

УДК 532.135:537.84

© 2006 г. А. В. ЖУКОВ

## КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ МИКРОСТРУКТУРА И РЕОЛОГИЯ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЙ

Для суспензии с ферромагнитными дипольно взаимодействующими частицами дисперсной фазы при больших концентрациях в случае, когда броуновским движением можно пренебречь, построена модель вязкоупругой намагничивающейся сплошной среды. Уравнения состояния и кинетические коэффициенты определяются на основе модели периодической решетки и приближения смазки. В задаче о медленной деформации среды в постоянном магнитном поле при некоторых значениях определяющих параметров обнаружено увеличение эффективной вязкости при уменьшении напряженности поля, связанное с сильным дипольным взаимодействием частиц.

*Ключевые слова:* вязкость суспензий, магнитные жидкости, магнитовязкий эффект, периодическая решетка.

В настоящей работе изучаются суспензии с частицами из жесткого ферромагнетика, которые рассматриваются как диполи с постоянным и “вмороженным” в частицы магнитным моментом. Примером таких сред являются магнитные жидкости – суспензии с малой или умеренной (1–10%) объемной концентрацией. Суспензии при больших концентрациях, близких к плотной упаковке, изучены недостаточно. Изучение высококонцентрированных суспензий представляет интерес в связи с созданием новых перспективных сред, а также при исследовании агрегатов в магнитных жидкостях. В отличие от обычных магнитных жидкостей для суспензий с большой концентрацией влияние броуновского движения может быть мало по сравнению с силами дипольного взаимодействия частиц, что приводит к новым физическим и механическим эффектам [1–3].

В данной работе рассматривается идеализированный случай сильного межчастичного взаимодействия, когда броуновским движением можно пренебречь. Предполагается, что при этом для приближенного описания системы при больших концентрациях частиц, по крайней мере в состояниях равновесия и близких к ним и при малых скоростях сдвига, можно использовать модель периодической решетки. Условие периодичности позволяет вычислить свободную энергию системы, если задан потенциал взаимодействия частиц. Рассматриваются суспензии ферромагнитных частиц на основе электролита, стабилизируемые силами электростатического отталкивания типа двойного слоя. Для описания электростатического взаимодействия частиц используется модельный потенциал теории Дерягина – Ландау. Кинетические коэффициенты вычисляются на основе приближения смазки для решения задачи о сдвиговом течении суспензии в постановке Стокса при больших концентрациях.

Ранее состояния равновесия для периодических решеток частиц с дипольным взаимодействием для случая параллельных диполей и различных дополнительных отталкивающих потенциалах изучались в [4]. Основные экспериментальные данные, где наблюдалось образование периодических конфигураций, относятся к электрореологическим суспензиям, которые в ряде случаев можно описывать приближенно с помощью взаимодействия диполей, индуцированных внешним электрическим полем и параллельных ему [5]. Для исследования сдвиговых течений и реологии суспензий с немагнитными частицами в растворе электролита модель периодической решетки использовалась в [6],

однако дипольное взаимодействие и вопросы устойчивости не рассматривались. Результаты [4, 5] позволяют предполагать, что периодические состояния равновесия суспензий с дипольным взаимодействием частиц устойчивы при достаточно больших магнитных полях, когда магнитные моменты частиц можно считать параллельными. Кроме того, результаты, полученные ранее автором [7, 8], позволяют исследовать устойчивость суспензии относительно произвольных возмущений дипольных моментов, сохраняющих периодичность расположения частиц в пространстве, а также найти диапазон концентраций частиц, при которых периодическая система устойчива относительно образования агрегатов.

Построенная модель служит дополнением к известным моделям с релаксацией намагниченности [1, 2], где учитывается броуновское движение, но не описываются суспензии при больших концентрациях и сильном дипольном взаимодействии частиц.

**1. Феноменологическая модель суспензии.** Рассматриваются суспензии ферромагнитных частиц диаметра  $d$  с дипольным моментом  $m$  в идеальной несжимаемой жидкости, для которых

$$\gamma \equiv \frac{m^2}{d^3 k_B T} \gg 1, \quad \zeta \equiv \frac{mH}{k_B T} \gg 1, \quad \phi \geq 0.3 \quad (1.1)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $H$  – напряженность магнитного поля,  $\phi$  – объемная концентрация частиц. Условие  $\zeta \gg 1$  означает, что влияние броуновского движения на ориентацию частиц мало по сравнению с влиянием магнитного поля. Параметр  $\gamma$  оценивает энергию дипольного взаимодействия близких частиц. Существенно, что концентрация частиц достаточно велика и расстояния между соседними частицами порядка  $d$ ; нижняя граница для  $\phi$  определяется точнее при анализе устойчивости (разд. 2).

При малых концентрациях частиц и  $\gamma \geq 1$  более разумными приближениями являются модели цепочек или изолированных агрегатов магнитных частиц [1], на взаимодействие которых может существенно влиять броуновское движение даже при  $\gamma \gg 1$ , так как расстояния между соседними цепочками и агрегатами, вообще говоря, много больше  $d$ . В случае, когда расслоения на цепочки и агрегаты для среды в целом нет, условия (1.1) ведут к следующим естественным требованиям для модели сплошной среды, описывающей суспензию при  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Во-первых, модель должна описывать состояния механического равновесия, простейшая структура которых – периодические решетки. Далее, потребуем, чтобы модель описывала, в частности, однородные деформации этих решеток, т.е. движения специального вида. Предполагается также, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  является независимым определяющим параметром, что позволяет описывать ориентацию частиц под действием магнитного поля и жидкости-носителя.

Согласно (1.1) влияние броуновского движения мало, поэтому предполагаем, что осредненный вектор намагниченности имеет постоянный модуль  $M = |\mathbf{M}| = \phi M_s$ , где  $M_s$  – намагниченность насыщения для частиц. Это означает, что в физически бесконечно малом объеме магнитные моменты частиц почти параллельны. Область применимости этого предположения уточняется в разд. 2.

Простейшую модель суспензии, удовлетворяющую указанным требованиям, можно построить на основе общих принципов моделей намагничивающихся сплошных сред [9]. Закон движения  $x^i = x^i(\xi^a, t)$ , где  $x^i$  – декартовы координаты системы наблюдателя,  $\xi^a$  – лагранжевы координаты,  $t$  – время, по предположению определяет движение частиц и движение жидкости в среднем, так что  $\phi = \text{const}$ . Выражение для объемной плотности внутренней энергии  $U$  имеет вид

$$U = U(x_a^i, \mathbf{M}, \mathbf{B}, s), \quad dU = T_i^k \xi_k^a dx_a^i - h_i dM^i + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} d\mathbf{B} + T ds$$

$$x_a^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}, \quad \xi_k^a \equiv \frac{\partial \xi^a}{\partial x^k}, \quad T_i^k \equiv x_a^k \frac{\partial U}{\partial x_a^i}, \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}_1 - \frac{(\mathbf{h}_1 \mathbf{M}) \mathbf{M}}{M^2}, \quad \mathbf{h}_1 \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} \quad (1.2)$$

Здесь  $s$  – объемная плотность энтропии,  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция,  $(\mathbf{hM}) = 0$  и при  $|\mathbf{M}| = \text{const}$  выполняется тождество  $\mathbf{h} d\mathbf{M} = \mathbf{h}_1 d\mathbf{M}$ . Условие  $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$  дает

$$U - Ts - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \mathbf{B} \equiv F^i(x_a^i, \mathbf{M}, \mathbf{H}, T) = -\frac{1}{8\pi} H^2 - \mathbf{M} \mathbf{H} + \Phi(x_a^i, \mathbf{M}, T) \quad (1.3)$$

Зависимость  $\Phi$  от дисторсии  $x_a^i$ , вообще говоря, анизотропна, т.е. в состоянии равновесия данная модель является частным случаем модели магнитоупругой ферромагнитной среды [10, 11]. Для динамической модели выполняются уравнения магнитостатики

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (1.4)$$

уравнение неразрывности и уравнение импульсов

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0, \quad \rho (\partial_t v^i + v^k \partial_k v^i) = \partial_j p^{ij} \quad (1.5)$$

условие несжимаемости  $\rho = \text{const}$  и уравнение энергии

$$\partial_t (K + U) + \partial_k [(K + U) v^k - p^{ik} v_i + S_0^k + q^k] = 0$$

$$\mathbf{S}_0 \equiv \frac{4\pi}{c} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (1.6)$$

где  $p^{ik}$  – тензор напряжений,  $K \equiv \rho v^2/2$ ,  $\mathbf{q}$  – вектор потока тепла,  $\mathbf{S}_0$  – вектор потока энергии электромагнитного поля в сопутствующей системе отсчета,  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $c$  – скорость света в вакууме.

Для замыкания системы уравнений (1.3)–(1.6) необходимо определить выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла, согласующиеся со вторым началом термодинамики  $\sigma \equiv \partial_t s + \partial_i (s v^i + q^i/T) \geq 0$ . Для вычисления  $\sigma$  представим тензор напряжений как

$$p^{ij} = -p_1 \delta^{ij} + \sigma^{ij} + \tau^{ij}, \quad \sigma^{ij} = T^{(ij)} + F^i \delta^{ij} + \frac{1}{8\pi} (H^i B^j + H^j B^i) \quad (1.7)$$

где  $\sigma^{ij}$  – тензор напряжений для магнитоупругой среды в состоянии равновесия [10], а выражение для  $\tau_{ij}$  будет определено ниже (предполагается, что в состоянии равновесия  $\tau_{ij} = 0$ ,  $q^i = 0$ ). Из (1.2)–(1.7) получим

$$\partial_t s + \partial_i \left( s v^i + \frac{q^i}{T} \right) \equiv \sigma = \frac{D}{T} + q^i \partial_i \left( \frac{1}{T} \right) \quad (1.8)$$

$$D \equiv \tau^{ij} e_{ij} + h^i N_i, \quad N_i \equiv \frac{dM^i}{dt} - \Omega_{ik} M^k, \quad e_{ij} \equiv \partial_{(i} v_{j)}, \quad \Omega_{ij} \equiv \partial_{[j} v_{i]}$$

Предполагая связь между термодинамическими силами и потоками линейной и используя соотношения Онзагера, постулируем зависимости вида

$$\tau_{ij} = \eta_{ijkl} e^{kl} + \mu'_{ijk} h^k, \quad N_i = \mu_{jki} e^{jk} + \chi_{ik} h^k, \quad q^i = k^{ij} \partial_j \left( \frac{1}{T} \right) \quad (1.9)$$

$$D = \eta_{ijkl} e^{ij} e^{kl} + \chi_{ik} h^i h^k + (\mu'_{ijk} + \mu_{ijk}) e^{ij} h^k \geq 0, \quad k^{ij} \partial_i T \partial_j T \geq 0 \quad (1.10)$$

Коэффициенты  $\eta_{ijkl}$ ,  $\mu_{ijk}$ ,  $\mu'_{ijk}$ ,  $\chi_{ij}$  (функции от  $x_a^i$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $T$ ) и  $k^{ij}(x_a^i, T)$  должны гарантировать выполнение (1.10) и удовлетворять условиям симметрии

$$\begin{aligned} \mu'_{ijk}(-\mathbf{M}, -\mathbf{H}) &= \mu_{ijk}(\mathbf{M}, \mathbf{H}), \quad \chi_{ik}(-\mathbf{M}, -\mathbf{H}) = \chi_{ki}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) \\ \eta_{ijkl}(-\mathbf{M}, -\mathbf{H}) &= \eta_{klij}(\mathbf{M}, \mathbf{H}), \quad k^{ij} = k^{ji} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk}, \quad \mu_{ikl} = \mu_{kil}, \quad \eta_{ijk} \delta^{kl} \equiv 0, \quad \chi_{ik} M^k \equiv 0, \quad \mu_{jki} M^i \equiv 0 \quad (1.12)$$

Здесь (1.11) – условия симметрии Онзагера, (1.12) связаны с ограничениями на термодинамические силы и потоки (например, с условием  $N_j M^j \equiv 0$ ).

**2. Теория дипольных решеток и состояния равновесия суспензии.** Для вычисления свободной энергии в случае, когда броуновским движением можно пренебречь, рассмотрим решения задачи о механическом равновесии системы большого числа частиц. Предположим, что частицы суспензии – однородно намагниченные твердые сферы диаметра  $d$  с одинаковыми по модулю магнитными моментами  $\mathbf{m}_a$ ,  $|\mathbf{m}_a| = m_0$  и потенциалом парного взаимодействия

$$\begin{aligned} U_{ab}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b) &= U_r(|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|) - D_{ik}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) m_a^i m_b^k \\ D_{ik}(0) &= 0, \quad D_{ik}(\mathbf{x}) \equiv \partial_i \partial_k (1/|\mathbf{x}|) (\mathbf{x} \neq 0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U_r(r) = \frac{1}{4} \varepsilon d \psi_0^2 \ln \left( 1 + \exp \left( -\frac{r-d}{r_d} \right) \right) \quad (2.2)$$

Здесь  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость жидкости,  $\psi_0$  – потенциал поверхности частиц,  $r_d$  – радиус Дебая. Выражение (2.2) является аппроксимацией для потенциала взаимодействия двух близких ( $r_d^{-1}(r-d) \leq 4$ ) слабо заряженных частиц ( $\psi_0 \leq 50$  мВ) в растворе электролита по теории Дерягина – Ландау [12]. Таким образом, потенциал (2.1) моделирует, в частности, взаимодействие частиц в магнитных жидкостях на воде при достаточно больших концентрациях. Отметим, что из теоремы о среднем для гармонических функций следует, что в случае однородно намагниченных сферических частиц энергия их магнитного взаимодействия с точностью до постоянной равняется энергии взаимодействия точечных диполей. Потенциал (2.1) зависит от двух безразмерных параметров  $k_0, f_0$

$$k_0 \equiv \frac{d}{r_d}, \quad f_0 \equiv \sqrt{\frac{12}{f_1}}, \quad f_1 \equiv k_0 \varepsilon d^4 \left( \frac{\psi_0}{2m_0} \right)^2 \quad (2.3)$$

Для исследования минимума потенциальной энергии системы с большим числом частиц, как и в [4], используем модель периодической решетки, определяемой векторами  $\mathbf{X}_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , предполагая, что радиус-векторы частиц равны  $\mathbf{x} = \mathbf{n} \equiv n^1 \mathbf{X}_1 + n^2 \mathbf{X}_2 + n^3 \mathbf{X}_3$ , где  $n^a$  – целые числа. Вычисление энергии системы с числом частиц  $N \rightarrow \infty$  и одинаковыми магнитными моментами дает [4, 7, 8]

$$F^*(\mathbf{X}_a^k, \mathbf{H}, \mathbf{M}) = -\mathbf{M}\mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi} - \frac{1}{2} \alpha_{ij}(\mathbf{X}_a^k) M^i M^j + E_r(\mathbf{X}_a^k) \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{M}$  – средняя объемная намагниченность,  $\mathbf{H}$  – среднее магнитное поле, а функции  $\alpha_{ij}(\mathbf{X}_a)$ ,  $E_r(\mathbf{X}_a)$  эффе́ктивно вычисляются с помощью быстро сходящихся решеточных

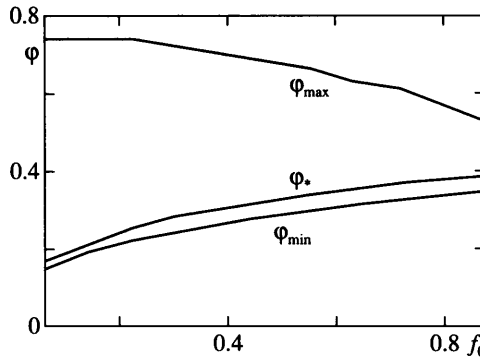
сумм. При этом  $E_r$  зависит только от сил отталкивания, а  $\alpha_{ij}$  – только от конфигурации дипольных моментов. Предполагается, что связь между координатами векторов решетки  $X_a^i$  и дисторсией  $x_a^i$  определяется по начальным значениям  $X_a^i = Y_a^i(\xi^b)$  и закону движения  $x^i(\xi^a, t)$ , который определяет соответствующие векторы в актуальном состоянии  $X_a^i = Y_a^b(\xi^c)x_b^i$ .

Очевидно, (2.4) дает приближение для свободной энергии при  $\zeta = \infty$ ,  $\gamma = \infty$ , если только ферромагнитное состояние устойчиво. Результаты [7, 8] позволяют исследовать устойчивость системы относительно произвольных возмущений дипольных моментов при сохранении периодичности расположения частиц. При достаточно больших магнитных полях ( $\zeta \gg \gamma$ ) ферромагнитное состояние устойчиво. Однако при  $H = 0$  (что соответствует  $\gamma \gg \zeta \gg 1$ ) решение задачи о минимуме энергии в расчете на частицу для бесконечных решеточных дипольных систем показывает, что решетки разбиваются на два типа: для ферромагнитного типа все дипольные моменты в состоянии равновесия параллельны, а для антиферромагнитного типа в состоянии равновесия сумма дипольных моментов равна нулю и в случае общего положения дипольные моменты соответствующих соседних частиц антипараллельны. К ферромагнитному типу относится, в частности, гранецентрированная кубическая, а к антиферромагнитному типу – простая кубическая решетка. Таким образом, область применимости решеточной модели при достаточно малых полях ограничена.

Однако результаты [7, 8] показывают, что решетки, которые физически соответствуют равновесным состояниям суспензии в фиксированном объеме при отсутствии внешних сил, имеют ферромагнитный тип, по крайней мере, в физически интересной области значений определяющих параметров  $10 \leq k_0 \leq 40$  и  $0.05 < f_0 < 1$ . Эти равновесные решетки определяются путем минимизации функции  $e_{\min}(X_a)$  – минимальной по всем возможным ориентациям дипольных моментов плотности энергии в расчете на частицу для решетки с векторами  $X_a$  – в пространстве всех физически реализуемых решеток твердых сфер (т.е. решеток с расстояниями между узлами не менее диаметра частиц  $d$ ) с заданной объемной концентрацией частиц  $\phi$ . Среди равновесных решеток можно выделить решетки (будем называть их минимальными), соответствующие минимуму  $e_{\min}(X_a)$  при всех физически реализуемых концентрациях частиц. Условие минимальности решетки определяет значение объемной концентрации частиц  $\phi_{\min}(k_0, f_0)$ , являющееся нижней границей физически допустимых значений объемной концентрации для решеточной модели. Для суспензии с  $\phi < \phi_{\min}$  энергетически выгодно образование агрегатов – расслоение суспензии на области с малой (в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$  – нулевой) концентрацией и с концентрацией  $\phi_{\min}$ .

Существует также максимально допустимое значение концентрации  $\phi_{\max}(k_0, f_0)$ , которое определяет границу слипания частиц (минимальное расстояние между узлами равновесной решетки равно диаметру частиц), так что равновесные решетки имеют физический смысл только в области  $\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}$  (фиг. 1). Таким образом, изучение решеточной модели позволяет оценить границу ее устойчивости: модель имеет физический смысл только в определенном диапазоне концентраций частиц, а при малых полях – для состояний равновесия и достаточно близких к ним, так как произвольные достаточно большие деформации, вообще говоря, могут привести к изменению типа решетки на антиферромагнитный.

В частности, для частиц магнетита (намагниченность насыщения 500 Гс) диаметра 30 нм без оболочки, поверхностном потенциале  $\psi_0 = 50$  мВ,  $\epsilon = 80$  и  $r_d = 1.5$  нм основные безразмерные параметры задачи равны  $\gamma \approx 42$ ,  $k_0 = 20$ ,  $f_0 \approx 0.76$ , а диапазон допустимых концентраций частиц в решеточной модели определяется по  $\phi_{\min} \approx 0.41$ ,  $\phi_{\max} \approx 0.63$ .



Фиг. 1. Допустимые значения концентраций равновесных состояний в модели периодической решетки в зависимости от параметра  $f_0$  при  $k_0 = 15$ ,  $\phi_*$  – точка изменения симметрии решетки

Равновесные решетки  $X_a$  имеют следующую структуру [7, 8]:

$$X_1 = a e_1, \quad X_2 = (1/2)(a e_1 + b e_2 + c e_3), \quad X_3 = (1/2)(a e_1 - b e_2 + c e_3) \quad (2.5)$$

где  $e_1, e_2, e_3$  – орты подходящей системы координат, а векторы намагниченности параллельны оси  $e_1$ . При  $H \neq 0$  в состоянии равновесия  $e_1 \parallel H$ , что достигается за счет вращения решетки. Матрица  $\alpha_{ij}$  для равновесных решеток имеет определенный с точностью до знака собственный вектор, отвечающий максимальному собственному значению, и определяющий направление намагниченности. Для концентраций, меньших критической ( $\phi > \phi_*(k_0, f_0)$ ),  $c = b \geq \sqrt{3/2} a$ , решетка обладает объемно-центрированной тетрагональной симметрией. Для концентраций, больших критической, симметрия меняется на объемно-центрированную орторомбическую,  $c \neq b \neq a$ ,  $d^2 \leq a^2 < (1/4)(a^2 + b^2 + c^2) < b^2$ .

**3. Периодические течения и вычисление кинетических коэффициентов.** Кратко изложим результаты [8]. Для вычисления кинетических коэффициентов в приближении  $\gamma = \infty, \zeta = \infty$  рассмотрим в постановке Стокса сдвиговые течения суспензии однородно намагниченных сферических частиц диаметра  $d$  с постоянным по величине магнитным дипольным моментом  $m(t)$ , расположенных в узлах периодической решетки вида  $x^i(n^a, t) = X_a^i(t)n^a, n^a \in Z$  с учетом межчастичного взаимодействия (2.1). Жидкость-носитель считается вязкой и несжимаемой, а магнитные моменты – постоянными по величине и “вмороженными” в частицы, так что справедливо уравнение  $dm/dt = \omega \times m$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения частиц. Средняя скорость решетки равна  $v^i(x, t) = Z_k^i(t)x^k$ , где  $Z_k^i = \partial_k v^i$  определяется из условия  $Z_k^i X_a^k = d X_a^i / dt$ .

Будем обозначать микроскопические величины индексом ( $m$ ). Предполагается, что в каждый момент времени скорость жидкости  $v_{(m)}(x, t)$  представляется в виде  $v_{(m)}^i(x) = Z_k^i(t)x^k + v_{(m)}^i(x, t)$ , где  $v_{(m)}^i$  наряду с давлением  $p_{(m)}$  – периодические функции координат; при этом выполняются уравнения Стокса и условия прилипания на поверхностях частиц

$$\text{div}(v_{(m)}) = 0, \quad -\nabla p_{(m)} + \mu \Delta v_{(m)} = 0, \quad v_{(m)}^i(x)|_{|x|=d} = \varepsilon^{ijk} \omega_j x_k \equiv \omega_{ij} x^j \quad (3.1)$$

Здесь  $\mu$  – вязкость жидкости-носителя,  $\epsilon^{ijk}$  – тензор Леви-Чивита. Решение  $(\mathbf{v}_{(m)}(\mathbf{x}), p_{(m)}(\mathbf{x}))$  системы (3.1) определяется в каждый момент времени по величинам  $X_a^i(t)$ ,  $d$ ,  $Z_k^i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  с точностью до несущественной постоянной.

Магнитное поле определяется из решения периодической задачи магнитостатики с заданным распределением намагниченности внутри частиц [8].

Пусть задан закон движения решетки  $X_a^i(t)$ . Тогда для определения угловой скорости вращения частиц к системе (3.1) надо добавить уравнения баланса моментов сил, действующих на частицы. При этом момент магнитных сил выражается через средние значения  $\mathbf{H} = \langle \mathbf{H}_{(m)} \rangle$ ,  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{M}_{(m)} \rangle$  и  $\mathbf{h}(X_a^i, \mathbf{M}, \mathbf{H})$  (1.2):

$$S^{ij} - S^{ji} + h^i M^j - h^j M^i = 0, \quad S^{ij} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_p} \sigma_{(H)}^{ik} x^j n_k dS, \quad \sigma_{ij}^{(H)} = -p_{(m)} \delta_{ij} + \mu (\nabla_i v_{(m)j} + \nabla_j v_{(m)i}) \quad (3.2)$$

Здесь  $S^{ij}$  – стресслет,  $\sigma_{ij}^{(H)}$  – гидродинамический тензор напряжений,  $\partial V_p$  – поверхность частицы,  $V_0$  – объем ячейки.

Средняя по объему диссипация механической энергии

$$D = \frac{1}{V_0} \int_{V_f} \sigma_{(H)}^{ij} \partial_i v_{(m)j} dV = \tau_{(1)}^{ij} (Z_{ij} - \omega_{ij}), \quad \tau_{(1)}^{ij} \equiv \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + S^{ij}$$

в силу линейности и симметрии задачи представляется в виде

$$D = \mu R^{ijkl} (Z_{ij} - \omega_{ij})(Z_{kl} - \omega_{kl}), \quad \tau_{(1)}^{ij} = \mu R^{ijkl} (X_a^m, d)(Z_{kl} - \omega_{kl}) \quad (3.3)$$

Для приближенного вычисления коэффициентов  $R^{ijkl}$  при больших объемных концентрациях используем приближение смазки [13, 14], в котором принимается, что основной вклад в решение задачи при заданных  $Z_{ik}$ ,  $\omega_l$  дают взаимодействия выделенной частицы с ближайшими соседями. При этом

$$R_{ijkl} = \delta_{ik} A_{lj} + B_{ijkl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}, \quad A_{ik} = A_{ki}, \quad B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{klij} \quad (3.4)$$

Коэффициенты  $A_{ik}$  и  $B_{ijkl}$  определяются путем суммирования по ближайшим соседям выделенной частицы [8] и имеют порядок  $\ln(1/\epsilon_1)$  и  $1/\epsilon_1$ , где  $\epsilon_1 \ll 1$  – безразмерное расстояние между поверхностями соседних частиц.

Средний тензор напряжений имеет вид (1.7), где  $\tau^{ij} = \tau_{(1)}^{(ij)}$ , а кинетические коэффициенты  $\eta_{ijkl}$ ,  $\mu_{ijk}$ ,  $\chi_{ij}$  в (1.9) выражаются через тензор  $R^{ijkl}$  и вектор  $\mathbf{M}$ :

$$\eta_{ijkl} = \mu (R_{(ij)(kl)} - 2R_{(ij)}^{mn} \Sigma_{mnpq} R_{(kl)}^{pq}) \\ \mu_{ijk} = -\mu'_{ijk} = 2\Sigma_{knpq} M^n R_{(ij)}^{pq}, \quad \chi_{ij} = \frac{2}{\mu} \Sigma_{ikjl} M^k M^l \quad (3.5) \\ 2\Sigma_{ikpq} \equiv \epsilon_{ikl} \epsilon_{mpq} C^{lm}, \quad C(X_a^i) \equiv [\text{Sp}(A)E - A]^{-1}.$$

Поэтому выражение для диссипации (1.10) и условия симметрии (1.11) приобретают вид

$$D = \eta_{ijkl} e^j e^{kl} + \chi_{ik} h^i h^k, \quad \chi_{ik} = \chi_{ki}, \quad \eta_{ijkl} = \eta_{klij} = \eta_{jikl} \quad (3.6)$$

Кинетические коэффициенты не зависят явно от напряженности магнитного поля. Это связано с тем, что в уравнения моментов (3.2) магнитное поле входит только через комбинацию  $h_{[i} M_{j]}$ . Согласно (3.3) диссипация  $D$  представляется в виде квадратичной формы от переменных  $e_{kl}$ ,  $\Omega_{kl} - \omega_{kl}$ , которая с помощью (3.2) преобразуется к квадратичной форме  $D_1(e_{kl}, h_{[i} M_{j]})$  с коэффициентами, зависящими только от векторов решетки и диаметра частиц.

Коэффициенты теплопроводности могут быть приближенно вычислены при больших концентрациях аналогичным образом, однако в дальнейшем эффекты теплопроводности рассматриваться не будут. Для простоты ограничимся случаем  $T = \text{const}$ .

**4. Магнитовязкий эффект.** Кинетические коэффициенты (3.5) зависят от дисторсии  $x_a^i$  и вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ , но не зависят явно от напряженности магнитного поля. Однако из (1.9), (3.5) получим

$$\frac{dM_i}{dt} - \Omega_{ik} M^k = \mu_{jki} (x_a^n, M^m) e^{jk} + \chi_{ik} h^k (x_a^n, M^m, H^l), \quad (4.1)$$

что можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $\mathbf{M}$  при заданных  $x_a^i$ ,  $\mathbf{H}$  как функций лагранжевых переменных и времени. Приближенное решение возможно в случае, когда магнитное поле однородно и постоянно, и деформирование среды происходит достаточно медленно для того, чтобы считать намагниченность близкой к равновесному значению:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \delta\mathbf{M}$ , где  $|\delta\mathbf{M}| \ll |\mathbf{M}_e| = M$ , а  $\mathbf{M}_e(x_a^i, \mathbf{H})$  определяется из условия минимума  $F'(x_a^i, \mathbf{M}, \mathbf{H})$  (2.4) по  $\mathbf{M}$  при условии  $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$  и фиксированных  $x_a^i, \mathbf{H}$ . В точке минимума

$$h_i^i \equiv -\frac{\partial F'}{\partial M^i} = H^i + \alpha_k^i(x_a^n) M_e^k = \lambda(x_a^n, \mathbf{H}) M_e^i \quad (4.2)$$

где  $\lambda(x_a^i, \mathbf{H})$  – некоторая положительная функция и  $\mathbf{h} = 0$ . Очевидно, что

$$H \rightarrow \infty: \mathbf{M}_e \rightarrow M\mathbf{H}/H, \quad H \rightarrow 0: \mathbf{M}_e \rightarrow \mathbf{M}_0(x_a^i),$$

где  $\mathbf{M}_0$  – собственный вектор матрицы  $\alpha_{ik}$ , соответствующий максимальному собственному значению. Здесь предполагается, что, как и для равновесных решеток (разд. 2) и близких к ним, собственный вектор определяется с точностью до знака, по условию минимума  $F'$  выбирается значение с положительным  $\mathbf{M}_0\mathbf{H}$ , а предел  $H \rightarrow 0$  рассматривается при фиксированном направлении  $\mathbf{H}$ .

В рассматриваемой задаче часто встречаются матрицы  $3 \times 3$   $C = (C_{ik})$ , удовлетворяющие условиям  $C_{ik}\tau^i = C_{ik}\tau^k = 0$ , где  $(\tau^i)$  – некоторый единичный вектор (например, матрица  $\chi_{ik}$  при  $\tau = \mathbf{M}_e/M$ ). Будем использовать обозначения  $C_2 = P_2(C, \tau)$  или  $C_{2\alpha\beta} = P_2(C_{ik}, \tau^l)$  для естественной проекции матрицы  $C$  на плоскость, ортогональную к  $(\tau^i)$ . В системе координат, в которой  $\tau^1 = \tau^2 = 0, \tau^3 = 1, C_{2\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$ . Введем обозначение  $C_{ik}^* = I_2(C_{ik}, \tau^l)$  для матрицы  $C^*$ , удовлетворяющей условиям



$$C_{ik}^* \tau^k = C_{ik}^* \tau^i = 0, \quad P_2(C^*, \tau) P_2(C, \tau) = E_2$$

где  $E_2$  – единичная  $2 \times 2$  матрица.

Так как  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ , то  $\mathbf{M}_e \delta \mathbf{M} = 0$ . С учетом этого ограничения вторая вариация  $F'$  по  $\mathbf{M}$  в точке  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e$  представляется в виде  $\delta^2 F' = (\lambda \delta_{ik} - \alpha_{ik}) \delta M^i \delta M^k$ ; по условию минимальности эта квадратичная форма положительно определена на плоскости, ортогональной к  $\mathbf{M}_e$ .

Линеаризуем уравнение (4.1) по  $\delta \mathbf{M}$ . Используя (4.2), получим, что

$$h_i \approx \alpha'_{ik} \delta M^k, \quad \alpha'_{ik} \delta M^i \delta M^k = (\alpha_{ik} - \lambda(x_a^i, \mathbf{H}) \delta_{ik}) \delta M^i \delta M^k$$

$$\alpha'_{ik} \equiv \alpha_{ik} - \alpha_{ik} \tau^l \tau_l - \alpha_{il} \tau^l \tau_k + \alpha_{mn} \tau^m \tau^n \tau_i \tau_k - \lambda(\delta_{ik} - \tau_i \tau_k), \quad \tau^i \equiv M^{-1} M_e^i$$

$$\alpha'_{ik} = \alpha'_{ki}, \quad \alpha'_{ik} M_e^i = 0$$

Квадратичная форма  $P_2(\alpha', \tau)$  отрицательно определена. Используя верное при постоянном  $\mathbf{H}$  тождество

$$\frac{dM_e^i}{dt} = W^{imn}(x_a^k, H^p)(e_{mn} + \Omega_{mn}), \quad W^{imn} \equiv \left( \frac{\partial M_e^i}{\partial x_a^n} \right) x_a^m \quad (4.3)$$

получим систему для определения  $\delta \mathbf{M}(t)$  по заданным  $x_a^i(t)$ :

$$\frac{d\delta M_i}{dt} = L_i^s(t) \delta M_s + G_i(t), \quad M_e^i(t) \delta M_i = 0 \quad (4.4)$$

$$G_i(t) \equiv -W^{imn}(e_{mn} + \Omega_{mn}) + \Omega_{ik} M_e^k + \mu_{jki} e^{jk}$$

где  $L_i^s = \chi_{ik} \alpha'^{ks}$  удовлетворяет условиям  $L_i^s M_e^i = 0$ ,  $L_i^s M_{es} = 0$ . Для  $\chi_{ij}$ ,  $\mu_{ijk}$  в линеаризованной системе берутся их значения при  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_e(x_a^i, \mathbf{H})$ , лагранжевы координаты фиксированы.

Так как  $P_2(\chi, \tau)$  и  $P_2(-\alpha', \tau)$  симметричны и положительно определены, то собственные значения двумерной матрицы  $P_2(L_i^s, \tau^k)$  отрицательны и могут быть представлены в виде  $(-1/t_1, -1/t_2)$ , где  $t_1(t) \geq t_2(t) > 0$  – времена релаксации. Если  $t_1 \ll t_V$ , где  $t_V$  – характерное время изменения коэффициентов в (4.4), то можно пренебречь членом  $d\delta \mathbf{M}/dt$ , откуда

$$\delta M_s \approx M_1^s(x_a^i, \mathbf{H}, e_{kl}, \Omega_{kl}) \equiv L_{si}^* [W^{imn}(e_{mn} + \Omega_{mn}) - \Omega_k^i M_e^k - \mu_{jki} e^{jk}] \quad (4.5)$$

$$L_{ik}^* = I_2(L_{ik}, \tau^l).$$

Точные математические определения и доказательства выходят за рамки настоящей работы. Физический смысл  $t_V$  заключается в оценках

$$|e_{mn}| \leq t_V^{-1}, \quad |\Omega_{mn}| \leq t_V^{-1}, \quad |de_{mn}/dt| \leq t_V^{-2}, \quad |d\Omega_{mn}/dt| \leq t_V^{-2}$$

что при  $t_V \gg t_1$  обеспечивает оценку  $|dM_i/dt| \ll M/t_V$ . Влияние на решение системы (4.4) начальных условий пренебрежимо мало при  $t > t_V \gg t_1$ .

В данном приближении тензор напряжений (1.7) с точностью до шарового тензора равен

$$\eta_{ijkl}(x_a^i)e^{kl} + \sigma_{ij}(x_a^i, \mathbf{M}_e(x_a^i, \mathbf{H}), \mathbf{H}) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial M^s} M_1^s(x_a^i, \mathbf{H}, e_{kl}, \Omega_{kl})$$

Таким образом, после исключения вектора намагниченности в выражении для тензора напряжений появляется дополнительное слагаемое, зависящее не только от тензора скоростей деформаций, но и от вектора вихря, а также от напряженности магнитного поля. В этом и проявляется магнитовязкий эффект [1, 2]. Чтобы определить, как изменяется эффективная вязкость среды в магнитном поле, наиболее удобно использовать выражение для диссипации (3.6), которое в рассматриваемом приближении примет вид

$$\begin{aligned} D &\approx \eta_{ijkl} e^{ij} e^{kl} + \chi_{ik}^* h^{*i} h^{*k} = \eta_{ijkl}^{(e)} (e^{ij} + \Omega^{ij})(e^{kl} + \Omega^{kl}) \\ h^{*i} &\equiv W^{imn} (e_{mn} + \Omega_{mn}) - \Omega_{ik}^i M_e^k - \mu_{jki} e^{jk}, \quad \chi_{ik}^* = I_2(\chi_{ik}, \tau^i) \\ \eta_{ijkl}^{(e)} &= \eta_{ijkl} + \chi_{mn}^* W_{(1)}^{mij} W_{(1)}^{nkl}, \quad W_{(1)}^{imn} \equiv W^{imn} - \mu_{mni} - \delta_{i[m} M_{n]} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь  $\eta_{ijkl}^{(e)}(x_a^i, \mathbf{H})$  – эффективные коэффициенты вязкости.

Из определения  $\mathbf{M}_e$  следует, что в сильных постоянных магнитных полях  $d\mathbf{M}_e/dt \approx 0$ , и, следовательно,  $W^{imn} \approx 0$  и  $h_i^* \approx h_i^*(\infty) \equiv -\Omega_{ik} M_e^k - \mu_{jki} e^{jk}$ , так что при твердотельных вращениях ( $e_{ij} = 0, \Omega \neq 0$ )  $D > 0$ , за счет того, что магнитное поле удерживает частицы. В слабых магнитных полях вектор  $\mathbf{M}_e \rightarrow \mathbf{M}_0$ , а так как при вращениях решетки соответственно вращается и собственный вектор  $\mathbf{M}_0$ , то

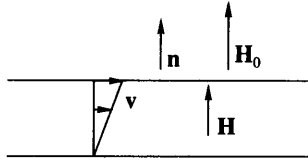
$$H \rightarrow 0: W^{imn} \Omega_{mn} - \Omega_{ik}^i M_e^k \rightarrow 0, \quad h^{*i} \rightarrow h^{*i}(0) \equiv (W^{imn} - \mu^{mni}) e_{mn}$$

При твердотельных вращениях в слабых магнитных полях  $D \rightarrow 0$ , так как частицы вращаются вместе с жидкостью.

Покажем, что в зависимости от соотношения между тензором скоростей деформаций и вектором вихря возможен случай, когда при фиксированном направлении магнитного поля диссипация при слабых полях больше, чем при сильных. Для этого сравним значения диссипации при  $H \rightarrow 0$  и  $H \rightarrow \infty$  и фиксированных остальных параметрах в простейшем случае, когда при фиксированных  $x_a^i = x_a^i(0)$   $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M}_0, \mathbf{H}\mathbf{M}_0 > 0$ . Из определений  $\mathbf{M}_e$  и  $\mathbf{M}_0$  следует, что в данном случае при  $x_a^i = x_a^i(0)$   $\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_0$ , так как  $\mathbf{M}_0$  – точка минимума квадратичной формы  $-\alpha_{ik} M^i M^k$ , а  $\mathbf{M}_e$  – точка минимума функции  $-(1/2)\alpha_{ik} M^i M^k - \mathbf{M}\mathbf{H}$  при условиях  $|\mathbf{M}| = M_0 = \text{const}$ . Таким образом,  $\mathbf{M}_e$  не зависит от  $H$  и из (4.6) следует, что

$$D(\infty) - D(0) \approx \chi_{ik}^*(x_a^i, \mathbf{M}_0(x_a^i)) [h^{*i}(\infty) h^{*k}(\infty) - h^{*i}(0) h^{*k}(0)]$$

При  $e_{ij} = 0$  всегда  $D(\infty) > D(0)$ . С другой стороны, при любых  $e_{ij} \neq 0$  и  $\mathbf{h}^*(0) \neq 0$  за счет выбора  $\Omega$  можно сделать  $h_i^*(\infty) \equiv -\Omega_{ik} M_e^k - \mu_{jki} e^{jk} = 0$ , т.е. можно добиться того, что при некоторых значениях скоростей деформаций  $D(\infty) < D(0)$ . Физически этот эффект связан с тем, что даже при нулевом вихре деформация среды, вообще говоря, вызывает соответствующее вращение собственного вектора  $\mathbf{M}_0$ , а так как намагниченность заморожена в частицы и в слабых полях близка к  $\mathbf{M}_0$ , то при этом происходит вращение частиц относительно жидкости и увеличение диссипации механической энергии.



Фиг. 2. Продольные колебания пластины:  $v$  – скорость,  $H_0$  – внешнее магнитное поле,  $H$  – внутреннее магнитное поле

Во многих случаях, например, при простом сдвиге тензоры  $e_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$  связаны между собой, и зависимость эффективной вязкости от напряженности магнитного поля определяется конкретными значениями коэффициентов в (4.5). В качестве примера рассмотрим задачу о малых колебаниях слоя в поперечном магнитном поле. Эта задача может иметь практическое значение, например, для расчета демпфирующих устройств.

Рассматривается бесконечный слой суспензии толщины  $h$  между двумя плоскопараллельными магнетонейтральными пластинами (фиг. 2). Вне слоя напряженность магнитного поля постоянна, однородна и равна  $H_0 = H_0 n$ , где  $n$  – вектор нормали к пластинам. Предполагается, что при  $t \leq 0$  суспензия находится в состоянии равновесия, соответствующем минимуму энергии системы при заданной концентрации частиц  $\phi$  и заданных параметрах взаимодействия  $k_0, f_0$  (равновесные решетки разд. 2), и при этом намагниченность  $M = M_0 = Mn$ . Из условий на границе  $[H_t] = 0, [B_n] = 0$  следует, что в состоянии равновесия напряженность внутреннего магнитного поля  $H = H_0 - 4\pi M$ . Предполагается, что также выполняются условия  $M > 0, H = H_0 - 4\pi M \geq 0$ .

Начиная с момента времени  $t = 0$  верхняя пластина приводится в движение в виде малых продольных колебаний произвольной формы, затухающих со временем:

$$\delta x^\alpha(t) = hU^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \quad U^\alpha(t \leq 0) = 0, \quad U^\alpha(t = \infty) = 0, \quad |U^\alpha| \leq \varepsilon_U \ll 1 \quad (4.7)$$

где  $\delta x^\alpha$  определяют координаты продольного смещения пластины, а координатная ось  $x^3$  перпендикулярна слою. Нижняя пластина остается неподвижной. Требуется найти закон движения среды, намагниченность и тензор напряжений в линейном приближении, предполагая, что искомые величины не зависят от  $x^1, x^2$ .

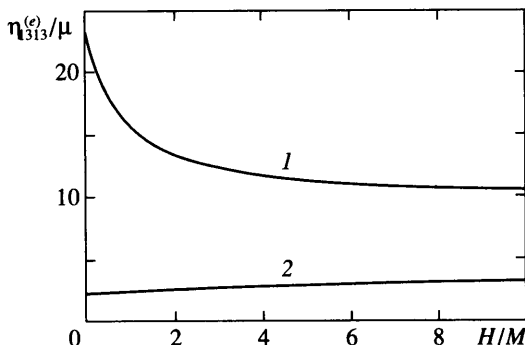
Уравнение неразрывности принимает вид  $\partial v^3 / \partial x^3 = 0$ . На границах предполагаются выполненными условия прилипания для скоростей. Учитывая, что при продольных колебаниях на границах слоя  $v^3 = 0$ , получим, что  $v^3 = 0$  всюду внутри слоя. Таким образом, единственными отличными от нуля компонентами  $\partial_i v^k$  будут  $\partial_3 v^\alpha, \alpha = 1, 2$ . При этом из (4.7) и условий прилипания для скоростей следует, что средний градиент скорости по толщине слоя равен

$$\langle \partial_3 v^\alpha \rangle = \frac{dU^\alpha}{dt} \quad (4.8)$$

Обозначим возмущения основных величин с помощью префикса  $\delta_1$ . Линеаризуя уравнения (1.4) и учитывая, что в силу  $|M| = \text{const} \quad M \delta_1 M = 0$  и поэтому  $\delta_1 M^3 = 0$ , получим

$$\partial_3(\delta_1 H^3) = 0, \quad \partial_3(\delta_1 H^\alpha) = 0 \quad (4.9)$$

Аналогично, линеаризуя условия на границах  $[H_t] = 0, [B_n] = 0$ , получим, что на границах  $\delta_1 H^\alpha = 0, \delta_1 H^3 = 0$ . Учитывая (4.9), получим, что  $\delta_1 H = 0$ , т.е. в первом приближении по  $\varepsilon_U$  магнитное поле внутри среды можно считать однородным и постоянным. Это позволяет в случае достаточно медленных деформаций получить приближенное решение



Фиг. 3. Зависимость коэффициента эффективной вязкости  $\eta_{1313}^{(e)}$  от напряженности внутреннего поперечного магнитного поля  $H$ : 1 –  $k_0 = 30, f_0 = 0.693, \varphi = 0.504$ , 2 –  $k_0 = 15, f_0 = 0.775, \varphi = 0.335$

уравнений (4.1), как и в случае  $\mathbf{H} = \text{const}$ , с помощью (4.4), (4.5), пренебрегая членами порядка  $t_1/t_V$  и  $\epsilon_U^2$ , где  $t_V^{-1}$  – характерная скорость деформаций, а  $t_1$  – характерное время релаксации намагниченности. При этом под  $\delta\mathbf{M}$  в (4.5) следует понимать отклонение намагниченности от равновесного значения в возмущенном состоянии  $\mathbf{M}_e(x_a^i(0) + \delta_1 x_a^i, \mathbf{H})$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(0) + \delta_1 \mathbf{M} = \mathbf{M}_e(x_a^i(0) + \delta_1 x_a^i, \mathbf{H}) + \delta\mathbf{M}$$

где нуль соответствует величинам в состоянии равновесия ( $t \leq 0$ ).

Для оценки  $t_V$  заметим, что если обозначить характерную частоту колебаний (4.7) через  $\omega_U$ , предполагая, что  $|dU^\alpha/dt| \leq \omega_U \epsilon_U$ , то из (4.8) получим  $|\langle \partial_3 v^\alpha \rangle| \leq \omega_U \epsilon_U$ . Таким образом, естественным физическим параметром, характеризующим скорость деформаций, в данной задаче является  $t_V^{-1} \sim \omega_U \epsilon_U$  и, условие  $t_1/t_V \ll 1$  выполняется при  $\epsilon_U \omega_U t_1 \ll 1$ .

Выражение (4.6) примет вид  $D \approx \eta_{(e)}^{\alpha\beta\gamma} (x_a^i(0) + \delta_1 x_a^i) \partial_3 v_\alpha \partial_3 v_\beta$ . При этом эффективные коэффициенты вязкости в нулевом приближении могут быть вычислены по исходному состоянию равновесия суспензии, не решая задачи об определении закона движения среды:  $\eta_{(e)}^{\alpha\beta\gamma} = \eta_{(e)}^{\alpha\beta\gamma}(x_a^i(0)) + O(\epsilon_U)$ . Зависимость этих коэффициентов от напряженности внутреннего магнитного поля для двух различных состояний равновесия среды показана на фиг. 3. В обоих случаях состояние равновесия соответствует объемно-центрированной тетрагональной симметрии решетки и  $\eta_{(e)}^{1313} = \eta_{(e)}^{2323}, \eta_{(e)}^{1323} = \eta_{(e)}^{2313} = 0$ .

**Заключение.** Модель периодической решетки и приближение смазки позволили получить выражения для свободной энергии и коэффициентов вязкости для суспензии с дипольно взаимодействующими частицами дисперсной фазы при больших концентрациях в случае, когда броуновским движением можно пренебречь. В задаче о медленной деформации среды в постоянном магнитном поле при некоторых значениях определяющих параметров обнаружено увеличение эффективной вязкости суспензии при малых магнитных полях, связанное с сильным дипольным взаимодействием частиц.

Автор выражает благодарность А.Н. Голубятникову и В.А. Полянскому за обсуждение результатов и ценные замечания.

Работа поддержана РФФИ (№ 04-01-00078).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kröger M., Ilg P., Hess S.* Magnetoviscous model fluids // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2003. V. 15. S. 1403–1423.
2. *Bacri J.-C., Perzynski R., Shliomis M.I., Burde G.I.* “Negative-Viscosity” effect in a magnetic fluid // *Phys. Rev. Letters*, 1995. V. 75. № 11. P. 2128–2131.
3. *Ivanov A.O.* Spontaneous ferromagnetic ordering in magnetic fluids // *Phys. Rev.* 2003. V. E68. P. 011503–1–5.
4. *Groh B., Dietrich S.* Crystal structures and freezing of dipolar fluids // *Phys. Rev.* 2001. V. E63. P. 021203–1–11.
5. *Dassanayake U., Fraden S., van Blaaderen A.* Structure of electrorheological fluids // *J. Chem. Phys.* 2000. V. 112. № 8. P. 3851–3858.
6. *Gray J.J., Bonnecaze R.T.* Rheology and dynamics of sheared arrays of colloidal particles // *J. Rheol.* 1998. V. 42. № 5. P. 1121–1151.
7. Жуков А.В. Исследование положения равновесия периодической системы твердых сфер с дипольным взаимодействием // Отчет Института механики МГУ. 1991. № 4004. 30 с.
8. Жуков А.В. Структура и реологические свойства концентрированных суспензий ферромагнитных частиц, образующих периодическую решетку // Отчет Института механики МГУ. 2003. № 4687. 41 с.
9. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика намагничивающейся жидкости // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.* Т. 16. М.: ВИНТИ, 1981. С. 76–208.
10. Привороцкий И.А. Термодинамическая теория ферромагнитных доменов // *УФН.* 1972. Т. 108. № 1. С. 43–80.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1992. 664 с.
12. *Derjaguin B.* A theory of interaction of particles in presence of electric double layers and the stability of lyophobic colloids and disperse systems // *Acta physicochimica. URSS.* 1939. V. 10. № 3. P. 333–346.
13. Зинченко А.З. Схема прямого численного моделирования сдвиговых течений высококонцентрированных суспензий // Отчет Института механики МГУ. 1989. № 3846. 33 с.
14. *Nasseri S., Phan-Thien N., Fan X.-J.* Lubrication approximation in complete double layer boundary element method // *Comput. Mechanics.* 2000. V. 26. P. 388–397.

Москва

Поступила в редакцию  
27.IX.2005