

УДК 532.526.5

© 2006 г. В. Б. ЗАМЕТАЕВ, М. А. КРАВЦОВА

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СМЕШЕНИИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ,
СТЕКАЮЩИХ С ЗАДНЕЙ КРОМКИ КРЫЛА**

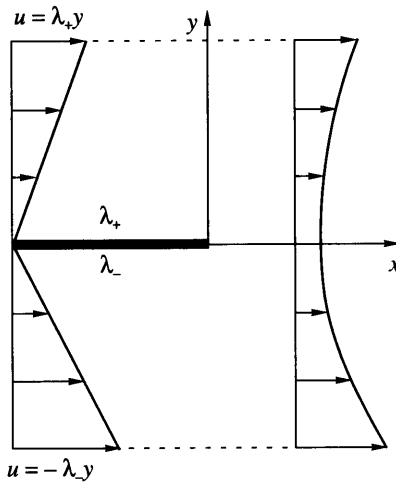
При смешении потоков вязкой несжимаемой жидкости с разными значениями скорости в окрестности задней кромки формируется трехслойная структура области взаимодействия, подобно симметричному стеканию при равных скоростях. Пограничные слои, развивающиеся на верхней и нижней сторонах профиля, образуют вязкий слой смешения (вихревую пелену), разделяющий течение вниз по потоку от задней кромки. С помощью предложенного эффективного численного метода расчета уравнений асимптотической теории взаимодействия решена краевая задача, соответствующая течению в вязком подслое в окрестности задней кромки пластины при больших числах Рейнольдса Re .

Ключевые слова: пограничный слой, взаимодействие, задняя кромка.

Теория взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком (вязко-невязкое взаимодействие) внесла наиболее существенный вклад в развитие теоретической механики жидкости и газа во второй половине XX века. Впервые она изложена в [1] и [2] применительно к отрыву пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, а затем при изучении течения несжимаемой жидкости в окрестности задней кромки пластины [3, 4]. Впоследствии теория взаимодействия была применена для изучения разнообразных течений и стала играть ключевую роль в изучении таких явлений, как отрыв потока, передача возмущений вверх по потоку в сверхзвуковом и гиперзвуковом пограничном слое [5], бифуркация решения по параметру, а также возможный гистерезис в отрывных течениях [6].

Течение в окрестности задней кромки крыла, вызывающее теоретический и практический интерес – одна из первых задач, где была выделена полная аналитическая трехслойная структура области взаимодействия и сформулирована соответствующая система асимптотических уравнений [3, 4]. Численное решение задачи о симметричном течении жидкости в окрестности задней кромки пластины [7] показало, что трение вдоль поверхности пластины всюду положительно и растет при приближении к задней кромке. В [8] эта задача обобщена на случай обтекания тонкого крыла и найдено значение параметра, связанного с толщиной профиля, при котором появляется отрыв пограничного слоя. Другая проблема, посвященная течению жидкости вблизи задней кромки профиля, вызвана зарождением отрыва из-за наличия угла атаки [9]. Численное решение этой задачи получено в [10], а расчеты [11] установили две ветви решения в некотором диапазоне значений параметра, зависящего от угла атаки.

Настоящая работа посвящена исследованию течения вблизи задней кромки пластины, за которой происходит смешение двух потоков несжимаемой жидкости. Структура такого течения обобщает теорию [3, 4], построенную для одинаковых потоков сверху и снизу пластины. Основное влияние задней кромки простирается на расстояние порядка $O(Re^{-3/8})$ при $Re \rightarrow \infty$, решение для области взаимодействия срывается с решениями пограничного слоя вверх по потоку слоя смешения вниз по потоку. Эта задача была сформулирована в [12], но не решена из-за значительной вычислительной сложности.



Фиг. 1. Схема течения в пограничном слое

Предложенный эффективный численный метод позволил успешно преодолеть вычислительные проблемы.

1. Рассмотрим стационарное течение жидкости около плоской пластины, установленной параллельно набегающему потоку, предполагая, что константы Бернулли различны выше и ниже пластины. Такая ситуация может реализоваться при смешении двух различных потоков или на боковой кромке крыла малого удлинения под углом атаки. В силу локальности изучаемого явления конкретная схема течения не существенна и рассматривается наиболее простая. Введем декартову прямоугольную систему координат $Ox^{\circ}y^{\circ}$, начало которой совпадает с задней кромкой, так что пластина длиной L занимает отрезок $-L \leq x^{\circ} \leq 0$. Полагаем, что внешний по отношению к пограничному слою поток жидкости имеет скорость u_+ при $y^{\circ} > 0$ и u_- , когда $y^{\circ} < 0$. Вверху и внизу вдоль пластины развиваются пограничные слои, например Блазиуса (фиг. 1). Размерные компоненты скорости, а также давление обозначим соответственно u° , v° и p° . В этих переменных разложение решения в вязком подслое в окрестности задней кромки при $Re \rightarrow \infty$ может быть представлено в виде [12]

$$\begin{aligned}
 x^{\circ} &= LRe^{-3/8} x, & y^{\circ} &= LRe^{-5/8} y \\
 u^{\circ} &= U_{\infty} Re^{-1/8} u + \dots, & v^{\circ} &= U_{\infty} Re^{-3/8} v + \dots \\
 p^{\circ} &= p_{\infty} + \rho U_{\infty}^2 Re^{-1/4} p + \dots
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

ρ и ν означают плотность и коэффициент кинематической вязкости, число Рейнольдса $Re = U_{\infty} L/\nu$. Подставляя (1.1) в уравнения Навье – Стокса и устремляя число $Re \rightarrow \infty$, получаем соответствующие уравнения для вязкого подслоя.

Для верхней части пластины

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp_+}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

На поверхности пластины выполняются условие прилипания

$$u = v = 0, \quad y = 0$$

а также условия сращивания с пограничным слоем перед областью взаимодействия

$$u = \lambda_+ y, \quad x \rightarrow -\infty$$

и с решением в основной части пограничного слоя

$$u = \lambda_+(y + A_+(x)) + \dots, \quad y \rightarrow +\infty$$

Чтобы сформулировать условие взаимодействия, необходимо провести анализ отклика внешнего потенциального течения на вытесняющее действие пограничного слоя.

Решение в основной невязкой части пограничного слоя имеет вид

$$u = u_0(y) + A_+(x)u'_0(y) + \dots$$

$$v = -A'_+(x)u_0(Y) + \dots = -A'_+(x)u_+, \quad Y \rightarrow +\infty$$

Для слабо возмущенного внешнего потенциального течения справедливы соотношения

$$u = u_+ + u', \quad v = v', \quad p = p'$$

$$u_+ \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x}; \quad u_+ \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

из которых легко получить известные соотношения Коши-Римана

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} + u_+ \frac{\partial v'}{\partial y} = 0; \quad u_+ \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y}$$

и как следствие аналитическую функцию в области комплексного переменного $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{1}{u_+} p' + i v'$$

Из условий сращивания с решением в пограничном слое для этой функции задана мнимая часть на действительной оси

$$\operatorname{Im} f = -A'_+(x)u_+, \quad y = 0$$

Отсюда следует выражение для давления на верхней части пластины

$$p_+ = -\frac{u_+^{2+\infty}}{\pi} \int_{-\infty}^{2+\infty} \frac{A'_+(t)dt}{t-x} \quad (1.3)$$

Аналогично течение под пластиной описывается уравнениями Прандтля с индексом “-” в (1.2) и (1.3). На нижней части пластины также выполняется приведенное выше условие прилипания, при этом условия сращивания с пограничным слоем перед областью взаимодействия и с решением в основной части пограничного слоя принимают вид

$$u = -\lambda_- y, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

$$u = \lambda_-(-y + A_-(x)) + \dots, \quad y \rightarrow -\infty \quad (1.5)$$

Вязкие слои (1.2)–(1.5) стекают с задней кромки крыла и смешиваются, образуя область взаимодействия, похожую на область взаимодействия в окрестности задней кромки плоской пластины при симметричном стекании пограничных слоев [3, 4, 12]. Дополнительным условием для несимметричного течения является равенство давлений в следе при расчете потенциальных течений сверху и снизу.

2. Решение далеко вниз по потоку у сформулированной задачи для вязкого подслоя в следе может быть представлено в том же виде, что и решение для ближнего следа Гольдштейна [13]

$$\psi = x^{2/3} g(\eta) + \dots, \quad \eta = \frac{y}{x^{1/3}}, \quad x \rightarrow +\infty$$

модифицированное с учетом асимметрии потоков сверху и снизу пластины.

Для функции $g(\eta)$ справедливо уравнение

$$g''' + \frac{2}{3} g g'' - \frac{1}{3} g'^2 = 0 \quad (2.1)$$

Краевые условия следуют из сращивания с решением для профилей скорости в пограничном слое на задней кромке

$$\eta \rightarrow -\infty, \quad g = -\frac{\lambda_-}{2}(-\eta + a_-)^2 + o(1) \quad (2.2)$$

$$\eta \rightarrow +\infty, \quad g = \frac{\lambda_+}{2}(\eta + a_+)^2 + o(1)$$

Третье краевое условие для уравнения (2.1) находится исходя из равенства индуцируемого давления сверху и снизу пластины [12]. Для нахождения этого условия в области внешнего потенциального течения сверху и снизу пластины решение для скоростей и давления представим как

$$u = 1 + \operatorname{Re}^{-1/2} u_{1,2}(x, y) + \dots,$$

$$v = \operatorname{Re}^{-1/2} v_{1,2}(x, y) + \dots,$$

$$p = \operatorname{Re}^{-1/2} p_{1,2}(x, y) + \dots$$

Здесь $u_+^{-1}(p_1 + iv_1)$ и $u_-^{-1}(p_2 + iv_2)$ – аналитические функции $z = x + iy$. В окрестности задней кромки ($|z| \rightarrow 0$) эти разложения сращиваются соответственно с решениями для основной части пограничного слоя. В итоге для распределения давления на внешней границе пограничного слоя при $|x| \rightarrow 0$ получаем

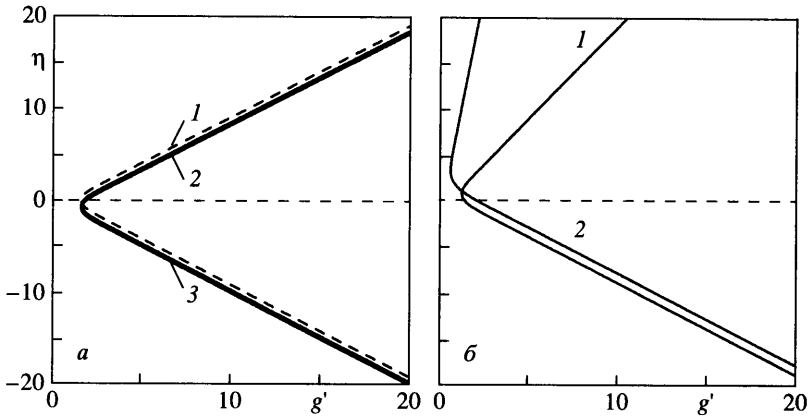
$$p_1(x, 0+) = -\frac{2a_+ u_+^2}{3\sqrt{3}}(-x)^{-2/3} + \dots, \quad p_2(x, 0-) = -\frac{2a_- u_-^2}{3\sqrt{3}}(-x)^{-2/3} + \dots, \quad x \rightarrow 0-$$

$$p_1(x, 0+) = \frac{a_+ u_+^2}{3\sqrt{3}}x^{-2/3} + \dots, \quad p_2(x, 0-) = \frac{a_- u_-^2}{3\sqrt{3}}x^{-2/3} + \dots, \quad x \rightarrow 0+$$

Отсюда следует третье необходимое краевое условие для уравнения (2.1)

$$a_+ u_+^2 = a_- u_-^2 \quad (2.3)$$

выполнение которого обеспечивает неизменность давления поперек слоя смешения.



Фиг. 2. Решение (2.1)–(2.3) для профиля скорости в ближнем следе: $a - \Lambda = \lambda_+/\lambda_- = 1$; $1 -$ симметричный случай $u_+ = u_-$; $2, 3 - U = u_+/u_- = 0.5; 0.1$; $b - U = 1; 1, 2 - \Lambda = 0.5; 0.1$

Результаты численного расчета (2.1)–(2.3) показаны на фиг. 2 в виде профилей скорости в ближнем следе при $\Lambda = \lambda_+/\lambda_- = 1$, а также при равных скоростях потока вверх и вниз пластины $U = u_+/u_- = 1$ и разных коэффициентах поверхностного трения набегающего потока.

3. Для численного решения задачи (1.2)–(1.5) введем неравномерную сетку

$$(x_i, y_m), \quad i = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M$$

и обозначим значения функции толщины вытеснения $A(x)$ в точках x_i как A_i . Численный метод [14], предназначенный для решения задач со взаимодействием, содержит такие ключевые моменты, как выбор искомого функции, для которых формулируется система нелинейных неявных дифференциальных и интегральных уравнений, алгоритмы расчета интеграла взаимодействия и пограничного слоя, а также способ вычисления матрицы Якоби, применяемый для улучшения сходимости метода Ньютона – Рафсона.

В качестве искомого переменных в данной задаче удобно использовать толщины вытеснения выше и ниже пластины, а именно $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$. Для нахождения всех переменных необходимо сформулировать соответствующие разностные уравнения. Уравнение (1.3) при заданном векторе A позволяет вычислить “невязкое давление” p_i и затем градиент давления как над пластиной, так и над следом $[dp/dx]_{inv}(x_i), i = 3, \dots, N$. С другой стороны, для того же вектора A на основании расчета уравнений пограничного слоя (1.2) вычисляется “вязкий градиент давления” $[dp/dx]_v(x_i), i = 3, \dots, N_0$ над пластиной. При расчете течения в следе также вычисляется “вязкий градиент давления” $[dp/dx]_v(x_i), i = N_0 + 1, \dots, N$, который однако определяется уже толщинами вытеснения как сверху A_i , так и снизу B_i . Исходя из данных рассуждений и принимая во внимание, что соответствующие вязкие и невязкие градиенты должны совпадать при точном решении задачи, а также требуя равенства давлений в следе, получим систему неявных разностных уравнений над и под пластиной и в слое смешения

$$F_j(A_i) = \left[\frac{dp}{dx} \right]_{inv}(x_i) - \left[\frac{dp}{dx} \right]_v(x_i) = 0, \quad j = 3, \dots, N_0$$

$$F_j(B_i) = \left[\frac{dp}{dx} \right]_{inv}(x_i) - \left[\frac{dp}{dx} \right]_v(x_i) = 0, \quad j = 3, \dots, N_0$$

$$F_j = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{dp}{dx} \right]_{inv} (A_j) + \left[\frac{dp}{dx} \right]_{inv} (B_j) \right) - \left[\frac{dp}{dx} \right]_v (x_j) = 0, \quad j = N_0 + 1, \dots, N$$

$$F_j = p_{inv}(A_j) - p_{inv}(B_j) = 0, \quad j = N_0, \dots, N$$

Для решения этой неявной системы уравнений использован метод Ньютона – Рафсона с аппроксимирующей функцией $A_j + \delta A_j$. Поправки δA_j вычисляются при решении матричного уравнения

$$F_j(A_j) + \frac{\partial F_j}{\partial A_j} \delta A_j = 0 \tag{3.1}$$

Представим интеграл взаимодействия (1.3) в виде

$$p(x) = -\frac{u_+^{2+\infty}}{\pi} \int_{-\infty}^{2+\infty} \frac{A'(t) dt}{t-x} \tag{3.2}$$

и запишем его при каждом $x = x_i$ как

$$\int_{x_i}^{x_N} \frac{A'(t) dt}{t-x_i} = \sum_{k=1}^{i-2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{A'(t) dt}{t-x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{A'(t) dt}{t-x_i} + \sum_{k=i+1}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{A'(t) dt}{t-x_i} \tag{3.3}$$

Используя разложение Тейлора функции $A(t)$ слева и справа от особой точки в виде

$$A'(t) = A'_{k+1} + A''_{k+1}(t-x_{k+1}) + \dots$$

$$A'(t) = A'_k + A''_k(t-x_k) + \dots$$

можно каждый из интегралов в правой части этого уравнения вычислить аналитически и привести правую часть (3.3) к виду

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_N} \frac{A'(t) dt}{t-x_i} &= A''_i(x_{i+1}-x_{i-1}) + A'_i \ln \frac{x_{i+1}-x_i}{x_i-x_{i-1}} + \sum_{k=1}^{i-2} \left\{ A''_{k+1}(x_{k+1}-x_k) + \right. \\ &+ \left. [A'_{k+1} + (x_i-x_{k+1})A''_{k+1}] \ln \frac{x_i-x_{k+1}}{x_i-x_k} \right\} + \sum_{k=i+1}^{N-1} \left\{ A''_k(x_{k+1}-x_k) + \right. \\ &+ \left. [A'_k + (x_i-x_k)A''_k] \ln \frac{x_{k+1}-x_i}{x_k-x_i} \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, получено выражение для невязкого давления. Градиент может быть вычислен численным дифференцированием с учетом того факта, что он, вообще говоря, разрывен в самой кромке. Это выражение можно записать в векторной форме

$$\mathbf{P} = \Omega \mathbf{A} + \mathbf{Q} \tag{3.4}$$

Здесь вектор \mathbf{P} составлен из значений градиента давления в точках x_i , вектор \mathbf{A} – из элементов сеточной функции A_i . Элементы

$$\Omega_{ik} = \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\left[\frac{dp}{dx} \right]_{inv} (x_i) \right)$$

матрицы Ω можно определить, задавая возмущения ΔA_k функции A_i и вычисляя соответствующие возмущения градиента давления. В силу линейной связи (3.4) возмущения ΔA_k могут быть выбраны произвольно и в расчетах полагались равными $\Delta A_k = 1$.

Расчет уравнений пограничного слоя (1.2) на пластине проводится маршевым методом от x_3 до x_i , на кромке $x_i = 0$ при $i = N_0$. Начиная с $i = 3$ в каждом поперечном сечении x_i решается система уравнений

$$F_m = 0, \quad m = 2, \dots, M$$

Для этого уравнение импульсов (1.2) для $m = 3, \dots, M - 1$ записывается в виде

$$F_m = -u_{i,m} \frac{c_1 u_{i-2,m} + c_2 u_{i-1,m} + c_3 u_{i,m}}{x_i - x_{i-2}} - v_{i,m} \frac{d_1 u_{i,m-1} + d_2 u_{i,m} + d_3 u_{i,m+1}}{y_{m+1} - y_{m-1}} - \left[\frac{dp}{dx} \right]_i + \frac{b_1 u_{i,m-2} + b_2 u_{i,m-1} + b_3 u_{i,m} + b_4 u_{i,m+1}}{(y_{m+1} - y_{m-2})(y_{m+1} - y_m)} = 0$$

$$c_1 = \frac{x_{i-1} - x_i}{x_{i-2} - x_{i-1}}, \quad c_2 = -\frac{(x_i - x_{i-2})^2}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-2} - x_{i-1})}, \quad c_3 = -c_1 - c_2$$

$$d_1 = -\frac{1}{d_3}, \quad d_2 = -d_1 - d_3, \quad d_3 = \frac{y_m - y_{m-1}}{y_{m+1} - y_m} \quad (3.5)$$

$$b_1 = -b_2 \frac{y_{m-1} - y_m}{y_{m-2} - y_m} - b_4 \frac{y_{m+1} - y_m}{y_{m-2} - y_m}$$

$$b_2 = -b_4 \frac{(y_{m+1} - y_m)(y_{m+1} - y_{m-2})(y_{m+1} - 2y_m + y_{m-2})}{(y_{m-1} - y_m)(y_{m-1} - y_{m-2})(y_{m-1} - 2y_m + y_{m-2})}$$

$$b_3 = -b_1 - b_2 - b_4, \quad b_4 = 2 \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m-2}}{y_{m-1} - y_{m+1}}$$

На пластине (при $m = 2$)

$$F_2 = -u_{i,2} \frac{c_1 u_{i-2,2} + c_2 u_{i-1,2} + c_3 u_{i,2}}{x_i - x_{i-2}} - v_{i,2} \frac{u_{i,3}}{y_3} - \left[\frac{dp}{dx} \right]_i + \frac{u_{i,3} - 2u_{i,2}}{y_2^2} \quad (3.6)$$

Для полноты системы уравнений используем граничное условие на внешней границе вязкого подслоя

$$-F_M = v_{i,M} + \lambda(y_M + A_i) \frac{c_1 A_{i-2} + c_2 A_{i-1} + c_3 A_i}{x_i - x_{i-2}} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{dp}{dx} \right]_i \quad (3.7)$$

Здесь в (3.5), (3.6) вертикальная составляющая вектора скорости рассчитывается с использованием уравнения неразрывности в (1.2), которое в конечных разностях записывается как

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 u_{i-2,m} + c_2 u_{i-1,m} + c_3 u_{i,m}}{x_i - x_{i-2}} + \frac{c_1 u_{i-2,m-1} + c_2 u_{i-1,m-1} + c_3 u_{i,m-1}}{x_i - x_{i-2}} \right) + \frac{v_{i,m} - v_{i,m-1}}{y_m - y_{m-1}} = 0$$

Из этого уравнения $v_{i,m}$ находится последовательно для $m = 2, \dots, M$, начиная с значения на пластине, где $v_{i,1} = 0$.

При расчете пограничного слоя в слое смешения при $x > 0$ полагаем заданными функции толщины вытеснения сверху и снизу пластины A_i и B_i соответственно. Согласно (1.2), (1.5), на нижней и верхней границах области смешения

$$u_{i,1} = \lambda_- (-y_1 + B_i),$$

$$u_{i,M} = \lambda_+ (y_M + A_i), \quad i = N_0 + 1, \dots, N$$

Вертикальная скорость при этом вычисляется последовательно для $m = 2, \dots, M$, начиная со значения на нижней границе области смешения

$$v_{i,1} = -\lambda_- \frac{dB_i}{dx} y_1 + \frac{1}{\lambda_-} \left[\frac{dp}{dx} \right]_i + \lambda_- B_i \frac{dB_i}{dx}$$

Чтобы обеспечить высокую сходимость, необходимо как можно точнее определить матрицу направлений в (3.1). Отметим, что способы численного нахождения этой матрицы могут быть разными. Наиболее очевидным представляется тот, при котором известной величине A_i последовательно при каждом i придается малое возмущение δ и вычисляется отклик градиента давления на это возмущение в уравнениях пограничного слоя. Но неизбежно возникает вопрос, какова именно должна быть величина этого возмущения, чтобы не выйти за границы машинной точности или, напротив, не слишком "раскачать" решение. Чтобы избежать этих сомнений, применим полученное решение для пограничного слоя таким образом, чтобы добавки были заведомо бесконечно малыми. Иными словами, линеаризуем исходные уравнения пограничного слоя относительно решения на текущей итерации и используем решение линейной задачи для вычисления матрицы направлений.

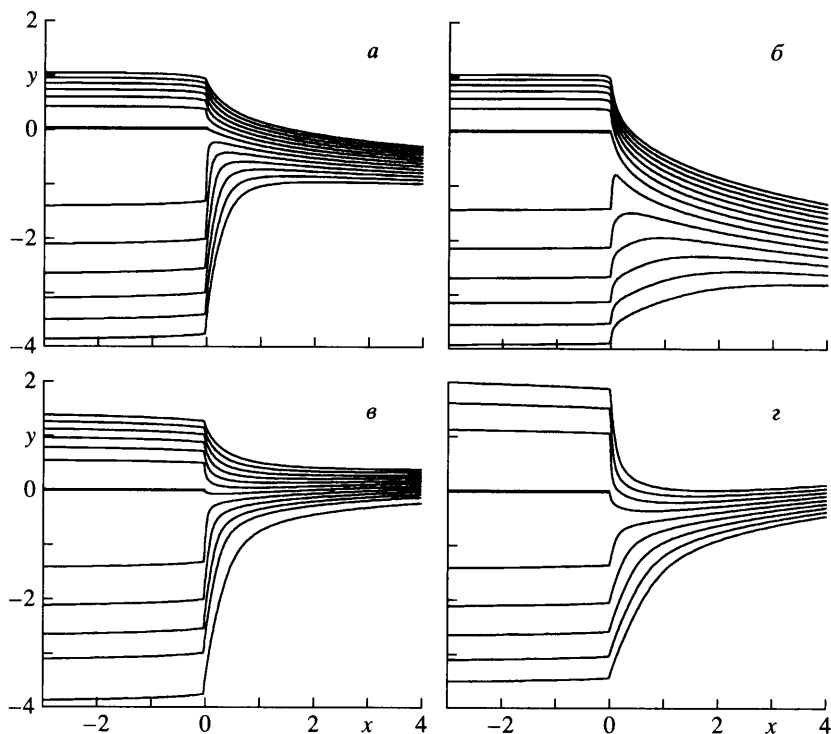
Пусть из решения уравнений Прандтля известны гидродинамические функции U_0, V_0, p_0 и A_0 . Полагая, что

$$u = U_0 + u', \quad v = V_0 + v', \quad p = p_0 + p', \quad A = A_0 + A'$$

и величины u', v', p' и A' малы, подставим эти выражения в уравнения Прандтля, в итоге получим линейную краевую задачу

$$U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{dp'}{dx} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$



Фиг. 3. Результаты расчета течения около пластины и в слое смешения: а, б – $U = 0.5$; 0.1, $\Lambda = 1$; в, г – $\Lambda = 0.5$; 0.1, $U = 1$

Условие прилипания записывается в виде

$$u' = v' = 0, \quad y = 0$$

из условий срачивания на внешней границе вязкого подслоя

$$u' = A' + \dots, \quad y \rightarrow +\infty$$

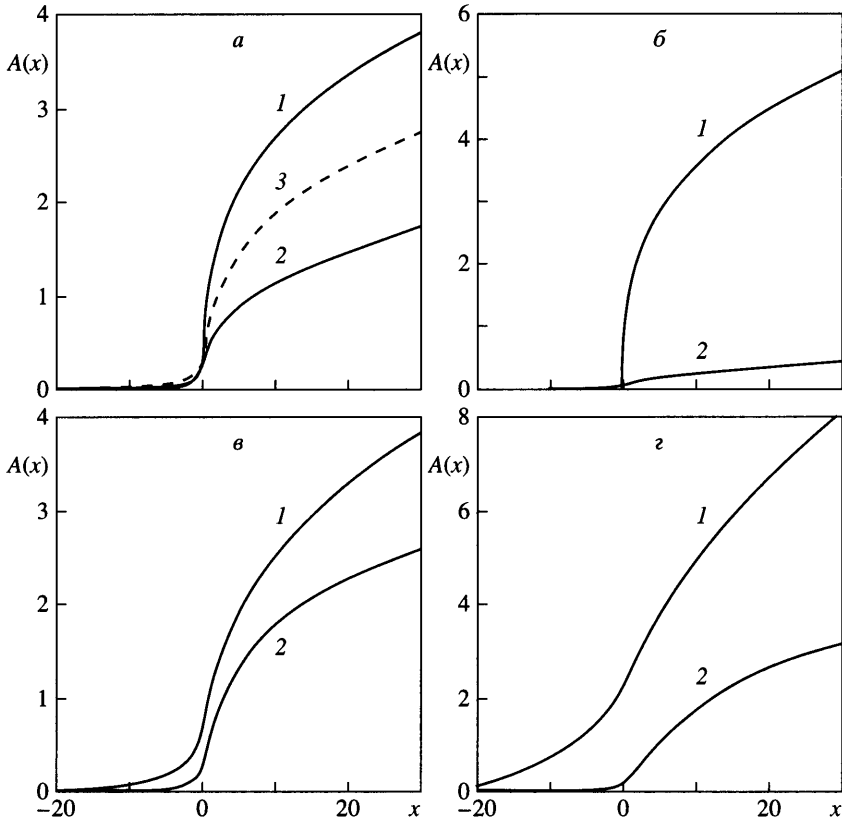
а начальные условия имеют вид

$$u' = 0, \quad x \rightarrow -\infty$$

Заметим также, что (3.7) принимает вид

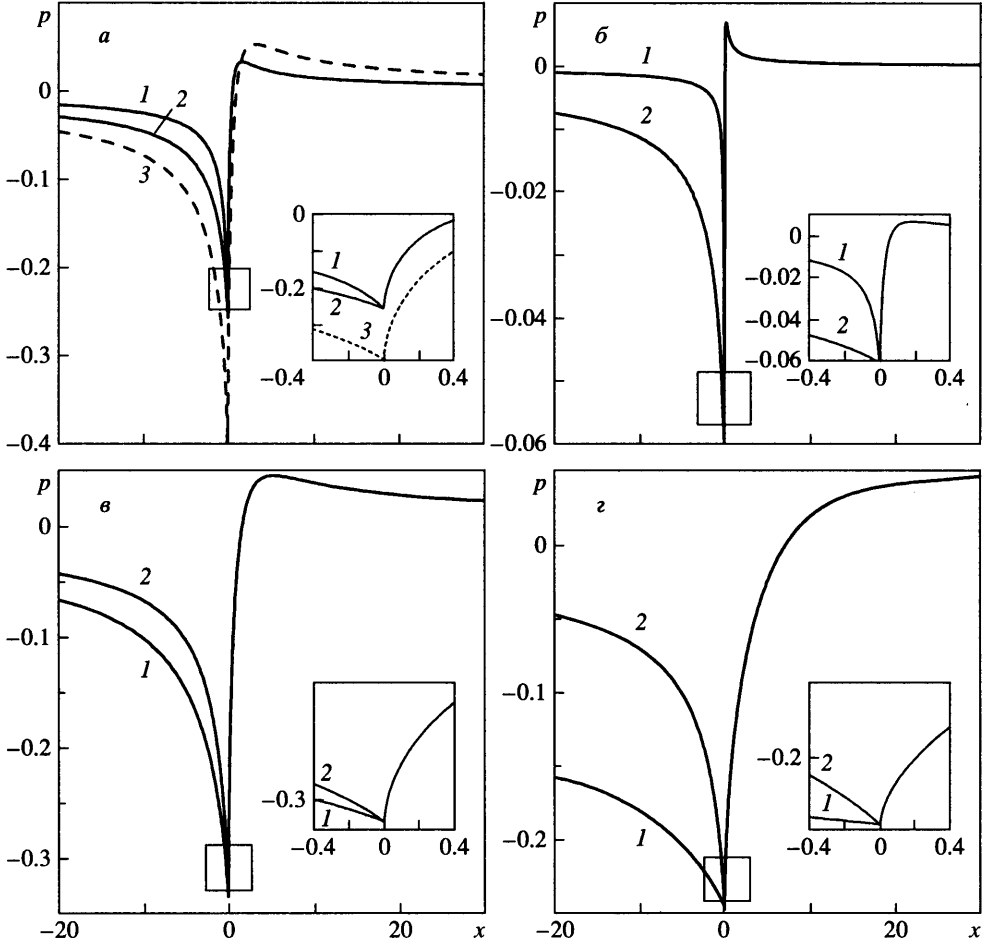
$$-F_M = v_{i,M} + \lambda_{+} y_M \frac{dA_i'}{dx} + \lambda_{+} \left(A_{0i}' \frac{dA_i'}{dx} + A_i' \frac{dA_{0i}'}{dx} \right) + \dots$$

Уравнения (3.8) записываются в конечных разностях и решаются подобно нелинейным уравнениям, по тому же алгоритму. При $A_i' = 0$ решение задачи (3.8) тривиально. Однако, задавая $A_i' = 1$ для текущего i , а значения в остальных точках полагая равными нулю, можно найти нетривиальное решение линейной системы (3.8) и заполнить строку матрицы направлений. При последовательном переборе всех i матрица направлений вычисляется полностью.



Фиг. 4. Поведение толщины вытеснения $A(x)$ и $B(x)$ сверху и снизу пластины и в слое смешения: $a, б - \Lambda = 1, U = 0.5, 0.1$; 1 – сверху пластины, 2 – снизу пластины, 3 – симметричный случай $U = 1$; $в, г - U = 1, \Lambda = 0.5, 0.1$

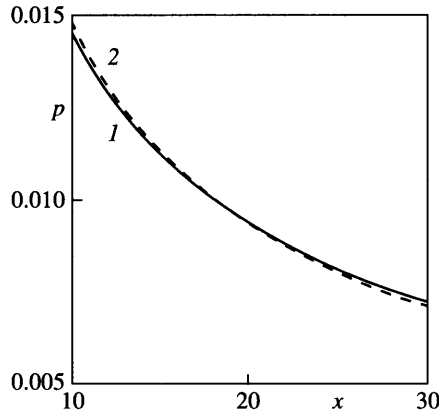
4. Основные расчеты были проведены с использованием неравномерной сетки 251×151 и повторены на удвоенной сетке для проверки точности результатов. Узлы сетки сгущаются вблизи кромки, где минимальные размеры шага составляют $\Delta x = 0.01$ и $\Delta y = 0.02$. Для расчетов были выбраны три характерных режима, включающих симметричное стекание пограничных слоев, случая различных скоростей сверху и снизу пластины при одинаковых величинах поверхностного напряжения трения, а также разного поверхностного трения сверху и снизу при равных скоростях внешнего потенциального потока. Расчет симметричного случая, когда $u_+ = u_- = 1, \lambda_+ = \lambda_- = 1$, удовлетворительно совпадает с результатами, приведенными в [7]. Решение в несимметричном случае существенно отличается. Это иллюстрирует фиг. 3, где приведена картина линий тока $\psi = \text{const}$, построенных с шагом $\Delta\psi = 0.1$. Отметим тот факт, что при разных скоростях потока сверху и снизу от профиля слой смешения смещается в сторону большей скорости. На фиг. 4 показано распределение толщины вытеснения для выбранных режимов, на фиг. 5 – соответствующее распределение давления. Давление далеко вниз по потоку от кромки для параметров $\Lambda = 1, U = 0.5$ и асимптотическое решение $cx^{-2/3}/(3\sqrt{3})$ приведены на фиг. 6 кривыми 1 и 2 соответственно и удовлетворительно совпадают. На-



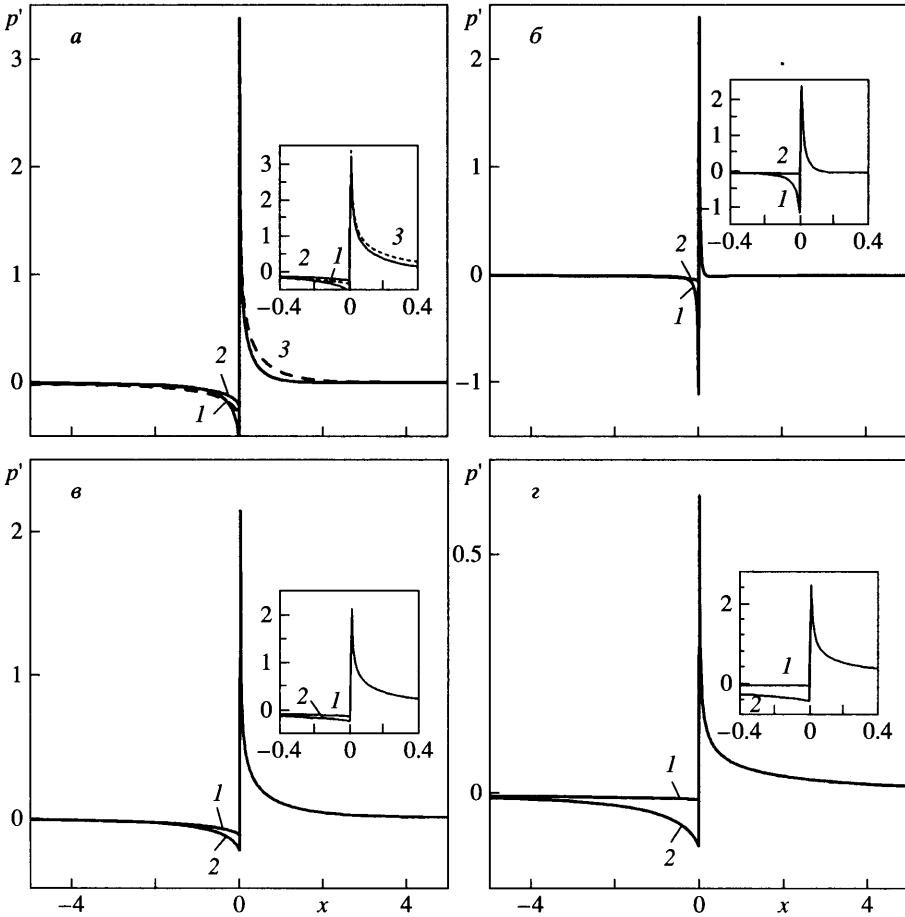
Фиг. 5. Распределение давления: *a*, *б* – $\Lambda = 1$, $U = 0.5, 0.1$; *в*, *г* – $U = 1$, $\Lambda = 0.5; 0.1$; обозначения как на фиг. 4; на вставках – поведение давления вблизи кромки пластины

конец, на фиг. 7 и 8 представлены градиент давления $p' = dp/dx$ и поверхностное трение $\tau = du/dy$, $y = 0$ на пластине. Интересны свойства решения при малой скорости потока над пластиной, когда верхний пограничный слой подобен вязкой струе. Индуцированное давление в этом случае оказывается малым, так как давление пропорционально произведению квадрата внешней скорости на интеграл взаимодействия. Течение под пластиной, в результате, слабо возмущено на протяжении всей длины области взаимодействия. А над пластиной формируется короткая зона резких возмущений вблизи кромки. Можно ожидать появление новых асимптотически малых, но существенных областей изменения решения при стремлении верхней скорости к нулю. Прежде всего, возможно влияние кривизны линий тока на индуцированное давление и как следствие появление положительного градиента давления на верхней части пластины, тормозящего поток.

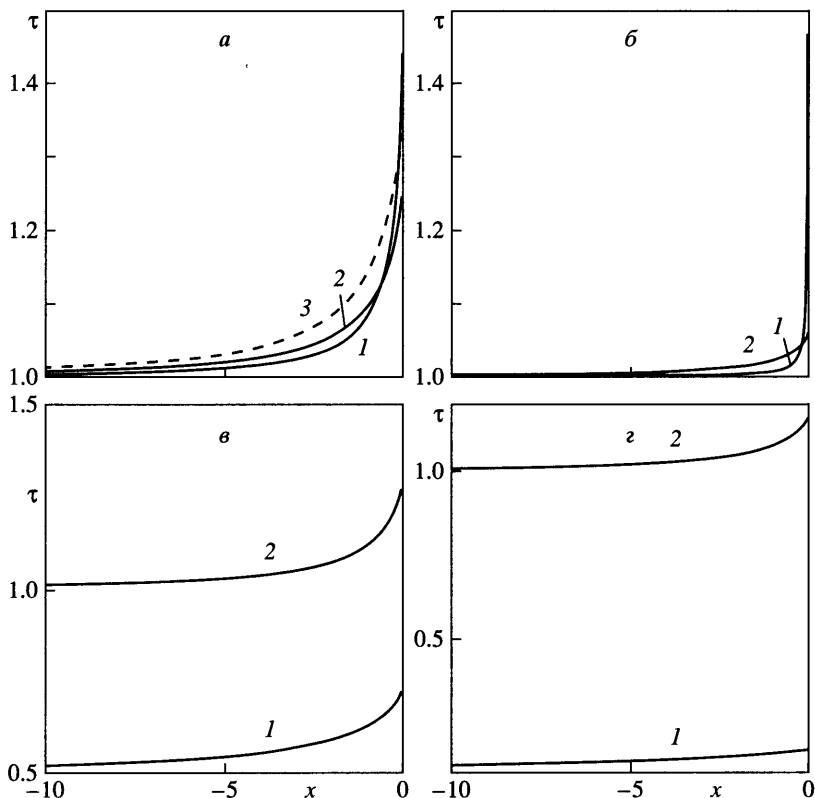
Заключение. С помощью эффективного численного метода впервые решена классическая краевая задача, описывающая смещение пограничных слоев в окрестности зад-



Фиг. 6. Сравнение давления p вниз по потоку для случая $\Lambda = 1, U = 0.5$: 1 – давление в слое смещения, 2 – асимптотическая кривая $cx^{-2/3}/(3\sqrt{3})$, $c = a_+ u_+^2 = a_- u_-^2$ определена по (2.3)



Фиг. 7. Градиент давления p' , на вставках – поведение вблизи $x = 0$: а – $\Lambda = 1, U = 0.5$; 1, 2 – сверху и снизу пластины, 3 – симметричный случай $U = 1$; б – $\Lambda = 1, U = 0.1$; в, г – $U = 1, \Lambda = 0.5; 0.1$



Фиг. 8. Поверхностное трение τ на пластине ($x < 0$): а – $\Lambda = 1$, $U = 0.5$; 1, 2 – сверху и снизу пластины, 3 – симметричный случай $U = 1$; б – $\Lambda = 1$, $U = 0.1$; в, г – $U = 1$, $\Lambda = 0.5$; 0.1

ней кромки крыла. Обнаружены новые свойства решения при малой скорости потока над пластиной, требующие дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00765).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
2. Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
3. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate // Mathematika. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106–121.
4. Messiter A.F. Boundary layer flow near the trailing edge on a flat plate // SIAM Journal. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
5. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Лунатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 455 с.
6. Sychev Vic.V., Sychev V.V., Ruban A.I., Korolev G.L. Asymptotic Theory of Separated Flows. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1998, 334 p.; Сычев Вик.В., Рубан А.И., Сычев В.В. и др. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987, 255 с.
7. Jobe C.E., Burggraf O.R. The numerical solution of the asymptotic equations of trailing edge flow // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1974. V. 340. № 1620. P. 91–111.

8. Рубан А.И. К асимптотической теории течения вблизи задней кромки тонкого профиля // Учен. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 1. С. 6–11.
9. Brown S.N., Stewartson K. Trailing-edge stall // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. P. 3. P. 561–584.
10. Chow R., Melnik R.E. Numerical solutions of the triple-deck equations for laminar trailing-edge stall // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1976. V. 59. P. 135–144.
11. Королев Г.Л. К теории отрывного обтекания задней кромки тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 55–59.
12. Daniels P.G. Viscous mixing at a trailing edge // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1977. V. 30. Pt. 3. P. 319–342.
13. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics // Proc. Camb. Phil. Soc. 1930. V. 36. Pt. 1. P. 1–30.
14. Kravtsova M.A., Zametaev V.B., Ruban A.I. An effective numerical method for solving viscous-inviscid interaction problems // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 2005. V. 363. № 1830. P. 1157–1167.

Москва

Поступила в редакцию
20.XII.2005