵ_f) шума, излучаемого дозвуковой струей ($M_\infty = 0.025$, $\pi = 1.5$, $\tau = 1.0$), и его диаграммы направленности (б), рассчитанные на сетках с возрастающим числом ячеек. По двум направлениям сеточных линий во всех блоках каждой следующей сетки число ячеек N увеличивалось вдвое. Чем больше N , т.е. чем мельче сетка, тем до более высоких частот соответствующая кривая дает правильные (не зависящие от N) результаты. Одно из следствий этого – рост суммарной мощности ϵ излучения, безразмерные величины ко-



Фиг. 9. Мощностной октавный спектр (а) и диаграмма направленности (б) дозвуковой струи, рассчитанные на разных сетках: 1–4 – $N = 1.3 \cdot 10^4, 5.2 \cdot 10^4, 2.07 \cdot 10^5, 8.28 \cdot 10^5$



Фиг. 10. Зависимость полной акустической мощности дозвуковой струи от скорости на срезе сопла: 1 – теория Лайтхилла, 2 – расчет

торой на указанных сетках равны 0.014, 0.036, 0.058 и 0.093. Угловые интенсивности на диаграммах направленности отнесены к ϵ , полученному на данной сетке. Найденная численным интегрированием уравнений Эйлера на самой мелкой сетке зависимость ϵ от скорости струи u_e на срезе сопла, деленной на скорость звука в спутном потоке, представлена на фиг. 10: прямая 1 – “закон восьмой степени”, следующий из теории Лайтхилла [48, 49], 2 – результаты расчета. Разные u_e на фиг. 10 отвечают $\pi = 1.125, 1.25, 1.5,$

2.0 и 3.0. Как уже отмечалось, определение акустических характеристик струи опирается на аппарат, развитый в [46], с вычислением интегралов по контуру I , изображенному на фиг. 5, а.

Заключение. Приведенные примеры показывают, что в рассмотренных задачах дает численное интегрирование уравнений Эйлера, описывающих нестационарные плоские, осесимметричные и пространственные (в одном примере) течения идеального газа. В некоторых случаях получающиеся в рамках этого приближения результаты в каком-то диапазоне определяющих параметров близки к наблюдаемым в эксперименте, в других – и отдаленно не напоминают их. Первая ситуация имеет место при расчете средних параметров и шума плоской до- или сверхзвуковой струи, истекающей в спутный дозвуковой поток, вторая – при определении в двумерном приближении давления, действующего на задний торец пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком. При этом любая ситуация может смениться на противоположную при изменении определяющих параметров, симметрии или размерности задачи. В случае струи это может произойти при расчете половины течения и при переходе к осесимметричному случаю. В плоских и осесимметричных задачах, в постановке которых отсутствует третья пространственная переменная, существенных перемен естественно ожидать при переходе к трехмерным нестационарным уравнениям Эйлера. Именно это продемонстрировали расчеты донного давления за пластиной.

В настоящее время широкое распространение получили численные методы решения уравнений Навье–Стокса для ламинарных течений и уравнений Рейнольдса, замкнутых различными дифференциальными моделями турбулентности, для турбулентных течений. Кстати, расчет, выполненный в рамках одной из таких моделей, дал “турбулентную” отрывную зону, близкую к представленной на фиг. 1. С другой стороны, при также интенсивно развиваемом прямом численном моделировании турбулентных течений немаловажное значение имеет понимание роли разных факторов. Для проблемы турбулентности в целом безусловно важны и нестационарность и трехмерность течения, и молекулярные вязкость и теплопроводность газа. В разных задачах, однако, относительная роль указанных факторов может существенно различаться так, что на каком-то уровне (например, масштаба возмущений) незначительна пространственность потока, а на другом – неидеальность среды. В той или иной степени при прямом моделировании турбулентности данные обстоятельства принимаются во внимание. В этом смысле приведенные выше результаты могут помочь при обосновании законности соответствующих действий. Имея это в виду, можно надеяться, что знание возможностей модели идеального газа будет полезно не только в чисто познавательном отношении.

Авторы благодарны Ю.Д. Шмыглевскому, процитированное замечание которого простимулировало данное исследование, а также А.Н. Секундову и С.Ю. Крашенинникову – за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 05-01-00846 и 05-01-08054-офи_п) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проекты: НШ-2124.2003.1 и НШ-9902.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шабат А.Б.* Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи // ПМТФ. 1962. № 4. С. 68–80.
2. *Садовский В.С.* Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1. № 4. С. 1–9.
3. *Садовский В.С.* О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 771–779.
4. *Norbury J.* A family of steady vortex rings // J. Fluid Mech. 1973. V. 57. Pt 3. P. 417–431.
5. *Кожуро Л.А.* Семейство осесимметричных вихревых течений с поверхностью разрыва постоянной Бернулли // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 88–94.

6. Садовский В.С. Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения // Тр. ЦАГИ. 1989. Вып. 2447. 108 с.
7. Edwards R.H. Leading-edge separation from delta wings // J. Aeronautical Sci. 1954. V. 21. № 2. P. 134–135.
8. Brown C.E., Michael W.H., Jr. Effect of leading-edge separation on the lift of a delta wing // J. Aeronautical Sci. 1954. V. 21. № 10. P. 690–694, 706.
9. Копченев В.И., Крайко А.Н., Щипин С.К. Автомодельная задача отрывного обтекания идеальной жидкостью расширяющейся пластины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 62–69.
10. Dyer D.E., Fiddes S.P., Smith I.H.B. Asymmetric vortex formation from cones at incidence – a simple inviscid model // Aeronaut. Quart. 1982. V. 33. Pt 4. P. 293–312.
11. Гоман М.Г., Храбров А.Н. К возникновению несимметричного отрывного обтекания тонких тел вращения на больших углах атаки // Уч. зап. ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 6. С. 1–9.
12. Крайко А.Н., Реент К.С. Невязкая природа несимметрии отрывного обтекания симметричных тел равномерным потоком // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 63–70 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-сост. Крайко А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 246–256.
13. Копченев В.И., Крайко А.Н., Ломков К.Э. Нестационарное отрывное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью мгновенно ускоренной пластины конечной ширины // Уч. зап. ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 1. С. 53–64.
14. Никольский А.А. О “второй” форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков) // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. № 2. С. 193–196.
15. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
16. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
17. Крайко А.Н., Пьянков К.С. Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околосвуковом потоке идеального газа // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890–1904 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 250–264.
18. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
19. Колган В.П. Использование принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
20. Родионов А.В. Монотонная схема второго порядка для сквозного счета неравновесных течений // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
21. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
22. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 201–210.
23. Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И. К численному построению фронтов ударных волн // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 1980. Т. 20. № 3. С. 716–723 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 169–175.
24. Шифрин Э.Г. О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 43–48.
25. Бойченко В.С., Лифшиц Ю.Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла // Уч. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 8–16.
26. Есин А.И., Чернов И.А. О скачке уплотнения при обтекании выпуклого угла // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 292–297.
27. Есин А.И., Чернов И.А. К вопросу о локальном течении вблизи выпуклого угла // Аэродинамика. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Вып. 6 (9). С. 17–32.

28. Григоренко В.Л., Крайко А.Н. О внутренних скачках уплотнения при сверхзвуковом обтекании идеальным газом конфигураций клин–пластина и конус–цилиндр // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 91–97.
29. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
30. Богод А.Б., Замтфорт Б.С., Иванов М.Я., Крайко А.Н. Об использовании процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания газом решеток профилей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 118–124.
31. Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С. Осесимметричная головная часть минимального волнового сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 723–841.
32. Edney В.Е. Anomalous heat transfer and pressure distribution on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. Stockholm: The Aeronaut. Res. Institute of Sweden, 1968. FFA Rep. 115. 92 p.
33. Tannehill J.C., Holst T.L., Rakich J.V. Numerical computation of two-dimensional viscous blunt body flows with an impinging shock // AIAA Journal. 1976. V. 14. № 2. P. 204–211.
34. Tannehill J.C., Holst T.L., Rakich J.V., Keyes J.W. Comparison of two-dimensional shock impingement computation with experiment // AIAA Journal. 1976. V. 14. № 4. P. 539–541.
35. Tannehill J.C., Vigneron Y.C., Rakich J.V. Numerical solution of two-dimensional turbulent blunt body flows with an impinging shock // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 12. P. 1289–1290.
36. Ганжело А.Н., Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И. О повышении точности решения газодинамических задач // Современные проблемы аэромеханики: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1987. С. 87–102.
37. Богданов В.И., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Профилирование несимметричного сопла при изменяющихся по времени параметрах торможения истекающего газа и размере минимального сечения // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 3. С. 43–59.
38. Kraiko A.N., Pyankov K.S., Tillyayeva N.I. Optimal nozzle design when time-changing its throat size and pressure ratio // XVI Int. Symp. on Air Breathing Engines (ISABE). Cleveland, OH, USA, August 31–September 5. 2003. ISABE–2003–1117. 9 p.
39. Ван Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 182 с.
40. Korst Н.Н. A theory for base pressure in transonic and supersonic flow // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 4. P. 593–600 = Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. № 5 (45).
41. Таширов Р.К. Расчет донного давления и параметров отрывного течения за плоским уступом при звуковой или сверхзвуковой скорости набегающего потока // Тр. ЦИАМ. 1972. № 538. 12 с.
42. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 456 с.
43. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Физматлит, 2004. 456 с.
44. Blumen W. Jet flow instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. Pt 4. P. 737–748.
45. Пьянков К.С. Моделирование шума струи и определение его акустических характеристик на основе нестационарных уравнений Эйлера // Матер. IV Междунар. школы–семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория, 6–15 июня 2004. М.: МЦНМО, 2004. С. 101–102.
46. Ffows Williams J.E., Hawkings D.L. Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion // Phil. Trans. of the Royal Soc., Ser. A. 1969. V. 264. № 1151. P. 321–342.
47. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Часть 1. М.: Наука, 1991. 597 с.
48. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. Part I. General Theory // Proc. of the Royal Soc., Ser. A. 1952. V. 211. № 1107. P. 564–587.
49. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. Part II. Turbulence as a source of sound // Proc. Royal Soc., Ser. A. 1954. V. 222. № 1148. P. 1–32.