

УДК 532.59 + 532.582.31

© 2006 г. И. В. СТУРОВА

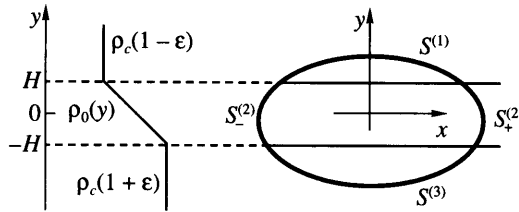
КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО СЛОЙ ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В линейной постановке с использованием приближения Буссинеска рассмотрена плоская задача об установившихся малых колебаниях горизонтального цилиндра при его произвольном расположении в трехслойной жидкости, верхний и нижний слои которой являются однородными, а средний слой – линейно стратифицированным. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. В режиме генерации внутренних волн использован метод распределенных массовых источников по контуру тела, а в неволновом режиме выведено интегральное уравнение для давления в жидкости. Выполнены расчеты гидродинамической нагрузки, действующей на тело, в зависимости от частоты колебания цилиндра и его положения. Проведено сопоставление с экспериментальными данными.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, линейная теория волн, колебания цилиндра, гидродинамическая нагрузка.

Плоская задача о колебаниях горизонтального цилиндра в стратифицированной жидкости теоретически исследована в настоящее время для некоторых типов распределения плотности по глубине. Безграничная однородно стратифицированная жидкость рассмотрена в [1, 2]. В [1] определены характеристики внутренних волн, возникающих при малых колебаниях эллиптического цилиндра, а также получено аналитическое решение для гидродинамической нагрузки, действующей на тело. Соотношения аффинного подобия для гидродинамической нагрузки теоретически получены и экспериментально подтверждены в [2]. Эти соотношения позволили определить значение нагрузки для тела произвольной геометрии, исходя из известных решений для коэффициента присоединенной массы тел, колеблющихся в безграничной однородной по плотности жидкости. Трехслойная жидкость, в которой верхний и нижний слои являются однородными, а средний слой – линейно стратифицированным, рассмотрена в [3, 4]. Предполагалось, что колеблющееся тело полностью помещено в одном из слоев. Трехслойная жидкость интересна не только тем, что она является моделью пикноклина в океане, но также и тем, что включает в себя как частные случаи глубокую однородно стратифицированную жидкость и двухслойную жидкость. Первый случай имеет место при возрастании толщины среднего слоя и сохранении значения градиента плотности, а второй – при стремлении к нулю толщины среднего слоя и сохранении перепада плотности между однородными слоями.

Движение тела в двухслойной жидкости наиболее изучено. Имеется большое количество работ, посвященных исследованиям волнового движения при колебаниях плавающего или погруженного тела, полностью помещенного в один из слоев. В последние годы появились работы о колебаниях тела, пересекающего границу раздела двухслойной жидкости [5–8]. В [7] представлены также экспериментальные результаты о генерации поверхностных и внутренних волн вертикально колеблющимся плавающим цилиндром. Показано, что теоретические решения для амплитуд волн в дальнем поле и значений гидродинамической нагрузки хорошо согласуются с экспериментальными данными.



Фиг. 1. Схема течения

В данной работе предложен метод численного решения задачи о колебаниях горизонтального цилиндра, погруженного в трехслойную жидкость, при его произвольном расположении относительно линейно стратифицированного слоя.

1. Постановка задачи. Рассматривается идеальная несжимаемая трехслойная жидкость. Для простоты толщины верхнего и нижнего слоев полагаются бесконечными. Волновые движения вызваны в первоначально покоящейся жидкости малыми колебаниями цилиндра с частотой ω и амплитудами η_j ($j = 1, 2, 3$) соответственно для горизонтальных, вертикальных и вращательных осцилляций.

В отсутствие тела верхний слой жидкости плотности ρ_1 занимает область $|x| < \infty$, $y > H$, а нижний слой плотности $\rho_2 > \rho_1$ – область $|x| < \infty$, $y < -H$, где x – горизонтальная, а y – вертикальная координаты (фиг. 1). Между ними расположен средний слой, занимающий область $|x| < \infty$, $|y| < H$. Плотность жидкости $\rho_0(y)$ в среднем слое линейно возрастает с глубиной: $\rho_0(y) = \rho_c(1 - \epsilon y/H)$, где $\epsilon > 0$, $\rho_c = \rho_0(0)$. Предполагается, что плотность жидкости непрерывна на границах слоев, следовательно, $\rho_1 = \rho_c(1 - \epsilon)$ и $\rho_2 = \rho_c(1 + \epsilon)$. Перепад плотности между верхним и нижним слоями составляет $2\epsilon\rho_c$.

Считая возмущенное движение жидкости периодическим по времени, давление в жидкости запишем в виде

$$P^{(s)}(x, y, t) = \rho_c \operatorname{Re} \left[\exp(i\omega t) \sum_{j=1}^3 \eta_j p_j^{(s)}(x, y) \right] .$$

где верхний индекс $s = 1, 2, 3$ соответствует верхнему, среднему и нижнему слоям, t – время.

В однородных по плотности слоях функции $p_j^{(1)}(x, y)$ и $p_j^{(3)}(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta p_j^{(1)} = 0 \quad (y > H), \quad \Delta p_j^{(3)} = 0 \quad (y < -H) \quad (1.1)$$

В среднем слое функция $p_j^{(2)}(x, y)$ в приближении Буссинеска удовлетворяет уравнению

$$\Delta p_j^{(2)} = \frac{N^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 p_j^{(2)}}{\partial x^2} \quad (|y| < H), \quad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_c} \frac{d\rho_0}{dy}} = \sqrt{\frac{\epsilon g}{H}} \quad (1.2)$$

где g – ускорение силы тяжести.

Согласно линейной теории волн, на границах раздела слоев ставятся условия согласования

$$p_j^{(l)} = p_j^{(l+1)}, \quad \beta^2 \frac{\partial p_j^{(l)}}{\partial y} = -\frac{\partial p_j^{(l+1)}}{\partial y}, \quad \beta^2 = \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \quad (1.3)$$

$$y = H, \quad l = 1; \quad y = -H, \quad l = 3$$

В дальнейшем поле следует потребовать выполнения условия излучения, которое означает, что генерируемые волны являются расходящимися, а также

$$\nabla p_j^{(1)} \rightarrow 0 \quad y \rightarrow \infty, \quad \nabla p_j^{(3)} \rightarrow 0 \quad y \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

На замкнутом гладком контуре погруженного тела $S = S^{(1)} \cup S^{(2)} \cup S^{(3)}$, где $S^{(2)} = S_+^{(2)} \cup S_-^{(2)}$, ставится условие непротекания

$$\frac{\partial p_j^{(l)}}{\partial n} = \omega^2 n_j \quad (x, y \in S^{(l)}) \quad (l = 1, 3) \quad (1.5)$$

$$n_1 \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial x} - \frac{n_2}{\beta^2} \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial y} = \omega^2 n_j \quad (x, y \in S^{(2)})$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – внутренняя нормаль к контуру S и для удобства введены обозначения $n_1 = n_x, n_2 = n_y, n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2$, где x_0, y_0 – координаты точки, относительно которой совершаются вращательные колебания.

Гидродинамическая нагрузка, действующая на колеблющийся цилиндр, определяется силой $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и моментом F_3 , которые без учета гидростатической составляющей имеют вид

$$F_k = \sum_{j=1}^3 \eta_j \tau_{kj}, \quad \tau_{kj} = \rho_c \sum_{l=1}^3 \int_{S^{(l)}} p_j^{(l)} n_k ds = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

где μ_{kj} и λ_{kj} – коэффициенты присоединенных масс и демпфирования соответственно.

Поведение решения задачи (1.1)–(1.5) существенно зависит от частоты колебания тела. При $\omega < N$ ($\beta^2 > 0$) уравнение (1.2) является гиперболическим и колебания тела генерируют в жидкости внутренние волны. При $\omega > N$ ($\beta^2 < 0$) уравнение (1.2) становится эллиптическим, волновые движения отсутствуют и гидродинамическая нагрузка определяется только коэффициентами присоединенной массы. Далее рассмотрим эти случаи отдельно.

2. Случай $\omega < N$. Для решения задачи (1.1)–(1.5) введем неизвестное распределение массовых источников по контуру S , обозначив его $\sigma_j^{(s)}(z)$ на соответствующем участке $S^{(s)}$. Тогда давление в любой точке жидкости можно представить в виде

$$p_j^{(s)}(z) = \sum_{l=1}^3 \int_{S^{(l)}} \sigma_j^{(l)}(\zeta) G^{(s,l)}(z, \zeta) ds \quad (2.1)$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

Здесь $G^{(s,l)}(z, \zeta)$ – функция Грина рассматриваемой задачи, $s = 1, 2, 3$ – номер слоя, содержащего точку наблюдения z , а источник ζ помещен в слой с номером l . Функция Грина определяет поле давления в жидкости, вызванное пульсирующим массовым источником единичной интенсивности.

При расположении источника в верхнем слое следует решить следующую систему уравнений:

$$\Delta G^{(1,1)} = 2\pi \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (y > H) \quad (2.2)$$

$$\Delta G^{(2,1)} = \frac{N^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 G^{(2,1)}}{\partial x^2} \quad (|y| < H); \quad \Delta G^{(3,1)} = 0 \quad (y < -H) \quad (2.3)$$

с граничными условиями, аналогичными (1.3), и условием излучения в дальнем поле. В (2.2) δ – дельта-функция Дирака.

Используя интегральные преобразования Фурье, из решения системы (2.2)–(2.3) получим следующие представления для функции Грина:

$$G^{(1,1)} = \ln|z - \zeta| + \text{pv} \int_0^{\infty} \frac{B_{11}(k, y, \eta)}{T(k)} dk - i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{11}(k_n, y, \eta)}{T(k_n)}$$

$$G^{(2,1)} = \text{pv} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-k}}{k} + \frac{B_{21}(k, y, \eta)}{T(k)} \right] dk - i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{21}(k_n, y, \eta)}{T(k_n)}$$

$$G^{(3,1)} = \text{pv} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-k}}{k} - \frac{B_{31}(k, y, \eta)}{T(k)} \right] dk + i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{31}(k_n, y, \eta)}{T(k_n)}$$

$$B_{11} = \frac{N^2}{\omega^2 k} \sin(2k\beta H) \exp k(2H - y - \eta) \cos k(x - \xi)$$

$$B_{21} = \frac{2\beta}{k} \exp k(H - \eta) \cos k(x - \xi) [\beta \sin k\beta(y + H) - \cos k\beta(y + H)]$$

$$B_{31} = \frac{2\beta}{k} \exp k(2H + y - \eta) \cos k(x - \xi)$$

$$T(k) = 2\beta \cos 2k\beta H + (1 - \beta^2) \sin 2k\beta H$$

$$T(k_n) \equiv \left. \frac{dT}{dk} \right|_{k=k_n} = 2(-1)^n H\beta N^2 / \omega^2$$

Здесь символы pv показывают, что интегралы вычисляются в смысле главного значения, так как подынтегральные выражения имеют полюса для тех значений k , при которых $T(k) = 0$. Это уравнение имеет счетное число простых корней $k_n (n = 1, 2, \dots)$, которые можно представить в виде

$$k_n = \frac{1}{2\beta H} \left[\pi(n - m) - \arctg \frac{2\beta}{1 - \beta^2} \right]$$

$$m = 0 (N/\omega < \sqrt{2}); \quad m = 1 (N/\omega > \sqrt{2}).$$

При расположении источника в среднем слое функцию Грина можно записать в виде бесконечной суммы аналогично [4]

$$G^{(1,2)} = \frac{i\pi\omega^2}{N^2 H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} e^{k_n(H-y)} K(k_n, \eta) \exp(-ik_n|x - \xi|)$$

$$G^{(2,2)} = \frac{i\pi\omega^2}{N^2 H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} K(k_n, y) K(k_n, \eta) \exp(-ik_n|x - \xi|)$$

$$G^{(3,2)} = \frac{i\pi\omega^2}{N^2 H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n} e^{k_n(y+H)} K(k_n, \eta) \exp(-ik_n|x-\xi|)$$

$$K(k, \chi) = \cos[k\beta(\chi - H)] + \beta \sin[k\beta(\chi - H)]$$

При расположении источника в нижнем слое в силу симметрии задачи имеем

$$G^{(1,3)}(z, \zeta) = G^{(3,1)}(z_*, \zeta_*), \quad G^{(2,3)}(z, \zeta) = G^{(2,1)}(z_*, \zeta_*)$$

$$G^{(3,3)}(z, \zeta) = G^{(1,1)}(z_*, \zeta_*) \tag{2.4}$$

где звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Используя условия непротекания на поверхности тела S (1.5), получим систему интегральных уравнений для определения функций $\sigma^{(s)}(z)$

$$\pi\sigma_j^{(s)}(z) = \sum_{l=1}^3 \int_{S^{(l)}} \sigma_j^{(l)}(\zeta) \frac{\partial G^{(s,l)}}{\partial n} ds + \omega^2 n_j, \quad (s = 1, 3) \tag{2.5}$$

$$\pi\sigma_j^{(2)}(z) = \sum_{l=1}^3 \int_{S^{(l)}} \sigma_j^{(l)}(\zeta) \left[n_x \frac{\partial G^{(s,l)}}{\partial x} - \frac{n_y}{\beta^2} \frac{\partial G^{(s,l)}}{\partial y} \right] ds + \omega^2 n_j \tag{2.6}$$

После вычисления распределения особенностей $\sigma_j^{(s)}(z)$ можно определить давление (2.1) и гидродинамическую нагрузку (1.6).

3. Случай $\omega > N$. В этом случае также можно использовать метод распределенных особенностей, но для рассматриваемой стратификации удобнее решать систему интегральных уравнений для давления.

Запишем уравнение (1.2) для среднего слоя в виде

$$\frac{\partial^2 p_j^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 p_j^{(2)}}{\partial y^2} = 0 \quad (|y| < H), \quad \gamma^2 = -\beta^2 = 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \tag{3.1}$$

Если ввести преобразование вертикальной координаты в среднем слое $\bar{y} = \gamma y$, уравнение (3.1) в системе координат x, \bar{y} сведется к уравнению Лапласа, а граничное условие (1.5) на $S^{(2)}$ – к значению нормальной производной на деформируемом контуре с точностью до множителя, зависящего от геометрии тела. Это обстоятельство позволило использовать аффинное подобие при определении гидродинамической нагрузки, которая действует на произвольный контур, колеблющийся в безграничной однородно стратифицированной жидкости [2].

Используя тождество Грина, условия согласования (1.3), а также условия в дальнем поле, получим систему трех интегральных уравнений, которая для точек, расположенных на контуре тела S , имеет вид

$$p_j^{(m)}(\zeta) = \frac{\alpha_m}{\pi} \left\{ \sum_{l=1,3} \int_{S^{(l)}} \left[p_j^{(l)}(z) \frac{\partial G^{(l,m)}}{\partial n_z} - G^{(l,m)}(z, \zeta) \frac{\partial p_j^{(l)}}{\partial n_z} \right] ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\gamma} \int_{\bar{S}^{(2)}} \left[p_j^{(2)}(\bar{z}) \frac{\partial \bar{G}^{(2,m)}}{\partial \bar{n}_{\bar{z}}} - \bar{G}^{(2,m)}(\bar{z}, \bar{\zeta}) \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial \bar{n}_{\bar{z}}} \right] d\bar{s} \right\} \quad (m = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = \gamma$$

Здесь чертой сверху отмечены значения, которые рассматриваются в деформируемых координатах

$$\bar{z} = x + i\bar{y}, \quad \bar{\zeta} = \xi + i\bar{\eta}, \quad \bar{\eta} = \gamma\eta$$

При расположении источника в верхнем слое для определения функции Грина следует решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta G^{(1,1)} &= 2\pi\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \quad (y > H) \\ \bar{\Delta}\bar{G}^{(2,1)} &= 0, \quad (|\bar{y}| < \bar{H}), \quad \bar{\Delta} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}, \quad \bar{H} = \gamma H \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Delta G^{(3,1)} = 0 \quad (y < -H)$$

$$\begin{aligned} G^{(1,1)} &= \bar{G}^{(2,1)}, \quad \frac{\partial G^{(1,1)}}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{G}^{(2,1)}}{\partial \bar{y}} \quad (y = H) \\ G^{(3,1)} &= \bar{G}^{(2,1)}, \quad \frac{\partial G^{(3,1)}}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{G}^{(2,1)}}{\partial \bar{y}} \quad (y = -H) \end{aligned} \quad (3.4)$$

с условиями убывания при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Решение задачи (3.3)–(3.4) имеет вид

$$G^{(1,1)} = \ln|z - \zeta| + (1 - \gamma^2) \int_0^\infty \frac{\cos k(x - \xi)}{Q(k)} \exp[k(2H - y - \eta)] (1 - e^{-4k\gamma H}) dk$$

$$\bar{G}^{(2,1)} = \int_0^\infty \left\{ e^{-k} - \frac{2\gamma \cos k(x - \xi)}{Q(k)} e^{k(H - \eta)} \times \right.$$

$$\left. \times [(1 + \gamma)e^{k(\bar{y} - \bar{H})} + (1 - \gamma)e^{-k(\bar{y} + 3\bar{H})}] \right\} \frac{dk}{k}$$

$$G^{(3,1)} = \int_0^\infty \left\{ e^{-k} - \frac{4\gamma \cos k(x - \xi)}{Q(k)} \exp[k(2H(1 - \gamma) + y - \eta)] \right\} \frac{dk}{k}$$

$$Q(k) = (1 + \gamma)^2 - (1 - \gamma)^2 \exp(-4k\gamma H)$$

При расположении источника в среднем слое функция Грина определяется из системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta G^{(1,2)} &= 0 \quad (y > H) \\ \bar{\Delta}\bar{G}^{(2,2)} &= 2\pi\delta(x - \xi)\delta(\bar{y} - \bar{\eta}) \quad (|\bar{y}| < \bar{H}) \\ \Delta G^{(3,2)} &= 0 \quad (y < -H) \end{aligned} \quad (3.5)$$

с граничными условиями, аналогичными выше рассмотренному случаю.

Решение системы уравнений (3.5) имеет вид

$$G^{(1,2)} = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-k}}{\gamma} - \frac{2 \cos k(x - \xi)}{Q(k)} \exp[k(H(1 - \gamma) - y)] \right\} \times$$

$$\times [(1 - \gamma)e^{-\gamma k(2H + \eta)} + (1 + \gamma)e^{\gamma k \eta}] \frac{dk}{k}$$

$$\bar{G}^{(2,2)} = \ln|\bar{z} - \bar{\zeta}| - 2(1 - \gamma) \int_0^{\infty} \frac{\cos k(x - \xi)}{kQ(k)} e^{-2k\bar{H}} \times$$

$$\times [(1 + \gamma) \operatorname{ch} k(\bar{y} + \bar{\eta}) + (1 - \gamma)e^{-2k\bar{H}} \operatorname{ch} k(\bar{y} - \bar{\eta})] dk$$

$$G^{(3,2)}(z, \zeta) = G^{(1,2)}(z_*, \zeta_*)$$

При расположении источника в нижнем слое выполняются соотношения, аналогичные (2.4).

В результате решения системы интегральных уравнений (3.2) определяется распределение давления по контуру тела, а затем – соответствующая гидродинамическая нагрузка.

4. Численные результаты. Для решения систем интегральных уравнений (2.5), (2.6) и (3.2) составляющие контура S разбиваются на элементы: участок $S^{(1)}$ – на $N1$ элементов, каждый из участков $S_+^{(2)}$ и $S_-^{(2)}$ – на $N2$ элементов, участок $S^{(3)}$ – на $N3$ элементов. Внутри каждого элемента вводится дополнительная средняя точка, и распределение искомой величины на каждом элементе аппроксимируется квадратичной функцией относительно дуговой координаты. В итоге для каждого значения $j = 1, 2, 3$ следует решить систему линейных уравнений порядка $2(N1 + 2N2 + N3)$ для определения значений $\sigma_j^{(s)}$ или $p_j^{(s)}$ во всех узловых точках контура, причем от номера j зависит только правая часть этой системы.

Далее будут представлены численные расчеты для кругового цилиндра радиуса a , сечение которого задается уравнением $x^2 + (y - h)^2 = a^2$, где h – вертикальная координата центра цилиндра. В этом случае ненулевые значения имеют только компоненты гидродинамической нагрузки τ_{11} и τ_{22} в (1.6).

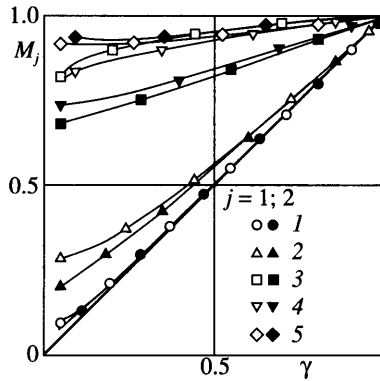
Решение [1] для гидродинамической нагрузки, действующей на круговой цилиндр при его колебаниях в безграничной однородно стратифицированной жидкости, имеет вид

$$\mu_{11} = \mu_{22} = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = \pi \rho_c a^2 \sqrt{N^2 - \omega^2} \quad (\omega < N) \quad (4.1)$$

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \pi \rho_c a^2 \sqrt{\omega^2 - N^2} / \omega, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = 0 \quad (\omega > N) \quad (4.2)$$

Значения гидродинамической нагрузки при горизонтальных и вертикальных колебаниях кругового цилиндра совпадают также и в том случае, когда цилиндр расположен в бесконечно глубоком и однородном по плотности слое жидкости [3]. Во всех других случаях значения гидродинамической нагрузки при горизонтальных и вертикальных колебаниях не совпадают и могут существенно различаться.

На фиг. 2 представлены зависимости коэффициентов присоединенной массы $M_j = \mu_{jj} / (\pi \rho_c a^2)$ от параметра γ в случае $\omega > N$ при различных толщинах среднего слоя и



Фиг. 2. Зависимости коэффициентов присоединенной массы M_j от γ при $\omega > N$. Горизонтальные ($j = 1$), вертикальные ($j = 2$) колебания – кривые 1, 2. Значения параметров на кривых в таблице. Прямая $M_j = \gamma$ – решение (4.2)

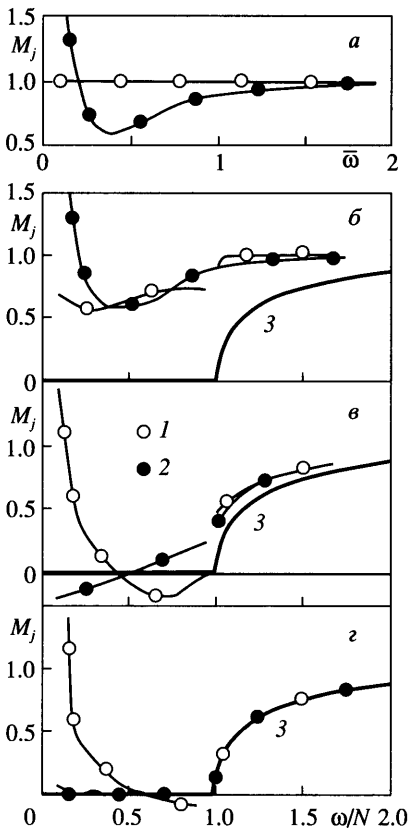
расположения цилиндра (см. таблицу). При $H/a = 10$, $h = 0$ (кривые 1) значения гидродинамической нагрузки M_1 и M_2 очень близки к решению (4.2). При высокочастотных колебаниях $\omega \rightarrow \infty$ ($\gamma = 1$) силой тяжести можно пренебречь и в приближении Буссинеска рассматриваемая задача соответствует колебаниям цилиндра в невесомой однородной жидкости плотности ρ_c , в этом случае $M_{1,2} = 1$. При расположении цилиндра полностью в однородном по плотности верхнем слое при $H/a = 0.5$, $h/a = 1.7$ (кривые 5) относительное расхождение между значениями M_1 и M_2 не превышает 5%. В остальных рассмотренных случаях значения коэффициентов присоединенной массы при горизонтальных и вертикальных колебаниях существенно различаются, но все они заключены в области $\gamma \leq M_{1,2} \leq 1$.

На фиг. 3, 4 представлены соответственно значения коэффициентов присоединенной массы и демпфирования при различных стратификациях, начиная от безграничной двухслойной жидкости и кончая относительно глубоким линейно стратифицированным слоем. Центр цилиндра расположен на границе раздела в двухслойной жидкости и на средней линии стратифицированного слоя ($h = 0$) в трехслойной жидкости. Для двухслойной жидкости использованы результаты [5], отношение плотности нижнего слоя к плотности верхнего слоя составляло $\rho_2/\rho_1 = 1.03$, что соответствует $\varepsilon \approx 0.015$. Введены следующие значения для безразмерных коэффициентов демпфирования в трехслойной и двухслойной жидкостях

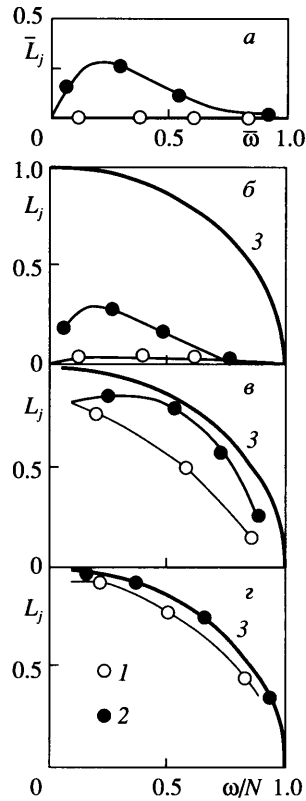
$$L_j = \frac{\lambda_{jj}}{\pi \rho_c a^2 N}; \quad L_j = \frac{\lambda_{jj} \sqrt{0.4}}{\pi \rho_c \sqrt{g \varepsilon a^3}}$$

В двухслойной жидкости для безразмерной частоты взято $\bar{\omega} = \omega \sqrt{0.4 a / g \varepsilon}$ для удобства при сравнении с результатами, представленными на фиг. 3, б и 4, б при $H/a = 0.2$. В расчетах при $\omega < N$ учитывалось 200 мод внутренних волн.

Кривые	H/a	h/a	N_1	N_2	N_3
1	10	0	0	10	0
2	2.5	0	0	10	0
3	0.5	0	10	8	10
4	0.5	0.25	14	10	6
5	0.5	1.7	54	0	0



Фиг. 3. Зависимости коэффициентов присоединенной массы M_j от безразмерной частоты для двухслойной (а) и трехслойной жидкостей при $H/a = 0.2; 1.5; 5$ (б–г). Кривые 1 – горизонтальные колебания ($j = 1$), 2 – вертикальные ($j = 2$), кривые 3 – решение (4.1), (4.2) (б–г)

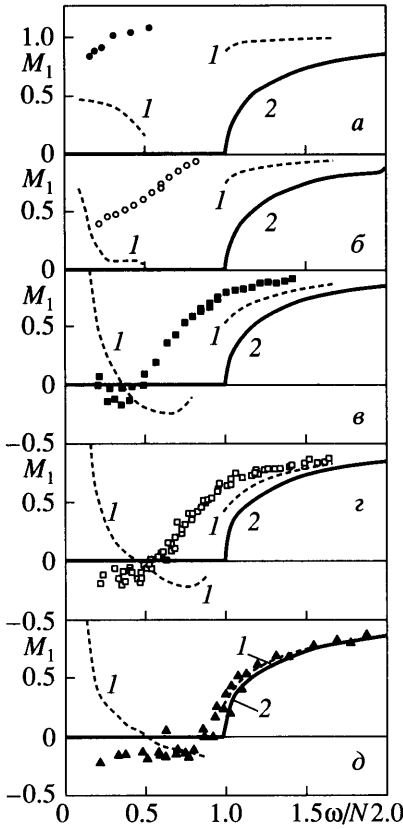


Фиг. 4. Зависимости коэффициентов демпфирования \bar{L}_j, L_j от безразмерной частоты. Обозначения те же, что на фиг. 3

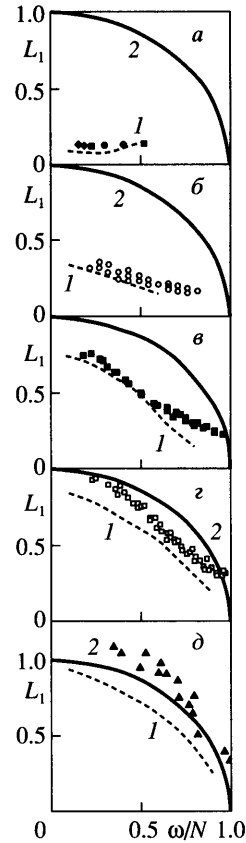
Влияние стратификации на гидродинамическую нагрузку пренебрежимо мало для горизонтальных колебаний кругового цилиндра в безграничной двухслойной жидкости при малом перепаде плотности между слоями и расположении центра цилиндра на границе раздела [5]. В этом случае безразмерный коэффициент присоединенной массы практически равен единице, а коэффициент демпфирования пренебрежимо мал. Для тонкого линейно стратифицированного слоя ($H/a = 0.2$) результаты довольно близки к случаю двухслойной жидкости, особенно при вертикальных колебаниях цилиндра.

С утолщением среднего слоя численные результаты приближаются к решению (4.1), (4.2), особенно в случае вертикальных колебаний цилиндра.

Единственные известные эксперименты по определению гидродинамической нагрузки для погруженного тела, колеблющегося в жидкости с пикноклининой стратификацией, выполнены для горизонтальных колебаний кругового цилиндра [9]. Распределение плотности по глубине было близко к зависимости



Фиг. 5. Зависимости коэффициента присоединенной массы M_1 от безразмерной частоты при $H/a = 0.43$; 0.78 ; 1.23 ; 1.62 ; 2.62 (а–д), точки – экспериментальные данные [9], штриховые кривые – численные результаты, сплошные кривые – решения (4.1), (4.2)



Фиг. 6. Зависимости коэффициента демпфирования L_1 от безразмерной частоты. Обозначения те же, что на фиг. 5

$$\rho_0(y) = \rho_c \left(1 - \varepsilon \operatorname{th} \frac{y}{D} \right) \quad (4.3)$$

Центр цилиндра и начало координат находились на средней линии канала, глубина которого составляла 32 см, радиус цилиндра равнялся 1.85 см. В расчетах распределение плотности (4.3) моделировалось безграничной трехслойной жидкостью в предположении, что $H = D$.

На фиг. 5, 6 различными символами представлены экспериментальные данные [9], штриховыми кривыми показаны численные результаты. Имеется удовлетворительное согласие численных результатов с экспериментом для значений коэффициентов демпфирования, особенно при относительно малых толщинах пикноклина. Для коэффициентов присоединенной массы удовлетворительное согласие имеет место только в неволновом режиме при $\omega > N$. Причины расхождения между экспериментальными и теоре-

тическими результатами могут быть связаны как с трехслойной аппроксимацией плавного пикноклина (4.3), так и с различием в полной глубине жидкости.

Для низкочастотного предела коэффициента демпфирования подтвердилось качественное соображение [10] о пропорциональности этого коэффициента при относительно тонком пикноклине квадрату его толщины, что объясняется наличием аналогии с эффектом блокировки при медленном горизонтальном движении плоского тела.

Заключение. Предложен метод расчета гидродинамической нагрузки, действующей на горизонтальный цилиндр при его малых гармонических колебаниях в трехслойной безграничной жидкости с линейно стратифицированным средним слоем. Расположение цилиндра может быть произвольным. Показано, что гидродинамическая нагрузка существенно зависит как от частоты и типа колебаний тела, так и от его местоположения. В дальнейшем представляет значительный интерес исследование волновых движений, возникающих в жидкости с пикноклиновой стратификацией, имеющей непрерывное изменение градиента плотности, например, вида (4.3). При этом можно использовать представления для функции Грина, полученные в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hurley D.G. The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders Pt. 1. Inviscid solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 105–118.
2. Ermanyuk E.V. The rule of affine similitude for the force coefficients of a body oscillating in a uniformly stratified fluid // Exp. Fluids. 2002. V. 32. № 2. P. 242–251.
3. Стурова И.В. Задачи радиации и дифракции для кругового цилиндра в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 81–94.
4. Стурова И.В. Колебания кругового цилиндра в слое линейно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 155–164.
5. Мотыгин О.В., Стурова И.В. Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 105–119.
6. Sturova I.V. Radiation loads on interface-piercing cylinder in a two-layer fluid of finite depth by a coupled element technique // Proc. 8th Int. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics. Busan, Korea. 2003. P. 80–91.
7. Ten I., Kashiwagi M. Hydrodynamics of a body floating in a two-layer fluid of finite depth. Pt. 1. Radiation problem // J. Marine Sci. and Technol. 2004. V. 9. № 3. P. 127–141.
8. Стурова И.В., Сюй Ч. Гидродинамическая нагрузка при колебаниях цилиндра на границе раздела в двухслойной жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 122–131.
9. Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V. Force on a body in a continuously stratified fluid. P. 1. Circular cylinder // J. Fluid Mech. 2002. V. 451. P. 421–443.
10. Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V. Force on a body in a continuously stratified fluid. P. 2. Sphere // J. Fluid Mech. 2003. V. 494. P. 33–50.
11. Gorodtsov V.A., Xu Zhaoting. Waveguides of internal waves // Потoki и структуры в жидкостях: Тез. докл. Междунар. конф. Москва, 2005. М., 2005. С. 33–37.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.11.2006