

УДК 532.526.2:533.6.011.5

© 2006 г. И. В. ЕГОРОВ, А. В. НОВИКОВ, А. В. ФЕДОРОВ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ  
В ЗАКРУГЛЕННОМ УГЛЕ СЖАТИЯ**

На основе решения двумерных уравнений Навье–Стокса проведено численное моделирование нестационарного сверхзвукового обтекания угла сжатия с различным радиусом закругления на режимах, соответствующих локальному отрыву пограничного слоя. Выполнены расчеты развития неустойчивых возмущений, возбуждаемых локальным периодическим вдувом–отсосом в предотрывном пограничном слое. Результаты сравниваются с аналогичными расчетами на плоской пластине. Показано, что собственные колебания второй моды пограничного слоя стабилизируются в зоне отрыва и интенсивно нарастают за точкой присоединения. С помощью численных расчетов и асимптотического анализа исследованы акустические моды, возбуждаемые в отрывном пузыре.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, сверхзвуковые течения, угол сжатия, отрывные течения, возмущения, пограничный слой, численное моделирование.

Предсказание ламинарно-турбулентного перехода – важная задача для расчета сопротивления и тепловых потоков гиперзвуковых летательных аппаратов [1]. Обзор экспериментальных и теоретических исследований возникновения турбулентности в сверхзвуковых пристенных течениях, а также методов расчета чисел Рейнольдса перехода можно найти в [2, 3]. При малых уровнях внешних возмущений процесс перехода обусловлен возбуждением и развитием неустойчивых возмущений. Экспериментальные исследования этих процессов в гиперзвуковых аэродинамических трубах весьма ограничены. Прямое численное моделирование может восполнить этот пробел, так как численный эксперимент дает детальную информацию о поле возмущений. С его помощью можно исследовать сложные течения, для которых традиционные методы теории устойчивости, развитые для слабо-непараллельных пограничных слоев, не применимы. Важный практический пример таких течений – отрыв пограничного слоя.

В данной работе численно исследуется сверхзвуковое ( $M_\infty = 5.373$ ) обтекание угла сжатия. Эта конфигурация типична для элементов конструкции летательных аппаратов: изломов обтекаемой поверхности воздухозаборников, генерирующих косые скачки уплотнения; отклоняемых рулевых поверхностей (балансировочных щитков). Пристенное течение в угле сжатия характеризуется локальным отрывом пограничного слоя, вызванным неблагоприятным градиентом давления. В пространственной структуре стационарного течения можно выделить: пограничный слой перед отрывом, слой смещения и зону рециркуляционного течения в области отрыва, пограничный слой за точкой присоединения. Волновые возмущения неустойчивой моды предотрывного пограничного слоя, проходя через эти области, могут существенно изменять свои характеристики, а также возбуждать другие моды колебаний.

При больших сверхзвуковых скоростях потока наиболее неустойчивая мода в пограничном слое – вторая [4], характеризующаяся относительно высокой частотой и максимальными инкрементами в двумерном случае. Поэтому представляет интерес детальное исследование развития таких двумерных высокочастотных возмущений в области отрыва.

Расчеты возмущений в угле сжатия на основе линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования [5] обнаружили, что высокочастотные возмущения растут до точки отрыва и после точки присоединения, а в области возвратного течения остаются нейтральными. Наоборот, низкочастотные возмущения неустойчивы в области возвратного течения и практически нейтральны в присоединенных пограничных слоях. В отрывном пузыре наблюдалось сложное поле с дополнительными пиками возмущений плотности.

В настоящей работе численно исследуются двумерные неустойчивые возмущения, развивающиеся в области отрыва и в присоединенных пограничных слоях. Обсуждаются результаты расчетов, демонстрирующие различия в эволюции возмущений на пластине и в угле сжатия. Анализируется влияние закругления угла на среднее течение (величину отрывной зоны, толщину пограничного слоя) и на распространение возмущений в зоне возвратного течения и за ней. Для интерпретации результатов численных расчетов применяется асимптотическая модель [6, 7], описывающая с помощью ВКБ-метода [8] коротковолновые невязкие возмущения акустической природы.

**1. Постановка задачи и численный метод.** Вязкие сжимаемые течения описываются уравнениями Навье–Стокса, которые следуют из законов сохранения потоков массы, импульса и энергии. Для двумерных нестационарных течений уравнения Навье–Стокса в криволинейной системе координат  $(\xi, \eta)$ , где  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  – декартовы координаты, записываются в безразмерной, консервативной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} = 0$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  – вектор консервативных зависимых переменных,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{G}$  – векторы потоков в криволинейной системе координат. Эти векторы выражаются через соответствующие векторы в декартовой системе координат  $\mathbf{Q}_c$ ,  $\mathbf{E}_c$  и  $\mathbf{G}_c$

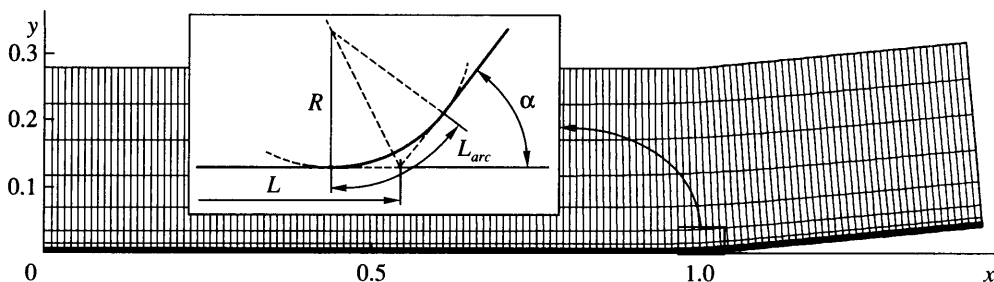
$$\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{E} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y}\right), \quad \mathbf{G} = J\left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

где  $J = \det[\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)]$  – якобиан преобразования. Компоненты векторов в декартовой системе координат для двумерных уравнений Навье–Стокса

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - (\text{Re}_\infty)^{-1} \tau_{xx} \\ \rho uv - (\text{Re}_\infty)^{-1} \tau_{xy} \\ \rho uH - \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left( u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{\text{Pr}(\gamma - 1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - (\text{Re}_\infty)^{-1} \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - (\text{Re}_\infty)^{-1} \tau_{yy} \\ \rho vH - \frac{1}{\text{Re}_\infty} \left( u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{\text{Pr}(\gamma - 1)M_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{bmatrix}$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2), \quad H = \frac{T}{(\gamma - 1)M_\infty^2} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad p = \frac{\rho T}{\gamma M_\infty^2}$$



Фиг. 1. Расчетная сетка (показана каждая 20-я линия) и схема закругления угла сжатия

$$\tau_{xx} = \mu \left( -\frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( -\frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

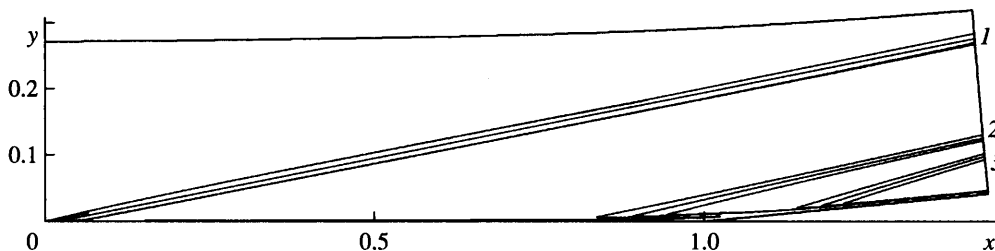
Здесь  $\rho$  – плотность;  $u$ ,  $v$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ;  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $e$  – полная энергия на единицу объема;  $H$  – удельная энтальпия;  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор напряжений с компонентами  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yy}$ . Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  вычисляется по закону Сазерленда

$$\mu = \left( \frac{T_{\mu} + 1}{T_{\mu} + T} \right) T^{\frac{3}{2}}, \quad T_{\mu} = \operatorname{const} = \frac{110 \text{ K}}{T_{\infty}^*}$$

где  $T_{\infty}^*$  – размерная температура в набегающем потоке. Система уравнений замыкается уравнением состояния для совершенного газа. Зависимые переменные отнесены к соответствующим параметрам в набегающем потоке, давление – к удвоенному скоростному напору; координаты – к характерному линейному размеру  $L^*$  – расстоянию от передней кромки пластины до точки излома (фиг. 1). Время обезразмерено на  $L^*/U_{\infty}^*$ ,  $U_{\infty}^*$  – скорость набегающего потока;  $Re_{\infty} = L^* U_{\infty}^* \rho_{\infty}^* / \mu_{\infty}^*$  – число Рейнольдса,  $M_{\infty}$  – число Маха набегающего потока,  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей совершенного газа,  $Pr$  – число Прандтля. В обсуждаемых ниже расчетах  $M_{\infty} = 5.373$ ,  $Re_{\infty} = 5.667 \cdot 10^6$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $T_{\infty}^* = 74.194 \text{ K}$ .

Задача решалась численно с помощью неявного метода конечного объема второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Использована квазимонотонная схема типа схемы Годунова (TVD). Эта схема особенно эффективна в случаях, когда расчетная область содержит ударные волны и другие сильные пространственные неоднородности течения. В [9] рассчитано нестационарное поле возмущений на плоской пластине с острой передней кромкой и показано, что данная схема может применяться для задач устойчивости сверхзвукового пограничного слоя.

В настоящей работе рассчитывалось обтекание нескольких вариантов угла сжатия с одинаковым наклоном  $\alpha = 5.5^\circ$  и различными радиусами закругления в области излома (см. схему на фиг. 1). Рассмотрены 5 дуг закругления с длинами  $L_{arc} = 0, 0.02, 0.1, 0.15$  и  $0.2$ . При этом расчетная область не изменялась за исключением малой окрестности излома (пример расчетной области и сетки показан на фиг. 1 для угла с  $L_{arc} = 0.1$ ). На нижней границе области, совпадающей с поверхностью угла, ставились условия прилипания. Стенка считалась изотермической с температурой  $T_w^* = 300 \text{ K}$  ( $T_w = 4.043$ ). На пра-



Фиг. 2. Изолинии плотности стационарного поля течения в угле без закругления. 1 – головная ударная волна, 2 – скачок от точки отрыва, 3 – скачок от точки присоединения

вой границе использовалась линейная экстраполяция зависимых переменных  $u$ ,  $v$ ,  $p$  и  $T$  (“мягкое” граничное условие). На левой и верхней границах ставились условия набегающего потока.

Вычисления проведены на криволинейной ортогональной сетке с  $2801 \times 221$  узлами (фиг. 1). Для каждой конфигурации сетка строилась с помощью численного конформного отображения [10]. У обтекаемой поверхности сетка сгущалась так, чтобы 55% узлов попадало в пограничный слой и отрывную область со слоем смешения.

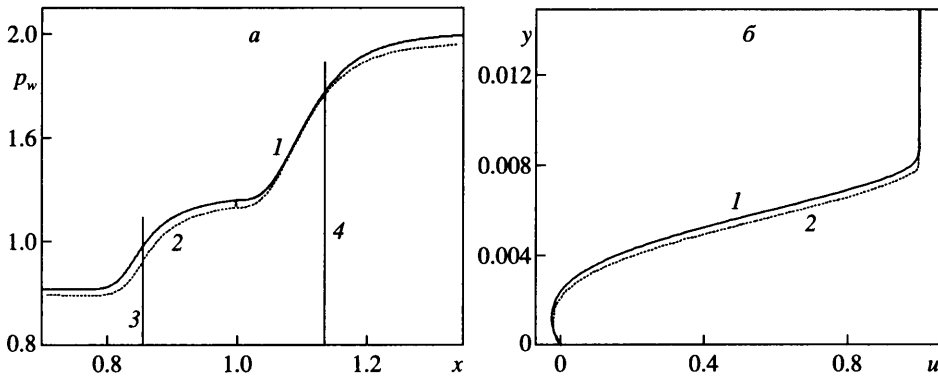
Задача решалась в два этапа. Сначала вычислялось стационарное поле течения. Затем на стенке (на небольшом расстоянии от передней кромки  $x_1 = 0.0358$ ) вводилось локальное периодическое возмущение типа вдув–отсос с помощью неоднородного граничного условия на массовый расход

$$q_w(x, t) = \frac{\rho_w^* u_w^*}{\rho_\infty^* U_\infty^*} = \varepsilon \sin\left(2\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \sin(\omega t), \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (1.1)$$

где  $x_2 = 0.0521$ ;  $\omega = \omega^* L^*/U_\infty^*$  – безразмерная частота. Для того чтобы обеспечить линейный режим развития возмущений до отрыва, амплитуда выбиралась достаточно малой:  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Следует отметить, что численная ошибка невозмущенного решения должна быть существенно меньше амплитуды нестационарных пульсаций. Это требует высокой точности вычисления стационарного поля течения. Расчет по времени нестационарной задачи выполнялся до тех пор, пока не устанавливалось периодическое поле возмущений (это происходило при  $t \approx 1.75$ ).

**2. Результаты расчетов.** Сначала было рассчитано стационарное поле сверхзвукового обтекания угла сжатия без закругления. Изолинии плотности на фиг. 2 показывают, что вязко-невязкое взаимодействие приводит к формированию ударной волны в окрестности передней кромки. Ниже по потоку угол сжатия индуцирует наклонный скачок. Его взаимодействие с пограничным слоем в окрестности угловой точки приводит к образованию рециркуляционной зоны. Верхняя граница отрывной области – почти прямая линия, что типично для сверхзвуковых течений. В окрестностях точки отрыва и точки присоединения образуются две волны сжатия. После присоединения толщина пограничного слоя меньше чем до отрыва, что согласуется с численными расчетами [5].

Стационарное поле сравнено с результатами [5], рассчитанными по численной схеме WENO пятого порядка точности дискретизации по пространству, использующей схему Рунге – Кутты третьего порядка по времени. Полученные линии тока в области отрыва хорошо совпадают с линиями тока [5]. Распределение давления по поверхности тела в области отрыва ( $0.7 < x < 1.3$ ) на фиг. 3, а показывает, что возле точки отрыва  $x = 0.857$



Фиг. 3. Распределение давления по поверхности угла без закругления (а) и профиль горизонтальной составляющей скорости по нормали к поверхности (б) при  $x = 0.93$  в зоне отрыва: 1 – расчет; 2 – [5]; 3, 4 – точки отрыва и присоединения

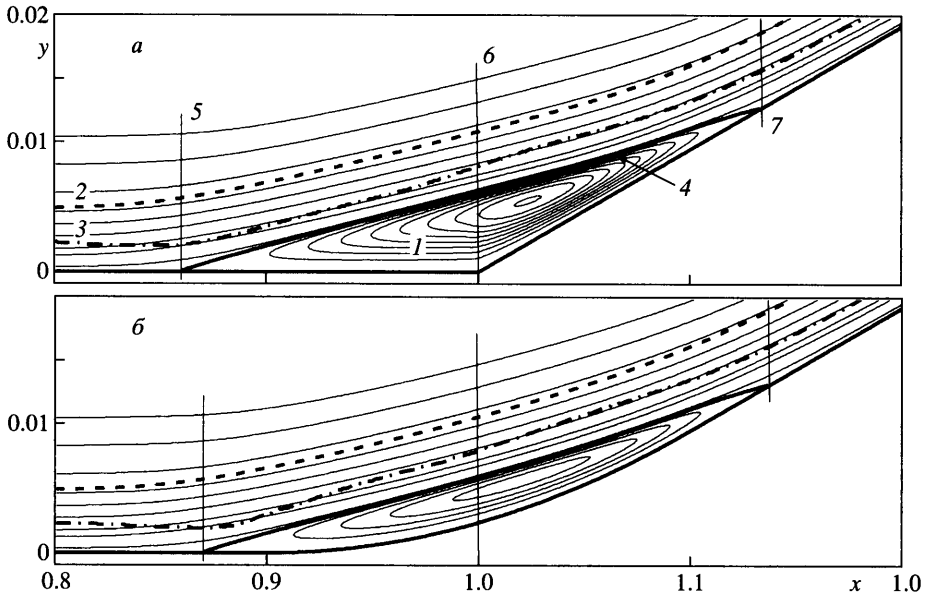
(прямая 3) давление начинает расти, в области развитого отрыва оно выходит на полку, а в окрестности точки присоединения  $x = 1.136$  (прямая 4) снова увеличивается в соответствии с асимптотической теорией [11, 12]. Сопоставление профилей 1 и 2 продольной компоненты скорости  $u(y)$  на фиг. 3, б в сечении  $x = 0.93$ , расположенном в зоне отрыва, также демонстрирует хорошее согласование данных, несмотря на существенное различие методов расчета. Здесь же виден диапазон отрицательных значений скорости  $u$  в области возвратного течения.

Линии тока стационарного поля течения на фиг. 4 позволяют оценить изменение размеров отрывной зоны в углах сжатия с разным закруглением. Координаты точек отрыва и присоединения  $x_s$  и  $x_a$  (вертикальные прямые 5 и 7) почти не зависят от радиуса кривизны угла, как и положение верхней границы (кривая 2) пограничного слоя и слоя смещения, а также нулевой линии тока (кривая 4). Таким образом, с увеличением закругления угла толщина отрывного пузыря уменьшается, он поджимается снизу, а ширина не меняется (см. таблицу). Максимум скорости возвратного течения при этом уменьшается.

В таблице  $h_{zs}$  – расстояние от стенки по биссектрисе угла до нулевой линии тока (4 на фиг. 4);  $h_{BL}$  – расстояние до границы пограничного слоя (слоя смещения в зоне отрыва), определяемой условием  $u = 0.99u_e$  (2 на фиг. 4);  $u_e$  – горизонтальная компонента скорости внешнего (для слоя) течения, в области отрыва – это скорость за ударной волной, исходящей от точки отрыва:  $u_e = 0.991U_\infty$ .

Для того чтобы выделить эффекты, обусловленные отрывной зоной, были выполнены расчеты распространения возмущений на плоской пластине с острой передней кромкой. Возмущения вводились с помощью локального периодического источника (1.1) с малой амплитудой  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Параметры набегающего потока идентичны параметрам,

$L_{arc}$	$x_s$	$x_a$	$h_{zs}$	$h_{BL}$
0	0.857	1.136	0.0045	0.0115
0.02	0.857	1.135	0.0043	0.0114
0.1	0.857	1.137	0.0036	0.0104
0.15	0.860	1.139	0.0031	0.0095
0.2	0.867	1.139	0.0024	0.0088

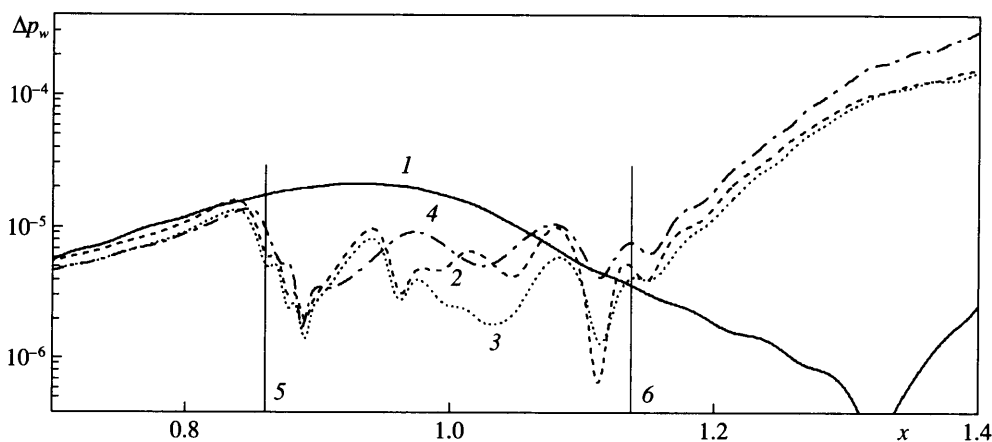


Фиг. 4. Линии тока ( $I$ ) в зоне отрыва в угле сжатия с различным закруглением:  $a$ ,  $b - L_{arc} = 0, 0.2$ ; 2 – верхняя граница пограничного слоя; 3 – звуковая линия возмущений; 4 – нулевая линия тока; 5, 7 – точки отрыва и присоединения

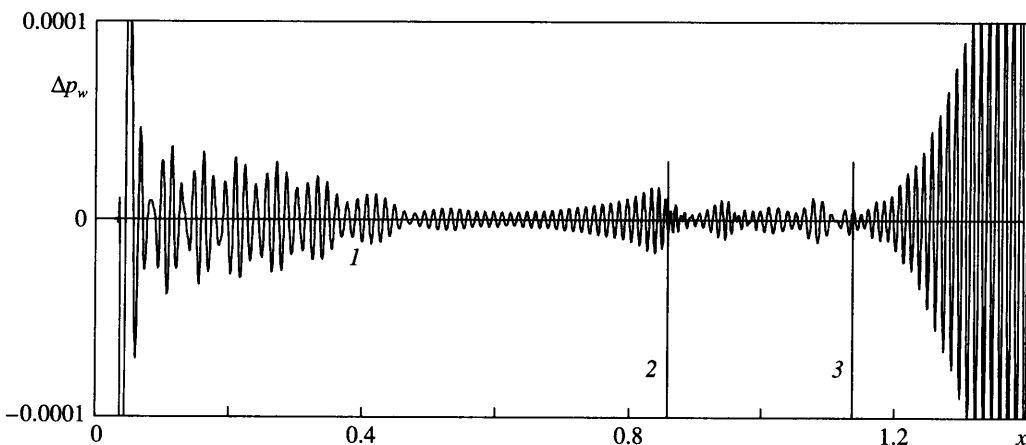
указанным в п. 1. Частота вводимых возмущений составляла  $\omega = 450$ , что соответствует частотному параметру  $F = \omega/Re_\infty = 7.94 \cdot 10^{-5}$ . Частота выбрана так, чтобы на пластине окрестность сечения  $x = 1$  (вершина угла в задаче об угле сжатия) соответствовала положению максимума амплитуды пульсаций, а рост неустойчивых возмущений начинался вверх по потоку от  $x = 0.85$  (точка отрыва пограничного слоя в задаче об угле сжатия). Огибающая возмущений давления на стенке показана на фиг. 5 (кривая 1). Здесь и далее поле возмущений получено вычитанием из мгновенного нестационарного поля начального стационарного поля. Пульсации в пограничном слое на плоской пластине при  $x > 0.6$  соответствуют возмущениям второй моды, их характерная длина волны равна примерно двум толщинам пограничного слоя.

При обтекании угла сжатия, возмущения до точки отрыва ( $x < 0.8$ ) развиваются в пограничном слое аналогично случаю пластины (фиг. 5). Ниже по потоку отрыв кардинально меняет эволюцию возмущений. В отличие от пластины, где при  $0.85 < x < 1.1$  наблюдается область максимальных пульсаций второй моды, на поверхности угла колебания резко затухают. Это говорит о том, что отрыв стабилизирует возмущения рассматриваемой частоты, несмотря на неблагоприятный градиент давления (фиг. 3,  $a$ ). После точки присоединения возмущения в пограничном слое быстро нарастают. По-видимому, это связано с тем, что толщина присоединившегося пограничного слоя меньше, чем до точки отрыва, и соответствует области неустойчивости для рассматриваемой частоты.

Развитие возмущений до точки отрыва можно объяснить в рамках линейной теории устойчивости. По распределению пульсаций давления на обтекаемой поверхности (пример см. на фиг. 6) были вычислены локальные длины волн возмущения и получены зависимости волнового числа  $\alpha(x)$  и фазовой скорости  $c(x) = \omega/\alpha(x)$  ( $I$  на фиг. 7). Локальный источник (1.1)  $0.0358 \leq x \leq 0.0521$  генерирует в основном быстрые акустические волны с фазовой скоростью  $1 + M_\infty^{-1} \approx 1.19$ . Сразу за источником ( $x > 0.1$ ) эти волны син-



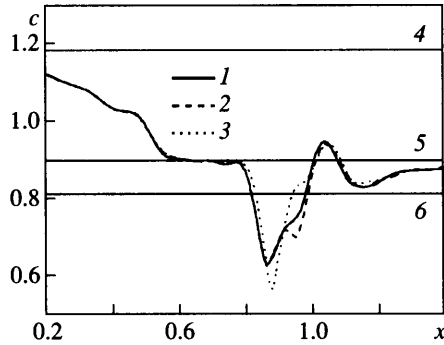
Фиг. 5. Огибающие возмущений давления на поверхности пластины и угла с различными закруглениями при  $t = 1.75$ : 1 – пластина; 2–4 –  $L_{arc} = 0$  (угол без закругления), 0.1, 0.2; 5, 6 – положение отрыва и присоединения



Фиг. 6. Возмущения давления (1) на поверхности угла без закругления при  $t = 1.75$ : 2, 3 – границы отрыва

хронизованы с быстрой модой  $F$  пограничного слоя [13]. Такая же синхронизация происходила при численном моделировании восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к акустическим возмущениям [14]. Вниз по течению ( $0.1 < x < 0.5$ ) фазовая скорость моды  $F$  уменьшается (фиг. 7), происходит рассинхронизация волн, что сопровождается падением амплитуды возмущений давления на стенке (фиг. 6). Затем мода  $F$  синхронизируется с неустойчивой медленной модой  $S$  пограничного слоя (вторая мода по терминологии Мэка [4], используемой в дальнейшем) и возбуждает последнюю через механизм межмодового обмена [15] (это происходит в окрестности точки  $x \approx 0.6$ ). Ниже по течению наблюдается экспоненциальный рост второй моды (фиг. 6), фазовая скорость которой  $c \approx 0.9$  (фиг. 7).

Поведение возмущений в зоне отрыва сильно зависит от закругления и характеризуется модуляциями амплитуды пульсаций давления (фиг. 5). Природа этих модуляций



Фиг. 7. Фазовая скорость возмущений: 1–3 –  $L_{arc} = 0$  (угол без закругления), 0,1, 0,2; 4–6 –  $c = 1 + 1/M_{\infty}$ , 0,9,  $1 - 1/M_{\infty}$ .

анализируется в следующем разделе. При подходе к точке присоединения амплитуды пульсаций существенно различны. Ниже по потоку возмущения начинают экспоненциально расти, причем их инкремент роста практически не зависит от закругления. В этой области фазовая скорость возмущений стремится к  $c \approx 0,9$ , соответствующей второй моде (см. фиг. 7 при  $x > 1,2$ ). Из-за разницы начальных амплитуд возле точки присоединения конечные амплитуды в сечении  $x \approx 1,4$  различаются примерно в 2 раза для рассчитанных закруглений угла сжатия (фиг. 5).

**3. Развитие возмущений в зоне отрыва.** Рассмотрим более детально поля возмущений давления в области отрыва ( $0,85 < x < 1,13$ ) для различных закруглений угла сжатия. В случае  $L_{arc} = 0$  (фиг. 8, а) сразу после точки отрыва на дне отрывного пузыря наблюдаются одно-ячеистые структуры. В областях  $0,91 < x < 0,96$  и  $1,07 < x < 1,1$  появляются структуры с двумя ячейками по вертикали. Примерно посередине отрывного пузыря  $0,98 < x < 1,02$  выделяется трех-ячеистая структура. Из сравнения поля пульсаций на фиг. 8, а с распределением вдоль стенки (фиг. 6) видно, что области многоячеистых структур соответствуют локальным максимумам амплитуды пульсаций давления на стенке.

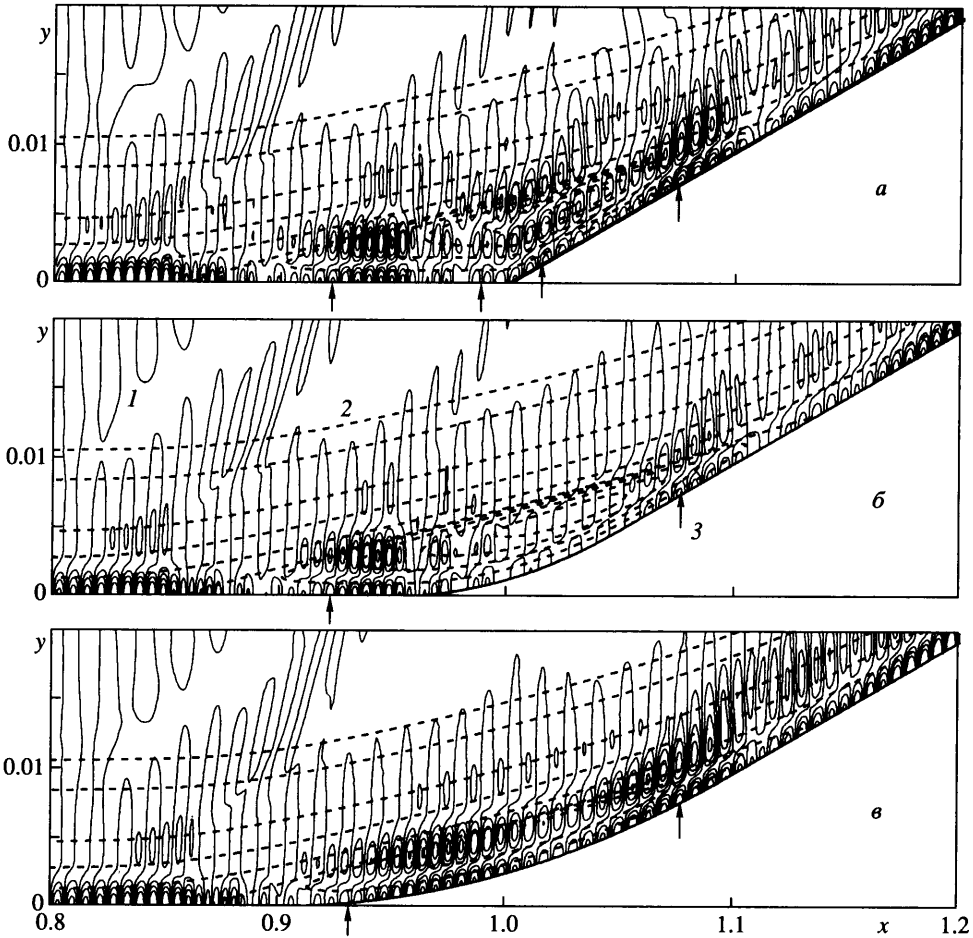
Аналогичная картина наблюдается для угла сжатия с закруглением  $L_{arc} = 0,1$  (фиг. 8, б). Однако в этом случае трехячеистая структура не выделяется, а области появления двух ячеек практически совпадают со случаем  $L_{arc} = 0$ . Для  $L_{arc} = 0,2$  (фиг. 8, в) двухячеистая структура более интенсивная, чем в предыдущем случае и отчетливо выделена из общего фона в областях  $0,94 < x < 1$  и  $1,06 < x < 1,1$ .

Такая топология возмущений ведет к предположению, что появление ячеистых структур связано с возбуждением дискретных мод акустической природы. Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом ВКБ [8], с помощью которого был ранее выполнен асимптотический анализ высокочастотных мод сверхзвукового пограничного слоя [6, 7]. Показано, что в сверхзвуковом пограничном слое формируется акустический волновод с границами – твердая стенка и кривая  $y_a(x)$ , на которой выполняется условие

$U(y_a) = c - a(y_a)$ , где  $a = \sqrt{T}/M_{\infty}$  – местная скорость звука. Данная кривая соответствует звуковой линии в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны. Возмущения давления осциллируют поперек волновода при  $0 < y < y_a$  и экспоненциально затухают во внешней области  $y > y_a$ . В приближении локально параллельного стационарного течения невязкие акустические возмущения в рассматриваемом волноводе имеют простое дисперсионное соотношение [6, 7]

$$I(x) = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad I(x) = \alpha_m \int_0^{y_a} \sqrt{q} dy, \quad q = \frac{(U - c)^2 M_{\infty}^2}{T} - 1 \quad (3.1)$$



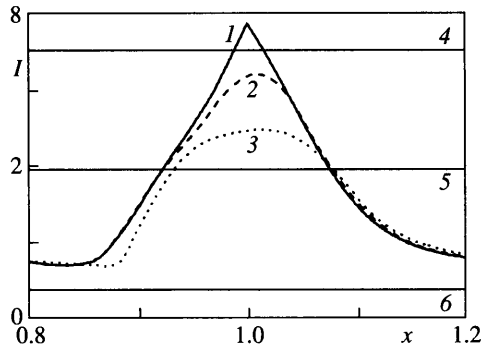


Фиг. 8. Поле возмущений давления при  $t = 1.75$  в зоне отрыва с различным закруглением:  $a$ – $в$  –  $L_{arc} = 0, 0.1, 0.2$ ; 1 – изолинии возмущений  $\Delta p = 0, \pm 2.5 \cdot 10^{-6}, \pm 5 \cdot 10^{-6}, \pm 8 \cdot 10^{-6}$ ; 2 – линии тока в невозмущенном течении; 3 – рассчитанные точки резонанса

где  $m$  – целое число, соответствующее номеру моды,  $U(y), T(y)$  – профили продольной скорости и температуры невозмущенного течения,  $\alpha = \omega/c$  – волновое число. Отметим, что (3.1) получено для коротковолновых возмущений в предположении, что характеристики волновода медленно меняются в продольном направлении.

Верхняя граница волновода  $y_a(x)$  (3 на фиг. 4) была вычислена по распределению фазовой скорости (фиг. 7) и профилям  $U(y), T(y)$  стационарного решения. Затем был рассчитан интеграл  $I(x)$ , входящий в (3.1). График  $I(x)$  и уровни  $\pi/4, \pi/4 + \pi, \pi/4 + 2\pi$ , соответствующие модам с номерами  $m = 0, 1, 2$ , показаны на фиг. 9. Отметим, что данные уровни характеризуют количество длин волн поперек волновода. Для нулевого уровня это четверть длины волны, соответствующая одной ячейке в поле пульсаций давления. Для первого уровня добавляется половина длины волны, дающая вторую ячейку, и т.д.

Вверх и вниз по потоку от области отрыва интеграл  $I(x)$  близок к уровню младшей моды (фиг. 9), которая, как показано в [6], соответствует второй моде пограничного слоя. В области отрыва график  $I(x)$  пересекает уровень  $\pi/4 + \pi$  в точке  $x \approx 0.91$  для  $L_{arc} = 0$ ,



Фиг. 9. Зависимость интеграла  $I$  от  $x$  в области отрыва: 1–3 –  $L_{arc} = 0, 0.1, 0.2$ ; 4–6 –  $I = \pi/4, \pi/4 + \pi, \pi/4 + 2\pi$

0.1 и  $x \approx 0.92$  для  $L_{arc} = 0.2$ . Эти точки, отмеченные стрелками 3 на фиг. 8, практически совпадают с появлением двухъячейстой структуры, соответствующей моде с  $m = 1$ . В случае  $L_{arc} = 0$  (фиг. 9, а) трехъячейстая структура образуется и исчезает в точках, где график  $I(x)$  пересекает уровень моды с  $m = 2$ . При  $x \approx 1.07$  интеграл вторично достигает уровня моды  $m = 1$ , и в окрестности этой точки вновь появляется структура с двумя ячейками. Для закруглений  $L_{arc} = 0.1, 0.2$  интеграл не доходит до уровня моды  $m = 2$ , и поэтому поля возмущений на фиг. 8, б и в не содержит трехъячейстой структуры.

Таким образом, области резонансного возбуждения акустических мод хорошо предсказываются с помощью асимптотической модели [7]. Номер возбуждаемой акустической моды зависит от локальной толщины зоны отрыва, которая, в свою очередь, существенно зависит от закругления угла сжатия. Так как характеристики среднего течения меняются в продольном направлении, моды возбуждаются в относительно узких окрестностях резонансных точек. Их протяженность существенно меньше продольного размера отрывного пузыря. В то же время эти области существенно больше длины волны возмущения, что необходимо для резонансной накачки волновода.

**Заключение.** Численный метод и вычислительная программа адаптированы для прямого численного моделирования развития возмущений в пристенных сверхзвуковых течениях при наличии отрывных зон. Несмотря на диссипативность использованной численной схемы, удастся моделировать возбуждение и развитие неустойчивых возмущений и отслеживать их взаимодействие с неоднородностями стационарного течения. Это особенно важно в случаях формирования волн сжатия, скачков уплотнения и других локальных неоднородностей, таких как зоны отрыва.

Расчитанное стационарное поле обтекания угла сжатия при  $M_\infty = 5.373$  хорошо согласуется с результатами численного моделирования других исследователей. Показано, что неустойчивые возмущения второй моды развиваются в предотрывном пограничном слое аналогично случаю плоской пластины. Эти возмущения стабилизируются в зоне отрыва и интенсивно растут вниз по потоку от точки присоединения.

Асимптотический анализ показал, что отрывную область можно рассматривать как волновод, в котором могут возбуждаться акустические моды дискретного спектра. Номер возбуждаемой моды зависит от локальной толщины зоны отрыва, которая, в свою очередь, зависит от закругления угла сжатия. Области возбуждения акустических мод, предсказанные асимптотической теорией, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования. Это дает возможность быстро оценивать условия резонансного возбуждения отрывного пузыря по характеристикам невозмущенного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-08-01214-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reed H.L., Kimmel R., Schneider S., Arnal D.* Drag prediction and transition in hypersonic flow // AIAA Paper. 1997. № 97-1818.
2. *Гапонов С.А., Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
3. *Maik M.R.* Boundary layer transition prediction toolkit // AIAA Paper. 1997. № 97-1904.
4. *Mack L.M.* Linear stability theory and the problem of supersonic boundary layer transition // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 3. P. 278-289.
5. *Balakumar P., Zhao H., Atkins H.* Stability of Hypersonic Boundary-Layers over a Compression Corner // AIAA Paper. 2002. № 02-2848.
6. *Гущин В.Р., Федоров А.В.* Асимптотический анализ невязких возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 1989. № 1. С. 69-75.
7. *Гущин В.Р., Федоров А.В.* Возбуждение и развитие неустойчивых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 21-29.
8. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
9. *Егоров И.В., Судаков В.Г., Федоров А.В.* Численное моделирование распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 33-44.
10. *Driscoll T.A., Vavasis S.A.* Numerical conformal mapping using cross-ratios and Delaunay triangulation // SIAM Journal. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 6. P. 1783-1803.
11. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 455 с.
12. *Adamson T.C. Jr., Messiter A.F.* Analysis of two-dimensional interactions between shock waves and boundary layers // Annu. Rev. Fluid Mech. 1980. V. 12. P. 103-138.
13. *Федоров А.В., Хохлов А.П.* Возбуждение неустойчивых мод в сверхзвуковом пограничном слое акустическими волнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 67-74.
14. *Егоров И.В., Судаков В.Г., Федоров А.В.* Численное моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к акустическим возмущениям // Изв. РАН. МЖГ. 2005. Принята к печати.
15. *Fedorov A.V., Khokhlov A.P.* Prehistory of instability in a hypersonic boundary layer // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 2001. № 14. P. 359-375.

Москва

Поступила в редакцию  
22.XII.2005