МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 4 • 2006

УДК 533.72

© 2006 г. **И. Б. ЧЕКМАРЕВ, О. М. ЧЕКМАРЕВА**

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ОПИСЫВАЮЩАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Метод многомасштабных разложений применяется для построения равномерно пригодного асимптотического приближения к решению линеаризованного уравнения Больцмана при малых значениях числа Кнудсена. Асимптотическое разложение строится для конкретного примера диссипации в полупространстве звуковой волны, инициируемой плоским источником колебаний. Простота задачи позволяет наглядно показать появление в разложении секулярных членов, а введение многих масштабов открывает возможность их устранения.

Ключевые слова: уравнение Больцмана; метод многомасштабных разложений; малые числа Кнудсена; равномерно пригодные разложения.

Наиболее полное описание поведения разреженного газа во всей области представляющих интерес значений числа Кнудсена дает интегродифференциальное уравнение Больцмана [1, 2]. Значительный теоретический интерес здесь представляет случай малых чисел Кнудсена, когда решения кинетического уравнения Больцмана и уравнений Навье – Стокса механики сплошной среды должны, как естественно ожидать, приводить к идентичным результатам. В связи с этим проблема решения уравнения Больцмана в пределе малых чисел Кнудсена приобретает фундаментальное значение. Первый принципиальный результат в этой области принадлежит Д. Гильберту, показавшему возможность перехода от кинетического описания к описанию с использованием гидродинамических переменных. Наличие в безразмерном уравнении Больцмана малого параметра открывает широкие возможности для применения асимптотических методов. Здесь не следует забывать, что решения в форме простых степенных разложений оказываются плохими приближениями при больших интервалах изменения независимых переменных. Эти недостатки прямых разложений обычно проявляются в виде растущих секулярных членов. Как следствие, такие решения плохо описывают слабые диссипативные процессы.

Кроме того, ввиду сложности самого уравнения Больцмана большинство известных в этой области теоретических результатов основано на тех или иных упрощающих предположениях, что, в свою очередь, приводит к различного рода трудностями. В качестве примера укажем на нефизические неустойчивости в высших приближениях метода Чепмена – Энскога [3, 4].

Таким образом, существенной проблемой остается построение равномерно пригодного при больших значениях независимых переменных асимптотического приближения. Использование для достижения этой цели метода многомасштабных разложений впервые было предложено в работах [5–7]. Авторами этих работ была отмечена необходимость выявления и устранения в конструируемом разложении источников секулярного поведения, а также указано на проблему самосогласованности разложений для макроскопических переменных.

Сложность получения решения проблемы в общей постановке поддерживает интерес к исследованию простейших задач. В данном случае такой тестовой задачей является теория распространения в газе малых возмущений, когда, во-первых, можно ограничиться линеаризованным одномерным уравнением Больцмана и, во-вторых, нет необходимости в учете детальных начальных и граничных условий [8]. Здесь возможны две основные постановки [9]: временная релаксация первоначально заданного в пространстве волнового возмущения и диссипация звуковой волны, инициируемой источником колебаний с заданной частотой. Недавно было показано [10], что с помощью техники многомасштабных разложений можно построить равномерно пригодное при больших временах асимптотическое приближение для первого случая.

В настоящей работе на примере диссипации звуковой волны, распространяющейся в полупространстве от плоского источника колебаний, исследуется вторая постановка. В этом случае вместо последовательности временных масштабов вводится последовательность линейных масштабов. Это позволяет получить справедливое и на большом расстоянии от источника колебаний самосогласованное асимптотическое разложение. Процедура доведена до третьего приближения, причем устойчивость всех рассмотренных приближений очевидна из приведенной аналитической формы решения. Аналогичная задача рассмотрена с использованием уравнений Навье – Стокса. Полученные решения сравниваются.

Будем описывать эволюцию слабых возмущений в неподвижном одноатомном газе с постоянными параметрами с помощью одномерного линеаризованного уравнения Больцмана [1, 2]

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = L\varphi \tag{1}$$

$$L\varphi = \int f_0(\mathbf{c}_1)[\varphi(\mathbf{c}_1') + \varphi(\mathbf{c}') - \varphi(\mathbf{c}_1) - \varphi(\mathbf{c})]gbdbd\beta d\mathbf{c}_1$$

$$f_0(\mathbf{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\right)$$

Здесь ε – число Кнудсена, представляющее собой отношение эффективной длины свободного пробега к характерной макроскопической длине, а гидродинамические параметры возмущения определяются через функцию распределения φ соотношениями

$$n = \int f_0\varphi d\mathbf{c},\quad \upsilon = \int c_z f_0\varphi d\mathbf{c},\quad u = \int\frac{c^2}{2}f_0\varphi d\mathbf{c}$$
$$u = 3/2p,\quad p = n+T \tag{2}$$

Заметим, что в качестве масштаба для возмущенной плотности используется характерная плотность возмущения.

Асимптотическое приближение к решению уравнения (1) в предельном случае малых чисел Кнудсена будем искать в форме разложения

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots \tag{3}$$

в котором последовательность функций φ_m должна быть такой, чтобы усеченное разложение (3) было бы равномерно пригодным. Для этого необходимо, чтобы для каждого m член $\varepsilon^m\varphi_m$ был бы малой поправкой по отношению к предыдущему члену $\varepsilon^{m-1}\varphi_{m-1}$ для всех рассматриваемых z. Чтобы иметь возможность выполнить эти требования, вводится последовательность новых переменных $z_k = \varepsilon^k z$ [11, 12]. Тогда

$$\varphi_k = \varphi_k(t, z_0, \ldots, z_m),\quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + \varepsilon^m\frac{\partial}{\partial z_m} \tag{4}$$

где число m определяет область справедливости разложения (3).

Подстановка (3) и (4) в (1) приводит к цепочке уравнений вида

$$L\varphi_k = Q_k \tag{5}$$

причем в правой части собраны уже известные из предыдущих приближений неоднородные члены.

Подстановка (3) в (2) дает

$$\begin{gathered} n = \sum \varepsilon^k n_k, \quad \upsilon = \sum \varepsilon^k \upsilon_k, \quad u = \sum \varepsilon^k u_k \\ u_k = 3/2 p_k, \quad p_k = n_k + T_k \end{gathered} \tag{6}$$

$$n_k = \int f_0 \varphi_k d\mathbf{c}, \quad \upsilon_k = \int c_z f_0 \varphi_k d\mathbf{c}, \quad u_k = \int \frac{c^2}{2} f_0 \varphi_k d\mathbf{c}$$

Уравнения (5) имеют решения только при выполнении условий разрешимости

$$\int \psi_r f_0 Q_k d\mathbf{c} = 0 \tag{7}$$

где ψ_r – собственные функции соответствующего однородного уравнения. Решения уравнений (5) можно представить в виде

$$\varphi_k = g_k + h_k, \quad g_k = p_k + (c^2/2 - 5/2) T_k + c_z \upsilon_k$$

где g_k – решение соответствующего однородного уравнения, а h_k – частное решение исходного уравнения (5). При написании g_k использовались условия Гильберта [1, 2]

$$\int \psi_r f_0 h_k d\mathbf{c} = 0$$

Перейдем теперь к последовательному рассмотрению приближений. Нулевое приближение сводится к соотношению

$$\varphi_0 = p_0 + (c^2/2 - 5/2) T_0 + c_z \upsilon_0 \tag{8}$$

На следующем шаге уравнение (5) имеет вид

$$L\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + c_z \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} \tag{9}$$

Вычисляя интегралы (7), получаем условия интегрируемости для (9)

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon_0}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon_0}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{5}{3}\frac{\partial \upsilon_0}{\partial z_0} = 0 \tag{10}$$

Из первого и третьего уравнений системы (10) следуют адиабатические соотношения между параметрами нулевого приближения

$$p_0 = 5/3 n_0, \quad p_0 = 5/2 T_0$$

Из второго и третьего уравнений получаем однородные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial z_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \upsilon_0}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \upsilon_0}{\partial z_0^2} = 0, \quad a_0^2 = \frac{5}{3} \tag{11}$$

Очевидно, что система (11) описывает распространение плоской волны

$$\upsilon_0 = C_0 \exp[i(k_0 z_0 - \omega t)], \quad p_0 = a_0 \upsilon_0, \quad \omega = a_0 k_0 \tag{12}$$

где ω – заданная частота колебаний, а C_0 – функция $z_1, \ldots, z_m$.

Возвращаясь к уравнению (9) и исключая из него с помощью (10) производную по времени, получаем

$$L\varphi_1 = \left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)c_z\frac{\partial T_0}{\partial z_0}+\left(c_z^2-\frac{c^2}{3}\right)\frac{\partial v_0}{\partial z_0} \tag{13}$$

Решение (13) известно [1, 2]

$$\varphi_1 = p_1+\left(\frac{c^2}{2}-\frac{5}{2}\right)T_1+c_z v_1-A\frac{\partial T_0}{\partial z_0}-B\frac{\partial v_0}{\partial z_0} \tag{14}$$

где A и B – решения интегральных уравнений, получаемых подстановкой (14) в (13).

Полученное волновое решение в форме (12) не учитывает диссипативных эффектов и с этой точки зрения не удовлетворительно. Однако метод многомасштабных разложений позволяет его уточнение. Для этого необходимо рассмотреть второе приближение

$$L\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+c_z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_0}+c_z\frac{\partial\varphi_0}{\partial z_1} \tag{15}$$

Для (15) условия интегрируемости (7) сводятся к системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial n_1}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial z_0} = -\frac{\partial v_0}{\partial z_1}\\
&\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial z_0} = -\left(\frac{\partial p_0}{\partial z_1}-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_0^2}\right)\\
&\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{5}{3}\frac{\partial v_1}{\partial z_0} = -\left(\frac{5}{3}\frac{\partial v_0}{\partial z_1}-\frac{4}{15}\lambda\frac{\partial^2 p_0}{\partial z_0^2}\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

где μ и λ – коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности [1, 2].

Из первого и третьего уравнений системы (16) находим

$$T_1 = \frac{2}{5}p_1-\frac{4}{25}\lambda\frac{\partial v_0}{\partial z_0}$$

т.е. для параметров первого приближения условия адиабатичности уже не выполняются. Из второго и третьего уравнений в (16) для величин p_1 и v_1 следуют неоднородные волновые уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{5}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p_1}{\partial z_0^2} = 2\frac{\partial}{\partial z_0}F_1, \quad \frac{3}{5}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial z_0^2} = 2\frac{\partial}{\partial z_0}F_2\\
&F_1 = \frac{\partial p_0}{\partial z_1}-\left(\frac{2}{3}\mu+\frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_0^2}, \quad F_2 = \frac{\partial v_0}{\partial z_1}-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\mu+\frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 p_0}{\partial z_0^2}
\end{aligned} \tag{17}$$

Решение уравнений (17) можно записать в общем виде

$$p_1 = p_1^*-z_0F_1, \quad v_1 = v_1^*-z_0F_2 \tag{18}$$

где * обозначены решения соответствующих однородных уравнений. Так как частные решения в (18) растут пропорционально z_0, то при $z_0 = O(\varepsilon^{-1})$ условия регулярности типа

$\varepsilon p_1 \angle\angle p_0$ нарушаются и разложения (3), (6) тогда теряют смысл. Однако введение в (4) последовательности масштабов позволяет исключить секулярные члены. Действительно, хотя правые части уравнений (17) состоят только из членов предыдущего приближения, но содержащаяся в них величина C_0 является произвольной функцией переменных $z_1, \ldots, z_m$. Свобода выбора функции C_0 открывает возможность регуляризации разложения в рамках рассматриваемого второго приближения. Как видно из (18), для устранения секулярного поведения необходимо принять

$$\frac{\partial p_0}{\partial z_1} = \left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_0^2}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z_1} = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial^2 p_0}{\partial z_0^2} \tag{19}$$

Условия (19) позволяют определить такую зависимость C_0 от переменной z_1, которая обеспечивает регулярность первых двух членов разложения. Подставляя (12) в (19) и интегрируя полученное уравнение, находим

$$v_0 = C_1(z_2, \ldots)\exp\left[i(k_0 z_0 - \omega t) - \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\mu + \frac{2}{15}\lambda\right)k_0^2 a_0 z_1\right] \tag{20}$$

где новая функция C_1 зависит теперь уже от следующих переменных z_k.

Таким образом, второе приближение позволяет учесть эффект диссипативного затухания волны. Далее с помощью (19) нетрудно убедиться, что в правых частях второго и третьего уравнений (16) можно выделить как "плохие" комбинации членов, ответственные за секулярное поведение решения и подлежащие устранению, так и "хорошие" члены, остающиеся после устранения источников секулярности [7]. Следовательно, уравнения (16) и после исключения секулярных членов остаются неоднородными и могут иметь нетривиальные решения. Заметим, что уравнения (16) можно привести к виду (10) путем введения функции w_1

$$\begin{gathered} w_1 = p_1 - \left(\frac{2}{3}\mu - \frac{2}{15}\lambda\right)\frac{\partial v_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial z_0} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{5}{3}\frac{\partial v_1}{\partial z_0} = 0 \end{gathered} \tag{21}$$

Решение этой системы будет описывать распространение плоской волны для макроскопических переменных первого порядка

$$v_1 = D_0(z_1, \ldots z_m)\exp[i(k_0 z_0 - \omega t)], \quad w_1 = a_0 v_1 \tag{22}$$

Из (21) и (22) также следует, что и при нулевых граничных условиях для v_1 величина p_1 будет иметь отличное от нуля решение. Таким образом, в рассматриваемом случае известные условия замыкания Энскога, строго говоря, не могут быть удовлетворены.

Возвращаясь к уравнению (15), заметим, что его правая часть может быть преобразована к виду типа (13) с помощью (8), (10), (14), (16) и (19), а также приближений [1]

$$A = \frac{2}{5}\lambda\left(\frac{c^2}{2} - \frac{5}{2}\right)c_z, \quad B = \mu\left(c_z^2 - \frac{c^2}{3}\right), \quad \lambda = \frac{15}{4}\mu$$

Дальнейшее расширение области применимости для уже полученных членов разложения требует исследования следующего приближения. Поскольку получение условий разрешимости для третьего приближения не требует детального решения (15), то переходим прямо к уравнению

$$L\varphi_3 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + c_z\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_0} + c_z\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + c_z\frac{\partial \varphi_0}{\partial z_2}$$

Вычисляя интегралы (7), получаем систему

$$\frac{\partial n_2}{\partial t}+\frac{\partial \upsilon_2}{\partial z_0} = -\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z_1}-\frac{\partial \upsilon_0}{\partial z_2}$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}+\frac{\partial p_2}{\partial z_0} = -\left(\frac{\partial p_1}{\partial z_1}-\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial z_0^2}\right)-\left(\frac{\partial p_0}{\partial z_2}-\frac{12}{5}\mu^2\frac{\partial^3 p_0}{\partial z_0^3}\right)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{5}{3}\frac{\partial \upsilon_2}{\partial z_0} = -\left(\frac{5}{3}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z_1}-\mu\frac{\partial^2 p_1}{\partial z_0^2}\right)-\left(\frac{5}{3}\frac{\partial \upsilon_0}{\partial z_2}-\frac{7}{3}\mu^2\frac{\partial^3 \upsilon_0}{\partial z_0^3}\right)$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$\frac{3}{5}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p_2}{\partial z_0^2} = 2\frac{\partial}{\partial z_0}G_1,\quad \frac{3}{5}\frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial z_0^2} = 2\frac{\partial}{\partial z_0}G_2$$

$$G_1 = \left(\frac{\partial p_1}{\partial z_1}-\frac{7}{6}\mu\frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial z_0^2}\right)+\left(\frac{\partial p_0}{\partial z_2}-\frac{241}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_0}{\partial z_0^3}\right) \tag{23}$$

$$G_2 = \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z_1}-\frac{7}{10}\mu\frac{\partial^2 p_1}{\partial z_0^2}\right)+\left(\frac{\partial \upsilon_0}{\partial z_2}-\frac{213}{120}\mu^2\frac{\partial^3 \upsilon_0}{\partial z_0^3}\right)$$

Решение уравнений (23) представим в виде

$$p_2 = p_2^*-z_0G_1,\quad \upsilon_2 = \upsilon_2^*-z_0G_2$$

Отсюда видно, что условия регулярности $\varepsilon p_2 \ll p_1$ и $\varepsilon\upsilon_2 \ll \upsilon_1$ при $z_0 = O(\varepsilon^{-1})$ не будут выполняться, если только не потребовать, чтобы

$$G_1 = 0,\quad G_2 = 0.$$

Исключая из этих соотношений попеременно величины p_1 и υ_1, получаем

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z_1^2}-\frac{49}{60}\mu^2\frac{\partial^4 p_1}{\partial z_0^4} = -2\frac{\partial}{\partial z_1}Hp_0$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial z_1^2}-\frac{49}{60}\mu^2\frac{\partial^4 \upsilon_1}{\partial z_0^4} = -2\frac{\partial}{\partial z_1}H\upsilon_0 \tag{24}$$

$$H = \frac{\partial}{\partial z_2}-\frac{227}{120}\mu^2\frac{\partial^3}{\partial z_0^3}$$

Неоднородные члены в правой части (24) – причина секулярного поведения, поскольку они дают частные решения вида

$$p_1 = -z_1Hp_0,\quad \upsilon_1 = -z_1H\upsilon_0$$

Следовательно, теперь уже при $z_1 = O(\varepsilon^{-1})$, т.е. при $z_0 = O(\varepsilon^{-2})$, не будут выполняться условия $\varepsilon p_1 \ll p_0$ и $\varepsilon\upsilon_1 \ll \upsilon_0$. Поэтому чтобы первые члены разложений (6) оставались при любых z вплоть до значений $O(\varepsilon^{-2})$ малыми поправками по отношению к нулевым членам, необходимо устранить источники их неравномерности, потребовав

$$\frac{\partial p_0}{\partial z_2}-\frac{227}{120}\mu^2\frac{\partial^3 p_0}{\partial z_0^3} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z_2}-\frac{227}{120}\mu^2\frac{\partial^3 v_0}{\partial z_0^3} = 0 \tag{25}$$

Из уравнений (25) находим зависимость величины C_1 от переменной z_2. В итоге для скорости получаем

$$\begin{aligned} v_0 &= C_2(z_3, \ldots)\exp\left[i(kz_0-\omega t)-\frac{7}{10}\mu k_0^2 a_0 z_1\right] \\ k &= \left(1-\frac{227}{120}\mu^2 k_0^2\varepsilon^2\right)k_0 \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда для фазовой скорости имеем

$$a = \frac{\omega}{k} = \left(1+\frac{227}{120}\mu^2 k_0^2\varepsilon^2\right)a_0$$

Сравнение полученного выражения для фазовой скорости с результатами [10] показывает, что поправка к скорости для рассмотренной здесь постановки задачи на порядок больше. Можно также уточнить решение и для макроскопических параметров первого порядка. Действительно, соотношения (24) с учетом (25) определяют зависимость величины D_0 от переменной z_1.

Если исходить из фундаментальной роли уравнения Больцмана, то приведенное выше самосогласованное равномерно пригодное асимптотическое разложение можно рассматривать как эталон при оценке используемых в предельном случае малых чисел Кнудсена приближений. Поскольку в указанной области для описания поведения газа обычно применяется газодинамическое приближение, то интересно получить решение для звуковой волны с использованием феноменологических уравнений Навье – Стокса. В линейном одномерном приближении последние имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{4}{3}\varepsilon\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{5}{2}\frac{\partial v}{\partial z} = \varepsilon\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad u = \frac{3}{2}p, \quad p = n+T \end{aligned} \tag{27}$$

Решение системы (27) снова ищем в виде (4) и (6). Опуская аналогичные промежуточные результаты, отметим, что для параметров нулевого приближения также приходим к системе невязких уравнений (10). В следующем приближении получаем систему, идентичную системе (16). Поэтому из условий ограниченности решения следует такой же декремент затухания волны, как и в (20). Отличия появляются только на третьем шаге. В результате для скорости находим формулу аналогичную (26), но с другим волновым числом и с другой фазовой скоростью

$$a = \left(1+\frac{141}{120}\mu^2 k_0^2\varepsilon^2\right)a_0$$

Таким образом, асимптотики для линеаризованных уравнений Больцмана и системы Навье – Стокса полностью идентичны до членов $O(\varepsilon)$. Возникающие на уровне Барнетта расхождения естественны, так как в основе теории Навье – Стокса лежат линейные приближения для тензора напряжений и теплового потока.

Заключение. Представлено построение равномерно пригодной в полупространстве асимптотики для линеаризованного уравнения Больцмана с помощью техники многих масштабов. Показано, что для достижения этой цели необходим анализ каждого рассматриваемого приближения на предмет выявления и устранения в нем секулярных членов. На примере второго приближения продемонстрировано, что в неоднородных частях дифференциальных уравнений для макроскопических переменных можно выделить "хорошую" часть и "плохую" секулярную часть, подлежащую устранению. Поскольку после устранения секулярных комбинаций дифференциальные уравнения сохраняют "хорошие" неоднородности, то они имеют нетривиальные решения. Следовательно, в рассматриваемом случае условия замыкания Энскога не могут быть удовлетворены. Наконец, исследование третьего приближения показывает, что метод многомасштабных разложений позволяет получить устойчивое решение на уровне Барнетта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Cercignani C.* Theory and Application of the Boltzmann Equation. London: Scottish Acad. Press, 1975. – *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. *Karlin I.V., Gorban A.N.* Hydrodynamics from Grad's equations: what can we learn from exact solutions? // Ann. Phys. (Leipzig) 2002. Bd. 11. H. 10–11. S. 783–833.
4. *Struchtrup H.* Macroscopic transport equations for rarefied gas flows. Berlin: Springer, 2005. P. 258.
5. *McCune J.E., Morse T.F., Sandri G.* On the relaxation of gases toward continuum flow // Proc. 3rd Intern. Sym. On Rarefied Gas Dynamics. N. Y.: Acad. Press, 1963. V. 1. P. 115–135. – *Мак-Кьюн Дж., Морзе Т., Сэндри Г.* О релаксации газов к состоянию непрерывного течения // Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. С. 226–245.
6. *Morse T.F.* Secular behavior in an Analysis of damped standing waves in a gas // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 10. P. 1691–1695.
7. *Klimas A., Ramnath R.V., Sandri G.* On the compatibility Problem for the Uniformization of Asymptotic Expansions // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 32. № 3. P. 482–504.
8. *Галкин В.С., Носик В.И.* О модификации уравнений Барнетта на примере задачи о распространении звука // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 126–133.
9. *Foch J., Ford G.W.* The dispersion of sound in monatomic gases // Studies in Statistical Mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1970. V. 5. P. 101–231.
10. *Чекмарев И.Б., Чекмарева О.М.* Метод многомасштабных разложений в проблеме Гильберта // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 158–164.
11. *Nayfeh A.* Perturbation Methods. N. Y. etc.: Wiley, 1973. – *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
12. *Kevorkian J., Cole J.D.* Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. N. Y.: Springer, 1996. 632 p.

Аахен

Поступила в редакцию
24.VIII.2005