

УДК 532.5.013.4:532.529.2:534.23

© 2006 г. А. О. ИВАНЦОВ, С. В. ШКЛЯЕВ

## ВЛИЯНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ВТОРИЧНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СЛОЕ

Исследуется влияние бегущей звуковой волны на конвективное течение в горизонтальном слое, на границах которого поддерживается линейное распределение температуры. Рассмотрены конвективные валы, оси которых параллельны основному течению (продольные валы). Проведен слабонелинейный анализ; показано, что продольные валы возникают мягко, регулярные течения устойчивы вблизи порога. Проведено прямое численное моделирование; вблизи порога и при конечных надкритичностях изучены вторичные режимы течения.

Адвективные течения – течения в горизонтальном слое, вызванные продольным градиентом температуры [1], возникают во многих процессах, например при выращивании кристаллов по методу Бриджмена. С теоретической точки зрения, интерес к исследованию адвективного течения во многом обусловлен многообразием механизмов неустойчивости.

Линейная задача устойчивости адвективного течения рассматривалась многими авторами, подробный анализ работ можно найти в [2]. В частности, известно, что при больших и умеренных числах Прандтля важную роль играют монотонные трехмерные возмущения типа продольных валов (спиральная мода). Конвективные валы локализованы в пристеночных областях, где жидкость стратифицирована неустойчиво. Большое количество работ посвящено прямому численному моделированию адвективного течения, например [3] (течение в бесконечном слое) и [4, 5] (в замкнутых полостях).

Один из методов управления конвекцией – распространение в жидкости звуковой волны. Осредненные уравнения термоакустической конвекции получены в [6]. Влияние бегущей звуковой волны на устойчивость адвективного течения изучалось в работе [7]. Получен профиль комбинированного течения и изучена его устойчивость; показано, что в зависимости от параметров задачи наиболее опасны бегущие плоские возмущения, стационарные продольные валы и наклонные волны. Проведен также слабонелинейный анализ задачи. Показано, что возмущения всех типов возбуждаются мягко, определены области параметров, в которых регулярные вторичные течения устойчивы вблизи порога. В работа [8, 9] проведено численное исследование плоского течения при конечных надкритичностях. Вблизи порога устойчивости обнаружено хорошее согласие результатов слабонелинейного анализа и прямого численного моделирования, обнаружена колебательная неустойчивость вторичного течения в виде бегущих плоских валов.

Позднее при численном исследовании амплитудного уравнения, полученного в [7], было обнаружено, что для спиральной монотонной моды возможно жесткое возбуждение конвекции [10] (в [7] соответствующее условие интерпретировалось неверно). Этим фактом и вызван интерес к более подробному исследованию вторичного течения в виде продольных валов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим конвективное течение в горизонтальном слое, на границе которого поддерживается линейное распределение температуры  $T(z = \pm h) = Ax$  (ось  $z$  вертикальна, плоскость  $x - y$  расположена на середине слоя). В слое распространяется бегущая звуковая волна, поле скорости которой имеет вид

$$\mathbf{w} = a\omega\mathbf{j}\cos\omega(t - x/c) \quad (1.1)$$

Здесь  $a$  – амплитуда смещения частиц жидкости в волне,  $\omega$  – частота волны,  $c$  – скорость звука в жидкости,  $j$  – орт оси  $x$ . Длина звуковой волны предполагается сравнимой с толщиной слоя.

В данных условиях применимы осредненные уравнения термоакустической конвекции, полученные в работе [6]<sup>1</sup>. Эти уравнения, совпадающие для рассматриваемого случая с обычными уравнениями Буссинеска, приведены в [7] (в настоящей работе оставлены прежние обозначения и единицы измерения). Задача содержит три безразмерных параметра:  $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$  – число Грасгофа,  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля и  $Re = 3a^2\omega^2 h/4c\nu$  – число Рейнольдса, определенное по скорости акустического течения. Первый параметр характеризует интенсивность конвективного течения, третий – акустического воздействия.

Данная задача допускает решение, описывающее стационарное плоскопараллельное течение со следующим профилем скорости и распределением температуры:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{j} \left( \frac{Gr}{6} (z^3 - z) + \frac{Re}{2} (3z^2 - 1) \right) \quad (1.2)$$

$$T_0 = x + \frac{GrPr}{360} (3z^5 - 10z^3 + 7z) + \frac{RePr}{8} (z^4 - 2z^2 + 1) \quad (1.3)$$

Основное течение представляет собой суперпозицию двух течений: классического адвективного течения и течения с квадратичным профилем (аналог течения Пуазейля, но с движением жидкости вдоль границ и нулевым потоком). Устойчивость данного течения в линейной постановке изучена в работе [7]. В частности, показано, что в случае достаточно интенсивного звукового воздействия наиболее опасными становятся спиральные возмущения (продольные валы). Настоящая работа посвящена исследованию нелинейных конвективных течений этого типа.

**2. Слабонелинейный анализ.** Внесем малые возмущения скорости, температуры и давления к основному течению и разложим число Грасгофа, производные по горизонтальным координатам и по времени в ряды по формальному малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots \quad (2.1)$$

$$Gr = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} + \dots \quad (2.3)$$

Подставляя разложения (2.1)–(2.3) в исходную краевую задачу, получим в первом порядке линейную задачу устойчивости плоскопараллельного течения (1.2)–(1.3) относительно пространственных возмущений. Интересуясь слабонелинейным поведением стационарных возмущений в виде продольных валов, положим  $\partial/\partial x_0 = \partial/\partial t_0 = 0$  (слабонелинейный анализ в более общей постановке проведен в [7]). Решение линейной задачи запишем в виде

$$\mathbf{v}_1 = c \mathbf{V}(z) \exp(iky_0) + \text{с.с.}, \quad T_1 = c \theta(z) \exp(iky_0) + \text{с.с.} \quad (2.4)$$

$$p_1 = cq(z) \exp(iky_0) + \text{с.с.} + b \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> В указанной работе опущено несущественное в данном случае слагаемое, описывающее потенциальную энергию в звуковой волне (см. [11]).

где символом с.с. обозначены комплексно-сопряженные слагаемые,  $\mathbf{V}$ ,  $\theta$ ,  $q$  – собственные функции линейной задачи устойчивости, определяемые численно (использовался метод стрельбы с применением процедуры ортогонализации [12]). Амплитудная функция  $c = c(\xi, \eta, t_1, t_2)$  характеризует интенсивность вторичного течения;  $b(\xi, \eta, t_1, t_2)$  – медленно меняющаяся часть давления. Зависимость обеих амплитудных функций от медленных координат  $\xi, \eta$  означает возможность модуляции спиральных валов вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Учитывая следующие порядки разложения (2.1)–(2.3), получим из условий разрешимости задачи в третьем порядке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t_2} &= c_{\xi\xi} + g c_{\eta\eta} + i \delta c_{\xi\eta} + c(1 - K|c|^2 - \kappa b_{\xi} - i\chi b_{\eta}) \\ \frac{\partial |c|^2}{\partial \xi} &= b_{\xi\xi} + b_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $g$ ,  $\delta$ ,  $\kappa$ ,  $\chi$ ,  $K$  – вещественные постоянные, определяемые численно, индексами обозначены производные по соответствующим координатам. Коэффициент  $g$  положителен, т.к. разложение (2.1)–(2.3) проводится вблизи минимума нейтральной кривой  $G_0(k)$ . В уравнениях (2.6) изменены масштабные факторы для времени, координат и амплитудных функций, вследствие чего коэффициент  $K$  (постоянная Ландау) принимает значения  $\pm 1$ . Как показывают вычисления, проведенные в широком диапазоне параметров, для данной задачи постоянная Ландау положительна.

Задача (2.6) аналитически изучена в [7]. Показано, что продольные валы возникают мягко при выполнении условия:

$$1 + \kappa > 0 \quad (2.7)$$

Кроме того, в [7] исследована устойчивость регулярных вторичных течений в виде продольных валов. Показано, что вблизи минимума нейтральной кривой периодическое вторичное течение устойчиво, если

$$2\sqrt{g(1 + \kappa)} + 1 + g + \kappa g + \delta\chi > 0 \quad (2.8)$$

В [7] формула (2.7) приведена дважды: как условие мягкого возбуждения (второе из условий (2.15) в цитируемой работе) и как одно из условий устойчивости вторичного течения (формула, следующая за формулой (2.18), там же). При этом в расчетах нарушение условия (2.7) ошибочно интерпретировалось как условие неустойчивости регулярных валов, а не как условие жесткого возбуждения. Эта неправильная трактовка условия (2.7) была отмечена в [10].

Коэффициенты системы (2.6) получены в [7]. С использованием этих коэффициентов в [10] проведено численное моделирование уравнений (2.6); в частности сделан вывод о возможности жесткого возникновения неустойчивости.

Вычисления, проведенные в настоящей работе, показали, что найденные в [7] коэффициенты системы (2.6) неверны. В действительности оба условия (2.7), (2.8) справедливы во всем диапазоне параметров, где существует спиральная мода неустойчивости. Это означает, что в задаче о термоакустическом адвективном течении в слое продольные валы возникают мягко и вблизи порога устойчивы относительно модуляции.

Таким образом, в работе [7] содержатся два неверных утверждения: неправильно интерпретируется условие (2.7) (в действительности являющееся условием мягкого возбуждения) и указывается на наличие неустойчивости вторичного течения типа продольных валов вблизи точки бифуркации.

**3. Прямое численное моделирование.** Получим нелинейные уравнения, описывающие конвективные течения рассматриваемого типа. Для течения в виде продольных валов распределения температуры и давления и скорости представим в виде

$$T = x + \vartheta, \quad p = Grxz + Cx + p_1, \quad \mathbf{v} = u\mathbf{j} + \text{rot}(\psi\mathbf{j}) \quad (3.1)$$

Функции  $\vartheta$ ,  $p_1$ ,  $u$ ,  $\psi$  не зависят от координаты  $x$ . Постоянная  $C$ , равная среднему градиенту давления вдоль оси вала, определяется из условия отсутствия потока через сечение плоскостью уз. Из (3.1) видно, что в продольном вале движение жидкости представляет собой суперпозицию вращения в плоскости  $yz$  и поступательного движения вдоль оси вала.

Подставляя зависимости (3.1) в исходную краевую задачу и исключая давление, получим

$$u_t + J(u, \psi) = \Delta u - Grz + C, \quad \Omega_t + J(\Omega, \psi) = \Delta \Omega + Gr\vartheta_y \quad (3.2)$$

$$\Delta \psi = -\Omega, \quad \text{Pr}(\vartheta_t + u + J(\vartheta, \psi)) = \Delta \vartheta \quad (3.3)$$

$$z = \pm 1: \psi = 0, \quad \psi_z = 0, \quad u = \text{Re}, \quad \vartheta = 0 \quad (3.4)$$

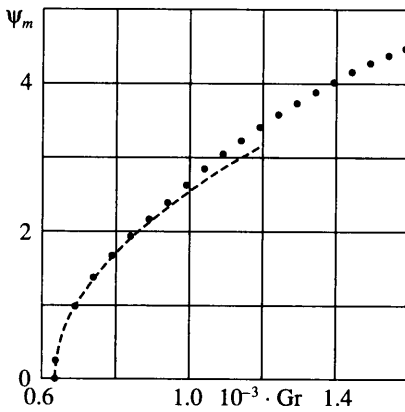
$$\Omega = \text{rot}_x v, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad J(f, g) = f_y g_z - f_z g_y$$

Рассматривая течение в виде регулярных продольных валов, поставим условия периодичности решений вдоль оси  $y$ . В качестве периода решения  $L$  в большинстве расчетов выбиралась определяемая в линейной задаче длина волны наиболее опасных возмущений  $2\pi/k$ .

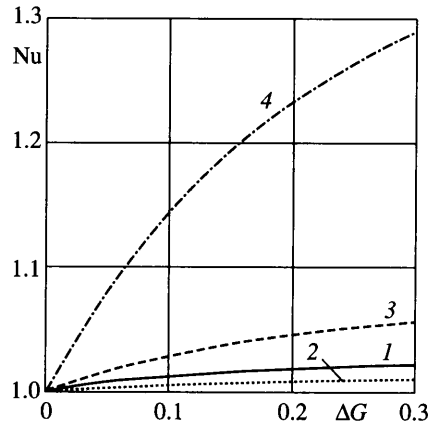
Задача (3.2)–(3.4) решалась численно методом конечных разностей. Большая часть расчетов проведена на сетке  $60 \times 60$  (тестовые расчеты, проведенные на более подробных сетках, показали хорошую сходимость результатов). Для вычисления вихря  $\Omega$  на границе использована формула Пирсона [13]. Уравнение Пуассона для завихренности решалось методом установления. Расчеты, проведенные при  $\text{Re} = 0$ , дают хорошее согласие с результатами работы [3].

На фиг. 1 представлена амплитудная кривая вторичного течения. Результаты, полученные двумя методами, неплохо согласуются друг с другом даже достаточно далеко от порога: при относительной надкритичности 1.5 различие результатов чуть более трех процентов. Подобные амплитудные кривые позволяют определить критическое число Грасгофа с помощью экстраполяции по корневому закону. Расчеты, проведенные для разных чисел Прандтля, показали хорошее согласие с результатами линейной теории; различие в критических значениях числа Грасгофа не превышает трех процентов.

Изолинии функции тока  $\psi$  качественно схожи с собственными функциями линейной задачи, обсуждавшимися в [7]. Для классического адвективного течения реализуется трехвихревой режим течения с интенсивными пристеночными вихрями [3]. При увеличении числа Рейнольдса нижний вихрь подавляется, а верхний усиливается, затем происходит перестройка к одновихревому течению с вихрем в центре области. При этом заметно уменьшаются критические значения волнового числа и числа Грасгофа. Например, для  $\text{Pr} = 1$  увеличение числа Рейнольдса до сорока приводит к уменьшению критического волнового числа почти в 2.2 раза, числа Грасгофа – почти в 15 раз по сравнению со случаем чистого адвективного течения. Соответствующим образом меняется и исследуемое течение: при  $\text{Re} = 20$  и для критического значения числа Грасгофа профиль (1.2) качественно схож с течением с профилем скорости адвективного течения. При  $\text{Re} = 40$  плоскопараллельное течение более похоже на течение с квадратичным профилем.



Фиг. 1. Зависимость максимального значения функции тока  $\Psi_m$  от числа Грасгофа  $Gr$ :  $Pr = 1$ ,  $Re = 10$ ,  $k = 3.78$ , точки – нелинейный расчет, линия – слабонелинейное приближение



Фиг. 2. Зависимость теплового потока через верхнюю границу  $Nu$  от относительной надкритичности  $\Delta G = Gr/G_0 - 1$ :  $Pr = 1$ ,  $(Re, G_0, k) = (0, 812, 4.14)$ ,  $(10, 637, 3.78)$   $(30, 109, 2.16)$ ,  $(40, 54.3, 1.89)$  – линии 1–4 соответственно

На фиг. 2 число Нуссельта  $Nu$  определялось как отношение вычисленного теплового потока к тепловому потоку в режиме плоскопараллельного течения (отметим, что последняя величина не зависит от интенсивности акустического течения). Зависимость  $Nu$  от числа Рейнольдса немонотонная: увеличение  $Re$  при фиксированной относительной надкритичности приводит к слабому уменьшению теплового потока вплоть до  $Re \approx 10$ , дальнейшее увеличение числа Рейнольдса вызывает заметный рост  $Nu$ . Уменьшение теплового потока через верхнюю границу при малых числах Рейнольдса достаточно неожиданно, так как градиент температуры вблизи верхней границы растет с увеличением  $Re$ . Вследствие указанной выше перестройки вторичного течения тепловой поток через нижнюю границу меньше, чем через верхнюю; качественные изменения чисел Нуссельта для верхней и нижней границ одинаковы.

**Заключение.** Рассмотрены нелинейные режимы типа продольных валов, возникающие вследствие неустойчивости комбинированного течения (суперпозиции акустического и адвективного течений). Проведены слабонелинейное исследование и прямое численное моделирование.

Показано, что трехмерное вторичное течение, имеющее вид продольных валов, возникает мягким образом. Акустическое воздействие не меняет механизма возникновения спиральных валов: развивается стационарная рэлеевская конвекция в неустойчиво стратифицированной жидкости. Однако вследствие вызываемого акустическим течением искажения поля температуры интенсивность конвективного течения заметно усиливается и нарушается его симметрия. С увеличением интенсивности звукового воздействия наблюдается перестройка вторичного течения из трехвихревого в одновихревое.

Слабонелинейный анализ показал, что регулярные вторичные течения указанного типа вблизи порога устойчивы относительно модуляции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств гранта PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1981.2003.1).

Авторы благодарны Д.В. Любимову, Б.Л. Смородину и Г.А. Седелникову за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
3. *Мызников В.М.* Конечноамплитудные конвективные движения жидкости в горизонтальном слое с продольным градиентом температуры // Мат. модели течений жидкости. Тр. 6-го Всесоюз. семинара по числ. методам мех. вязкой жидкости. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1978. С. 176–186.
4. *Laure P., Roux B.* Syntese des resultats obtenus par l'etude de stabilite des mouvements de convection dans une cavite horizontale de grande extension. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1987. V. 305. № 13. P. 1137–1143.
5. *Ben-Hadid H., Roux B.* Buoyancy- and thermocapillary-driven flows in differentially heated cavities for low-Prandtl-number fluids // J. Fluid Mech. 1991. V. 235. P. 1–36.
6. *Любимов Д.В.* О тепловой конвекции в акустическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 28–36.
7. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Об устойчивости адвективного термоакустического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 10–21.
8. *Lyubimov D.V., Shklyayev S.V.* Thermoacoustical convection near stability threshold of plane-parallel flow // Proc. 27th Summer School Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems. St. Petersburg, 2000. P. 195–202.
9. *Lyubimov D.V., Shklyayev S.V.* On the numerical investigations of thermoacoustic convection // Proc. of 16th IMACS World Congress (on CD). Lausanne, 2000.
10. *Седельников Г.А.* Об устойчивости спирального вторичного течения в задаче термоакустической конвекции // Матер. 10-й Всерос. студенческой конф. “Математическое моделирование в естественных науках”. Пермь, 2001. С. 38–39.
11. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шкляев С.В.* Влияние стоячей звуковой волны на возникновение крупномасштабной конвекции в горизонтальном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 2. С. 3–15.
12. *Бирих Р.В., Рудаков Р.Н., Семакин И.Г.* Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений. Ч. II. Расчет формы возмущений // Конвективные течения. Пермь: Изд-во Перм. пед. ин-та, 1979. С. 58–60.
13. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
18.IV.2005