

УДК 532.59

© 2006 г. Н. М. БОРИСОВА, А. В. ГУСЕВ, В. В. ОСТАПЕНКО

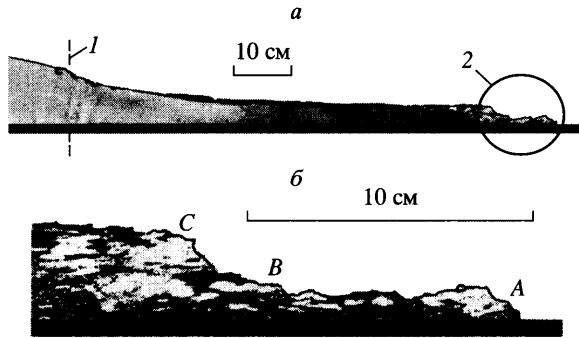
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРЕРЫВНЫХ ВОЛН ПО СУХОМУ РУСЛУ

Изучена возможность моделирования процесса распространения прерывных волн по сухому руслу на основе уравнений первого приближения теории мелкой воды. Показано, что в рамках уравнений мелкой воды на фронтах таких прерывных волн из закона сохранения массы следуют согласованные потери полного импульса и полной энергии набегающего потока. В качестве примера построены решения задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе и задачи о набегании прерывной волны на береговую ступеньку. Проведено сравнение этих точных решений с результатами лабораторных экспериментов.

Ключевые слова: теория мелкой воды, прерывные волны, сухое русло, автомодельные решения, лабораторный эксперимент.

В классической системе базисных законов сохранения теории мелкой воды [1–7], состоящей из законов сохранения массы и полного импульса, донное трение представляет собой распределенный источниковый член, не дающий вклада в условия Гюгоньо на фронтах прерывных волн. Такая система, правильно передавая параметры прерывных волн, распространяющихся по жидкости конечной глубины [1], не допускает распространения прерывных волн по сухому руслу. Точные решения, описывающие в рамках этой системы процесс течения воды по сухому руслу, представляют собой непрерывные волны понижения [1, 6, 7] (простейший пример такой волны, возникающей при разрушении плотины, впервые был построен в [8]). В то же время лабораторные эксперименты, приведенные в [9–14], а также выполненные в рамках данной работы, показали, что эти непрерывные решения существенно завышают скорость распространения передней кромки волны и заметно искажают профиль ее поверхности. В опытах фронт волны, распространяющейся по сухому руслу, существенно более крутой и на нем происходят обрушения, характерные для прерывных волн.

На фиг. 1, а приведена фотография волны, получающейся при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе. Это волновое течение возникло в результате резкого удаления плоского щита, ограничивающего неподвижную жидкость в верхнем бьефе (подробное описание результатов этого эксперимента дано в [13]). Опыты показали, что профиль головной части волны в процессе ее движения является пульсирующим и квазистационарным. Гидравлический прыжок *BC*, набега на распространяющийся впереди него тонкий слой воды *AB*, постепенно поглощает некоторую его часть. При этом крутизна переднего фронта прыжка *BC* уменьшается, в результате чего прыжок почти полностью вырождается и профиль свободной поверхности в головной части волны становится достаточно пологим. После этого процесс начинает развиваться в обратном направлении: профиль свободной поверхности в головной части волны на некотором расстоянии от ее кромки постепенно становится все более крутым, что приводит к формированию нового гидравлического прыжка вида *BC*. В то же время полоса воды *AB* перед его фронтом удлиняется и становится более тонкой. В результате профиль передней части волны вновь принимает вид, показанный на фиг. 1, б. Далее этот процесс циклически повторяется.



Фиг. 1. Фотография волны в нижнем бьефе при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины: 1 – положение плоского щита, задающего начальный перепад уровней, 2 – головная часть волны (а); головная часть волны, распространяющейся по сухому руслу, АВ – тонкий слой, ВС – гидравлический прыжок (б)

Математическое моделирование распространения волн по сухому руслу представляет собой достаточно сложную задачу не только в рамках уравнений мелкой воды, но и в рамках полных уравнений гидродинамики [10–12]. Ее решения, получаемые при помощи численных методов, основанных на двумерных уравнениях Эйлера и Навье – Стокса (без учета вовлечения пузырьков воздуха), существенно завышают скорость распространения передней кромки волны. В численных расчетах задачи о разрушении плотины [12] эта скорость асимптотически выходит на скорость распространения соответствующей волны понижения, получаемой из классических уравнений мелкой воды. Кроме того, указанные численные решения могут заметно исказить профиль головной части волны, распространяющейся по сухому руслу.

В настоящей работе описанный выше процесс течения по сухому руслу головной части волны моделируется в рамках теории мелкой воды как прерывная волна, распространяющаяся по сухому руслу. При этом показано, что система базисных законов сохранения теории мелкой воды [4], в которой учитывается влияние только классического донного трения, задаваемого по формуле Маннинга [1], не допускает распространения прерывных волн конечной амплитуды по сухому руслу. Связано это с тем, что в рамках уравнений мелкой воды на фронтах таких прерывных волн из закона сохранения массы следуют согласованные потери полного импульса и полной энергии набегающего потока. Вводится замыкающее условие на фронтах таких прерывных волн, позволяющее определять их интенсивность. С помощью этих неклассических прерывных волн построены решения задач о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе и о нагоне прерывной волны на береговую ступеньку. Приведено сравнение этих точных решений с результатами лабораторных экспериментов.

1. Соотношения на фронте прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу. Система базисных законов сохранения теории мелкой воды [1–7] в случае прямоугольного русла постоянной ширины и переменной глубины имеет вид

$$h_t + q_x = 0 \quad (1.1)$$

$$q_t + \left(qv + \frac{gh^2}{2} \right)_x = -ghb_x + R \quad (1.2)$$

$$R = -n^2 g \frac{v|v|}{h^{4/3}} = -n^2 gh^{2/3} q|q| \quad (1.3)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$, $v = q/h$ – глубина, расход и скорость потока, g – ускорение свободного падения, $b(x)$ – отметка дна, R – сила донного трения, задаваемая по формуле Маннинга [1], n – коэффициент шероховатости русла. Уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой дифференциальные формы записи законов сохранения массы и полного импульса [2, 7].

Поскольку донное трение (1.3) – распределенный источниковый член, не дающий вклада в условия Гюгонио на линиях разрыва, в случае горизонтального русла, для которого

$$b(x) = \text{const} \Rightarrow b_x = 0 \quad (1.4)$$

из интегральных аналогов законов сохранения массы (1.1) и полного импульса (1.2) получим следующие соотношения на фронте прерывной волны:

$$D[h] = [q] \quad (1.5)$$

$$D[q] = \left[qv + \frac{gh^2}{2} \right] \quad (1.6)$$

где D – скорость распространения волны, $[f] = f_1 - f_0$ – скачок функции f на ее линии фронта.

Если прерывная волна распространяется по сухому руслу

$$h_0 = v_0 = 0, \quad h_1 > 0, \quad v_1 > 0 \quad (1.7)$$

то из условия Гюгонио (1.5) для закона сохранения массы (1.1) получим

$$Dh_1 = q_1 = h_1 v_1 \Rightarrow D = v_1 > 0 \quad (1.8)$$

Из условия Гюгонио (1.6) с учетом формул (1.7) и (1.8) следует, что на прерывной волне, распространяющейся по сухому руслу, происходит потеря полного импульса

$$\delta q = -gh_1^2/2 < 0 \quad (1.9)$$

Это означает, что классическая система законов сохранения массы (1.1) и полного импульса (1.2), в рамках которой полный импульс на прерывных волнах должен сохраняться, не допускает распространения прерывных волн по сухому руслу. Прежде всего это связано с тем, что в тонком слое, формирующемся на фронте такой волны (см. фиг. 1), влияние донного трения не сводится к формуле Маннинга (2.3), используемой в случае реальных русловых процессов. Более точный учет вязких эффектов в этом тонком слое может привести к появлению дополнительного источникового члена в уравнении полного импульса, который будет вносить конечный вклад в условие Гюгонио (1.6) на фронте прерывной волны.

Для анализа устойчивости прерывных волн, распространяющихся по сухому руслу, рассмотрим закон сохранения полной энергии

$$e_t + \left(ev + \frac{1}{2}ghq \right)_x = -qgb_x - vR, \quad e = \frac{1}{2}(qv + gh^2) \quad (1.10)$$

который на гладких решениях есть дифференциальное следствие базисной системы уравнений (1.1), (1.2) [2, 7]. Из условия Гюгонио

$$D[e] = \left[ev + \frac{ghq}{2} \right]$$

для закона сохранения (1.10) с учетом формул (1.7), (1.8) следует, что на прерывной волне, распространяющейся по сухому руслу, происходит потеря полной энергии набегающего потока

$$\delta e = -g v_1 h_1^2 / 2 < 0 \quad (1.11)$$

При этом в силу равенства $\delta e = v_1 \delta q$, которое следует из формул (1.9), (1.11), энергия δe расходуется на торможение набегающего потока, связанное с потерей его полного импульса. Поскольку для уравнений мелкой воды закон сохранения полной энергии (1.10) представляет собой замыкающий выпуклый закон сохранения [15], потеря полной энергии на разрывах представляет собой энтропийный [16] (энергетический [7]) критерий устойчивости прерывных волн.

Для замыкания соотношения (1.8), вытекающего из закона сохранения массы (1.1), необходимо задать связь между глубиной h_1 и скоростью v_1 за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу. В общем случае эта связь может быть получена из условия (1.11), если известны потери полной энергии δe на фронте прерывной волны. Однако такие потери можно определить только в результате детального анализа внутренней структуры течения на фронте волны, что выходит за рамки данной работы.

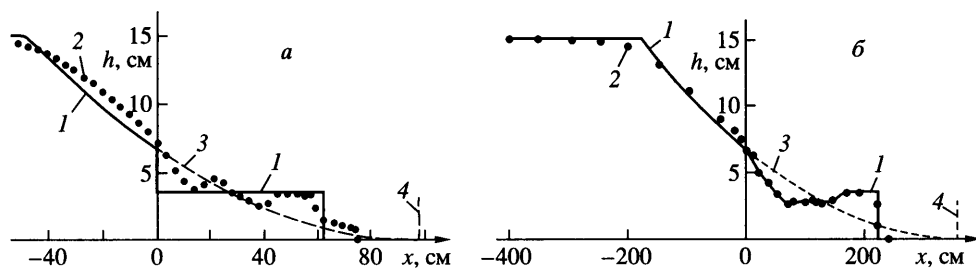
Теоретически потери полной энергии и связанные с ними потери полного импульса на фронте прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу, могут быть связаны с действием сил вязкости, капиллярности и смачивания. Для оценки влияния этих сил получим характерные значения чисел Рейнольдса $Re = Vl/\nu$ и Вебера $We = \rho V^2 l / \sigma$, где V – характерная скорость жидкости, l – характерный масштаб, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Естественно выбрать в качестве V скорость жидкости $v_1 = D$ на фронте волны, а в качестве l – характерную длину тонкого слоя перед фронтом волны (фиг. 1, б). Полагая $v_1 \approx 160$ см/с, $l \approx 10$ см, что соответствует результатам экспериментов, подробно описанных в следующих пунктах, получим $Re \approx 152000$, $We \approx 3100$. Отсюда следует, что влияние молекулярной вязкости и поверхностного натяжения на процесс течения в головной части волны, распространяющейся по сухому руслу, незначительны. Из результатов работы [17] следует, что в рассматриваемой ситуации можно пренебречь и влиянием сил смачивания. Таким образом, основным безразмерным параметром, от которого зависит течение на фронте прерывной волны, движущейся по сухому руслу, является число Фруда $Fr = v_1^2 / (gh_1) \approx 6.6$, где h_1 – глубина жидкости за фронтом волны.

С учетом этого связь между глубиной h_1 и скоростью v_1 за фронтом такой прерывной волны зададим в виде

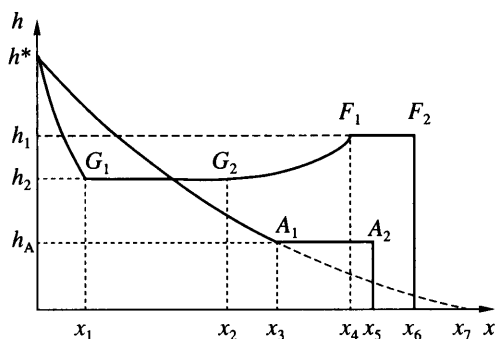
$$v_1 = \sqrt{\alpha g h_1} \quad (1.12)$$

где α – число Фруда, определяемое путем согласования с результатами лабораторных экспериментов. Поскольку эти эксперименты показали, что течение за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу, всегда является сверхкритическим, число Фруда $\alpha > 1$.

2. Задача о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе. В качестве первого примера рассмотрим волновые течения воды, возникающие при разрушении плотины в прямоугольном канале с горизонтальным дном (1.4) и с сухим руслом в нижнем бьефе. На фиг. 2 точками показаны профили свободной поверхности воды, получающиеся в моменты времени $t = 0.41$ с (фиг. 2, а) и $t = 1.47$ с (фиг. 2, б) при лабораторном моделировании этого процесса в прямоугольном лотке. Это волновое течение возникло в результате резкого удаления в момент времени $t = 0$ плоского щита, расположенного в точке $x = 0$ и ограничивающего неподвижную жидкость глубины $H = 15$ см, расположенную в верхнем бьефе при $x < 0$ [13].



Фиг. 2. Сравнение теории и эксперимента при моделировании задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе; 1 – теория, 2 – эксперимент, 3 – профиль классической волны понижения в нижнем бьефе, 4 – правая граница классической волны понижения $t = 0.41; 1.47$ с (а, б)



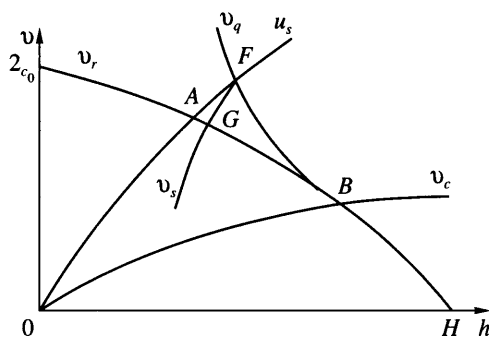
Фиг. 3. Теоретические профили волн, возникающих в нижнем бьефе при моделировании задачи о разрушении плотины

В рамках теории мелкой воды данная задача формулируется как задача Коши о распаде разрыва со следующими кусочно-постоянными начальными данными

$$t = 0: h(x) = H, x \leq 0, h(x) = 0, x > 0, v(x) = 0 \tag{2.1}$$

Решение этой задачи, получаемое на основе классической системы базисных законов сохранения массы (1.1) и полного импульса (1.2), без учета влияния донного трения ($R = 0$), представляет собой центрированную r -волну понижения [1, 6, 7] (на фиг. 2 сплошная линия при $x < 0$ и штриховая при $x > 0$). Такая волна понижения достаточно достоверно воспроизводит результаты эксперимента в верхнем бьефе (особенно в момент времени $t = 1.47$ с) и существенно отклоняется от них в нижнем бьефе (фиг. 2).

Крутую головную часть экспериментальной волны, на фронте которой периодически происходят обрушения и скорость распространения которой заметно ниже, чем скорость движения правой границы волны понижения, будем моделировать прерывной волной, распространяющейся по сухому руслу. С учетом этого решение задачи (2.1) можно построить как прерывную волну вида (1.8), (1.12), соединенную через область постоянного течения (h_A, v_A) с левой частью центрированной волны понижения. На фиг. 3 такое решение показано сплошной линией, проходящей через точки h^*, A_1, A_2, x_5 . Параметры постоянного течения (h_A, v_A) находятся методом адиабат [7] как координаты точки А, в которой на фиг. 4 пересекаются волновая r -адиабата v_r и неклассическая ударная s -адиабата $v = u_s(h, \alpha) = \sqrt{\alpha gh}$, уравнение которой следует из формулы (1.12).



Фиг. 4. Диаграмма адиабат для построения автомодельных решений задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе

Штриховой линией на фиг. 3 показано продолжение центрированной волны понижения правее точки A_1 .

Из сравнения фиг. 2 и 3 следует, что решение задачи (2.1), приведенное на фиг. 3 линией h^* , A_1 , A_2 , x_s , правильно передавая крутой профиль головной части экспериментальной волны, не отражает того факта, что в левой части нижнего бьефа экспериментальные точки лежат заметно ниже уровня центрированной волны понижения. Причина этого в том, что в данном решении никак не учтено сильное вертикальное течение, возникающее в результате обрушения вертикальной стенки воды сразу после удаления щита.

Возможным способом локального учета в рамках одномерных моделей сильных вертикальных течений, сравнимых с горизонтальными, является введение разрывов параметров течения, т.е. разрыва глубин и горизонтальных скоростей. В теории мелкой воды такой подход традиционно используется при моделировании прерывных волн, когда разрывом параметров потока описывается целая переходная зона вихревого течения, в котором вертикальные скорости сравнимы с горизонтальными. Такой же подход был успешно применен в работах [18–24] при моделировании течений жидкости над скачком отметки дна. В этих работах неподвижным разрывом параметров течения над скачком отметки дна моделировалась переходная область реального потока, внутри которой происходило быстрое, но достаточно гладкое изменение уровня жидкости.

Для учета в рамках теории мелкой воды сильных вертикальных течений, возникающих при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины (2.1), также необходимо предполагать, что начальный разрыв глубин не исчезает мгновенно, как в классическом решении, а постепенно уменьшается, стягиваясь за конечное время в точку с координатами критической глубины $h^* = h(0, t) = 4H/9$. Закон изменения амплитуды начального разрыва необходимо получать или путем согласования с лабораторными экспериментами, или путем асимптотического анализа решения этой задачи по двумерным моделям, в частности по модели потенциального течения, для которой в работе [1] построена асимптотика этого решения при малых временах. Однако при таком более общем подходе, при котором "стягивающийся" к h^* разрыв глубин в створе плотины можно рассматривать как внутреннее граничное условие, решение данной задачи можно получить лишь численно. При этом отличие в нем от классической волны понижения будет иметь место не только в нижнем, но и в верхнем бьефе плотины.

В то же время, как показали лабораторные эксперименты (фиг. 2), через некоторое достаточно малое время после разрушения плотины профиль волны становится достаточно близок к классической волне понижения в верхнем бьефе, но продолжает суще-

ственно отличаться от нее в нижнем бьефе. При этом особенно быстро на критическое значение h^* выходит глубина в створе плотины. Почти так же быстро на постоянное значение $D > 0$ выходит в эксперименте [13] скорость прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу. Это позволяет для учета вертикальных течений, возникающих в створе плотины сразу после ее разрушения, использовать упрощенный подход, при котором модификация классической волны понижения происходит только в нижнем бьефе плотины при $x > 0$ и на начальном этапе описывается автомодельным решением.

При таком упрощенном подходе начальный разрыв глубин $[0, H]$ мгновенно преобразуется в разрыв $[h_1, h^*]$, где h_1 – глубина в зоне постоянного течения (h_1, v_1) между разрывом $[h_1, h^*]$ и прерывной волной, распространяющейся с постоянной скоростью по сухому руслу. На фиг. 2, а профиль этого автомодельного решения показан сплошной линией 1, а на фиг. 3 – линией, проходящей через точки h^*, h_1, F_1, F_2, x_6 . В таком решении при $x > 0$ по существу происходит искусственное разделение вертикальных и горизонтальных потоков реального течения в нижнем бьефе. Вертикальные потоки сосредотачиваются на разрыве глубин $[h_1, h^*]$ в точке $x = 0 + 0$, а горизонтальные распределяются в зоне постоянного течения $h_1 F_2$ за фронтом прерывной волны (фиг. 3). Такое описание начального этапа течения в нижнем бьефе качественно достаточно хорошо согласуется с результатами работы [14], в которой экспериментально изучалась самая начальная стадия генерации волн ($t < 0.5$ с), возникающих при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины (2.1) с начальной глубиной верхнего бьефа $H = 20.5$ см.

Поскольку на неподвижном разрыве $[h_1, h^*]$ из условия Гюгонио (1.5) для закона сохранения массы (1.1) с учетом $D = 0$ следует постоянство расхода

$$[q] = 0 \Rightarrow q_1 = h_1 v_1 = q^* = h^* v^* = \frac{8}{27} \sqrt{gH^3}$$

параметры сверхкритического течения (h_1, v_1) расположены на гиперболе $v = v_q(h, q^*) = q^*/h$, выходящей на фиг. 4 из точки $B = (h^*, v^*)$, лежащей на линии критических течений

$$v = v_c(h) = \sqrt{gh} \quad (2.2)$$

Значения h_1, v_1 определяются как координаты точки F на фиг. 4, в которой пересекаются ударная адиабата u_s и гипербола v_q .

Разрыв $[h_1, h^*]$ неустойчивы, и время его существования t_1 определяется как характерное время, в течение которого вертикальные скорости в створе плотины сравнимы с горизонтальными. Значение t_1 вычисляется по формуле $t_1 = \theta \sqrt{H/g}$, в которой θ – безразмерный временной параметр, определяемый путем согласования с результатами лабораторных экспериментов. В момент времени t_1 разрыв $[h_1, h^*]$ разрушается, что в рамках теории мелкой воды формулируется как задача о распаде разрыва

$$h(x, t_1) = \begin{cases} h^*, & x \leq 0 \\ h_1, & x > 0 \end{cases}, \quad v(x, t_1) = \begin{cases} v^*, & x \leq 0 \\ v_1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

решение которой, показанное на фиг. 3 линией $h^* G_1 G_2 F_1$, представляет собой две центрированные волны понижения, соединенные областью постоянного течения (h_2, v_2). Величины h_2 и v_2 находятся как координаты точки G на фиг. 4, в которой пересекаются волновые адиабаты v_r и v_s .

В рамках общей задачи о разрушении плотины (2.1) решение задачи о распаде разрыва (2.3) формирует решение, состоящее из двух волн понижения и прерывной волны, соединенных областями постоянного течения. На фиг. 3 это решение показано сплошной

линией $h^*G_1G_2F_1F_2x_6$. Поскольку правая граница F_1 s -волны понижения распространяется со скоростью $v_1 + \sqrt{gh_1}$, большей, чем скорость $D = v_1$ движения фронта F_2x_6 прерывной волны, то данное решение будет существовать только до тех пор, пока точка F_1 на фиг. 3 не “догонит” точку F_2 , т.е. только на временном интервале (t_1, t_2) , где $t_2 = (1 + v_1/\sqrt{gh_1})t_1$. При $t > t_2$ начнется взаимодействие прерывной волны с s -волной понижения, которое не описывается в рамках автомодельных решений.

Точное решение задачи о разрушении плотины (2.1), приведенное на фиг. 3 линией $h^*G_1G_2F_1F_2x_6$, зависит от двух безразмерных параметров: числа Фруда α за фронтом прерывной волны F_2x_6 и параметра θ , определяющего время существования разрыва глубин $[h_1, h^*]$. Из результатов работы [13], в которой задача о разрушении плотины (2.1) экспериментально моделировалась при начальных глубинах H , изменяющихся от 3 до 21 см, а также из экспериментов, проведенных при подготовке данной работы, следует, что при $H \in [7 \text{ см}, 21 \text{ см}]$ параметры α и θ изменяются мало и близки к постоянным значениям $\alpha = 6.7$, $\theta = 0.62$. При этих значениях параметров α и θ достаточно хорошее согласование с результатами лабораторных экспериментов достигается при временах $t > kt_1 = k\theta\sqrt{H/g}$, где $k \approx 1.3$, когда вертикальные скорости в створе плотины затухают и реальное течение можно рассматривать как одномерное.

Для начальной глубины $H = 15$ см на фиг. 2 приведено сравнение точного решения, показанного сплошной линией, с результатами эксперимента, которые изображены точками. Для точного решения при $H = 15$ см с учетом того, что $\alpha = 6.7$, $\theta = 0.62$, получим

$$h_A \approx 2.63 \text{ см}, \quad v_A = D_A \approx 141 \text{ см/с}, \quad h^* \approx 6.67 \text{ см}, \quad v^* \approx 80.7 \text{ см/с}$$

$$h_1 \approx 3.55 \text{ см}, \quad v_1 = D \approx 152 \text{ см/с}, \quad h_2 \approx 2.76 \text{ см}, \quad v_2 \approx 138 \text{ см/с}$$

$$t_1 \approx 0.77 \text{ с}, \quad t_2 \approx 1.98 \text{ с}$$

откуда следует, что в момент времени $t = 0.41$ с, когда разрыв $[h_1, h^*]$ еще не распался (фиг. 2, а), координаты x_i на фиг. 3 принимают значения

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 \approx 36.9 \text{ см}, \quad x_5 \approx 57.8 \text{ см}, \quad x_6 \approx 62.3 \text{ см}, \quad x_7 \approx 99.2 \text{ см}$$

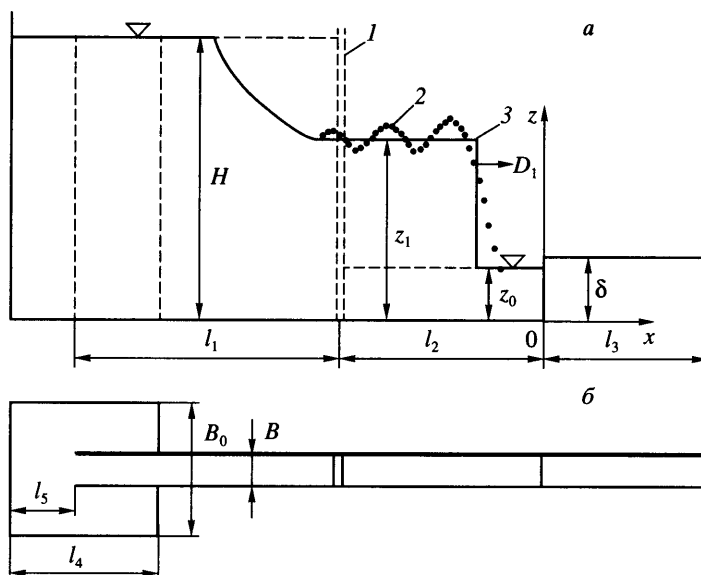
а в момент времени $t = 1.47$ с, т.е. после распада разрыва $[h_1, h^*]$ (фиг. 2, б), эти координаты принимают следующие значения:

$$x_1 \approx 60.2 \text{ см}, \quad x_2 \approx x_3 \approx 133 \text{ см}, \quad x_4 \approx 148 \text{ см}$$

$$x_5 \approx 207 \text{ см}, \quad x_6 \approx 223 \text{ см}, \quad x_7 \approx 357 \text{ см}$$

Из фиг. 2, б, следует, что построенное в этом пункте точное решение в момент времени $t = 1.47 \text{ с} > kt_1 \approx 1 \text{ с}$ достаточно точно передает профиль экспериментальной волны, что говорит об обоснованности предположений, которые были использованы при его построении. В более ранний момент времени $t = 0.41 \text{ с} < t_1 \text{ с}$ (фиг. 2, а), когда реальное течение еще является существенно двумерным, согласование теории с экспериментом заметно хуже.

3. Задача о набегании прерывной волны на береговую ступеньку. В качестве второго примера приведем результаты теоретического и лабораторного исследования волн, возникающих при набегании на береговую ступеньку прерывной волны, образующейся в результате разрушения плотины над горизонтальным участком дна. Схема эксперимента, основные обозначения и используемая далее система координат представлены на



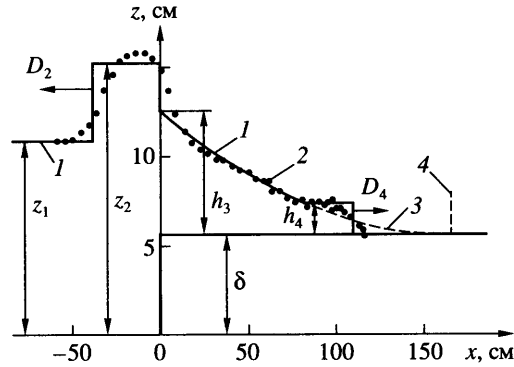
Фиг. 5. Схема эксперимента при лабораторном моделировании задачи о набегании прерывной волны на береговую ступеньку: 1 – положение плоского щита, задающего начальный перепад уровней, 2 – профиль экспериментальной волны, набегающей на ступеньку, 3 – теоретический профиль волны, набегающей на ступеньку, а – вид сбоку, б – сверху

фиг. 5. Опыты выполнялись в прямоугольном канале шириной $B = 20.2$ см и длиной $l_1 + l_2 + l_3 = 706.5$ см, который своей левой частью располагался в лотке шириной $B_0 = 100$ см и длиной $l_4 = 330$ см. Левый открытый конец канала находился на расстоянии $l_5 = 130$ см от левой торцевой стенки лотка. Дно канала состояло из двух горизонтальных участков, соединенных вертикальной ступенькой высотой $\delta = 5.5$ см, расположенной на расстоянии $l_3 = 238.5$ см от правой торцевой стенки. Начальный перепад уровней $\Delta z = H - z_0$ создавался с помощью плоского щита, который находился на расстоянии $l_2 = 122$ см вверх по потоку от ступеньки дна. В рассматриваемом эксперименте начальный уровень воды в верхнем бьефе $H = 20.5$ см, а в нижнем бьефе перед ступенькой $z_0 = 4.5$ см. Поскольку $z_0 < \delta$, в начальный момент времени $t = 0$, когда происходило удаление щита, на ступеньке вода отсутствовала. На фиг. 6 точками показан профиль свободной поверхности воды, получающийся в эксперименте в момент времени $t = 1.58$ с, после прохождения прерывной волны над береговой ступенькой. Поскольку на таком малом временном интервале классическое донное трение (1.3) не оказывает заметного влияния на формирующееся течение, его теоретическое моделирование будем проводить без учета донного трения.

В рамках теории “мелкой воды” начальная задача о разрушении плотины над горизонтальным дном формулируется как задача Коши о распаде разрыва со следующими кусочно-постоянными начальными данными:

$$t = 0: h(x) = H, \quad x \leq -l_2, \quad h(x) = z_0, \quad x > -l_2, \quad v(x) = 0$$

Точное решение этой задачи, получаемое на основе классической системы (1.1), (1.2), в которой $R = 0$, представляет собой [1, 6, 7] центрированную r -волну понижения, соеди-



Фиг. 6. Сравнение теории и эксперимента при моделировании задачи о набегании прерывной волны на береговую ступеньку. Обозначения те же, что на фиг. 2

ненную через область постоянного потока $h_1 = z_1$, $v_1 > 0$ (фиг. 5) с прерывной волной, распространяющейся с постоянной скоростью

$$D_1 = \sqrt{\frac{gh_1(h_1 + z_0)}{2z_0}}$$

Для продолжения решения при $t > t_0 = l_2/D_1$, т.е. после прохождения начальной прерывной волны над береговой ступенькой, необходимо решить задачу о распаде разрыва над скачком отметки дна

$$z(x, t_0) = \begin{cases} z_1, & x \leq 0 \\ \delta, & x > 0 \end{cases}, \quad v(x, t_0) = \begin{cases} v_1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \delta, & x > 0 \end{cases}, \quad \delta > 0 \quad (3.2)$$

где величины $z_1 = h_1$ и v_1 лежат на классической ударной адиабате $v = v_s(h, z_0)$.

В последнее время выполнен ряд теоретических [18–21] и экспериментальных [22–24] работ, в которых изучалась задача о разрушении плотины над скачком отметки дна. В работах [19, 21, 22, 24] рассматривались течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна, а в работах [20, 23] – над ступенькой дна. Следуя этим работам, будем считать, что на разрыве, возникающем над ступенькой (3.2), выполнены закон сохранения массы (1.1) и закон сохранения локального импульса

$$v_t + \left(\frac{v^2}{2} + gz \right)_x = -\frac{R}{h} \quad (3.3)$$

который на гладких решениях является дифференциальным следствием базисной системы уравнений (1.1), (1.2). Поскольку на таком разрыве $D = 0$, из условий Гюгонио для законов сохранения (1.1) и (3.3) получим

$$[q] = 0, \quad \left[\frac{v^2}{2} + gz \right] = 0 \quad (3.4)$$

т.е. на таком разрыве непрерывны расход и функция Бернулли.

Обозначим через (h, v) и (H, V) глубину и скорость потока соответственно на ступеньке при $x = 0 + 0$ и перед ней при $x = 0 - 0$. Тогда соотношения (3.4) можно переписать в виде

$$J(H, q) = J(h, q) + \delta, \quad q = hv = HV$$

$$J(y, q) = \frac{q^2}{2gy^2} + y \tag{3.5}$$

В рамках устойчивых разрывных решений [25] условия (3.5) задают однозначное отображение [20]

$$F : \{v(h)\} \Rightarrow \{V(H)\} \tag{3.6}$$

которое каждую строго монотонно возрастающую функцию $u(h) > 0$, лежащую в области докритических и критических течений ($v \leq \sqrt{gh}$), переводит в строго монотонно возрастающую функцию $V(H) > 0$, лежащую в области докритических течений ($V < \sqrt{gH}$). Данный результат лежит в основе обобщенного метода адиабат построения автомодельных решений задачи (3.1), (3.2).

На фиг. 7 линиями v_c и v_s изображены множество критических течений (2.2) и график ударной s -адиабаты $v = v_s(h, z_0)$, а линией $v_c^+ = F[v_c]$ показан образ множества (2.2) при отображении (3.6). Можно показать, что $v_s(h, z_0) > v_c^+(h)$ при $\forall z_0 \leq \delta, \forall h > \delta$, т.е. что при $h > \delta$ линия v_s лежит на фиг. 7 выше линии v_c^+ . Предположим, что в результате решения задачи о распаде разрыва (3.1), (3.2) по фону (z_1, v_1) будет распространяться обратная прерывная волна, параметры течения (z_2, v_2) за фронтом которой определяются как координаты точки A_2 , в которой на фиг. 7 пересекаются монотонно убывающая ударная r -адиабата $v = v_r(z, z_1, v_1)$, выходящая из точки $A_1 = (z_1, v_1)$ на адиабате v_s , и монотонно возрастающая функция $v_c^+(h)$. После определения величин $z_2 = h_2$ и v_2 скорость распространения обратной прерывной волны вычисляется по формуле

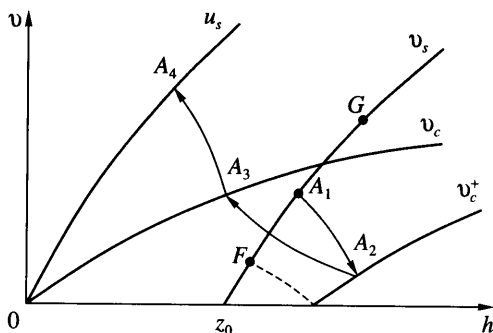
$$D_2 = v_1 - \sqrt{\frac{g(z + z_1)}{2z_1}}, \quad z > z_1$$

а параметры течения на ступеньке (в точке $x = 0 + 0$) находятся как координаты (h_3, v_3) точки A_3 , в которой на фиг. 7 пересекаются гипербола $v = h_2 v_2 / h$, выходящая из точки A_2 , и линия критических течений v_c .

Для реализации при $x \leq 0$ описанного выше течения необходимо, чтобы точка $A_1 = (z_1, v_1)$ лежала на адиабате v_s выше точки $F = (z_*, v_*)$, из которой на фиг. 6 выходит ударная r -адиабата $v = v_r(h, z_*, v_*)$, проходящая через точку δ на оси h , т.е. необходимо, чтобы выполнялось неравенство $z_1 > z_*$, где z_* однозначно определяется как положительный корень уравнения $v_r(h, z_*, v(z_*, z_0)) = 0$. Если $z_1 \leq z_*$, то набегающая на ступеньку прерывная волна не переливается через нее, а отражается от нее как от жесткой стенки. Кроме того, для реализации данного течения необходимо, чтобы скорость отраженной прерывной волны была отрицательной, т.е. чтобы выполнялось неравенство $D_2 < 0$. Из этого неравенства следует, что точка A_1 лежит на адиабате v_s ниже точки $G = (z_1^*, v_1^*)$, координаты которой находятся из системы уравнений

$$v_1^* = v_s(z_1^*, z_0), \quad v_2^* = v_r(z_2^*, z_1^*, v_1^*), \quad v_3^* = \sqrt{gh_3^*}$$

$$J(z_2^*, q^*) = J(h_3^*, q^*) + \delta, \quad q^* = z_1^* v_1^* = z_2^* v_2^* = h_3^* v_3^*$$



Фиг. 7. Диаграмма адиабат для построения автомодельных решений задачи о набегаии прерывной волны на береговую ступеньку

При $D_2 = 0$ отраженная прерывная волна совпадает с неподвижным разрывом над ступенькой, образуя вместе с ним единый стоячий скачок, на котором будет происходить потеря полной энергии набегающего потока.

В эксперименте, приведенном точками на фиг. 6, параметры течения (z_1, v_1) за фронтом набегающей на ступеньку прерывной волны лежат на адиабате v_s между точками F и G , и тем самым при $x \leq 0$ этот эксперимент можно описывать построенным выше точным решением. Поскольку в этом решении течение на ступеньке в точке $x = 0 + 0$ является критическим ($v_3 = c_3 = \sqrt{gh_3}$), для его продолжения за ступенькой при $x > 0$ необходимо для системы уравнений мелкой воды решить задачу о распаде разрыва над горизонтальным дном со следующими начальными данными

$$h(x, t_0) = \begin{cases} h_3, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \quad v(x, t_0) = \begin{cases} v_3, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Классическое решение этой задачи (показанное на фиг. 6 при $x > 0$ сплошной линией, плавно переходящей в штриховую) представляет собой центрированную r -волну понижения, правая граница которой распространяется по сухому руслу. Поскольку такое решение неверно передает головную часть экспериментальной волны, для ее моделирования будем использовать неклассическую прерывную волну (1.7), (1.8).

Так как в эксперименте на ступеньку приходит сформировавшаяся прерывная волна с четко выраженным обрушением в своей головной части, решение задачи (3.7) будем строить подобно решению, показанному на фиг. 3 линией $h^*A_1A_2x_5$. Такое решение состоит из центрированной r -волны понижения, соединенной через область постоянного течения (h_4, v_4) с прерывной волной, которая с постоянной скоростью $D_4 = v_4 = \sqrt{\alpha gh_4}$, распространяется по сухому руслу $h_0 = 0$. Величины h_4 и v_4 вычисляются как координаты точки A_4 , в которой на фиг. 7 пересекаются волновая r -адиабата, выходящая из точки A_3 на линии критических течений, и неклассическая ударная адиабата u_s .

Построенное таким образом точное решение задачи о набегаии на береговую ступеньку прерывной волны, образовавшейся в результате разрушении плотины, зависит от одного эвристического параметра: числа Фруда α за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу. Как показали эксперименты, в которых глубина верхнего бьефа H менялась от 10 см до 21 см, а глубина нижнего бьефа $h_0 = z_0$ перед сту-

пенькой постоянной высоты $\delta = 5.5$ см менялась от 1.5 до 5.5 см, число Фруда α слабо зависит от такого варьирования глубин и приблизительно равно 15.4.

На фиг. 6 в момент времени $t = 1.58$ с сплошной линией показано точное решение, получаемое при числе Фруда $\alpha = 15.4$ и при следующих значениях входных параметров: $H = 20.5$ см, $z_0 = 4.5$ см, $\delta = 5.5$ см, что совпадает с условиями проведения эксперимента. При таких значениях параметров получим

$$z_1 = h_1 \approx 10.8 \text{ см}, \quad v_1 \approx 78.0 \text{ см/с}, \quad D_1 \approx 134 \text{ см/с}$$

$$z_2 = h_2 \approx 15.3 \text{ см}, \quad v_2 \approx 38.1 \text{ см/с}, \quad D_2 \approx -56.8 \text{ см/с}$$

$$h_3 \approx 7.03 \text{ см}, \quad v_3 \approx 83.0 \text{ см/с}, \quad q_3 = q_2 \approx 583 \text{ см}^2/\text{с}$$

$$h_4 \approx 1.81 \text{ см}, \quad v_4 = D_4 \approx 165 \text{ см/с}, \quad t_0 \approx 0.91 \text{ с}$$

Автомодельное решение (фиг. 6, сплошная линия) достаточно точно передает профиль экспериментального течения, что свидетельствует об обоснованности предположений, которые были сделаны при его построении. Более подробно результаты сравнения теории и эксперимента при моделировании данной задачи будут опубликованы в отдельной работе.

Заключение. Уравнения теории мелкой воды можно эффективно использовать для моделирования процесса распространения прерывных волн по сухому руслу. Получаемые при этом точные решения зависят от эвристического параметра – числа Фруда α за фронтом волны, распространяющейся по сухому руслу. Сравнение с результатами экспериментов показало, что конкретное значение этого параметра вырабатывается на начальном этапе формирования реальной прерывной волны, когда процесс течения является существенно двумерным и не описывается в рамках теории мелкой воды. Поскольку в задаче о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе и в задаче о набегании прерывной волны на береговую ступеньку этот начальный этап существенно различен, значения параметра α для этих задач также заметно отличаются.

Авторы благодарят В.И. Букреева, О.В. Воинова и В.В. Пухначева за консультации и помощь при подготовке данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ 902.2003.1), проекта № 10 программы № 13 фундаментальных исследований Президиума Российской академии наук и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00253), проекта № 16.2 фундаментальных исследований Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
3. *Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 319 с.
4. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993. 368 с.
5. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 419 с.
6. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
7. *Остапенко В.В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004. 180 с.
8. *Ritter A.* Die fortpflanzung der wasserwellen // Z. Ver. deut. Ing. 1892. V. 36.

9. *Martin J.C., Moyce W.J., Penney W.G., Price A.T., Thornhill C.K.* An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1952. V. 244. № 882. P. 312–324.
10. *Dressler R. F.* Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // *Intern. Assoc. Sci. Hydrology.* 1954. V. 3. № 38. P. 319–328.
11. *Stansby P. K., Chugini A., Barnes T. C. D.* The initial stages of dam-break flow // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 374. P. 407–424.
12. *Colicchio G., Colagrossi A., Greco M., Landrini M.* Free-surface flow after a dam break: a comparative study // *Shiffstechnik (Ship technology research).* 2002. Bd 49. № 3. P. 95–104.
13. *Букреев В.И., Гусев А.В., Мальшева А.А., Мальшева И.А.* Экспериментальная проверка газогидравлической аналогии на примере задачи о разрушении плотины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2004. № 5. С. 143–152.
14. *Букреев В.И., Гусев А.В.* Начальная стадия генерации волн при разрушении плотины // *Докл. РАН.* 2005. Т. 401. № 5. С. 619–622.
15. *Friedrichs K.O., Lax P.D.* Systems of conservation equations with a convex extension // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1971. V. 68. № 8. P. 1686–1688.
16. *Lax P. D.* *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves.* Philadelphia: SIAM, 1973. 48 p.
17. *Воинов О.В.* Гидродинамика смачивания // *Изв. РАН. МЖГ.* 1976. № 5. С. 76–84.
18. *Alcrudo F., Benkhaldoun F.* Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with bottom step // *Comput. and Fluids.* 2001. V. 30. № 6. P. 643–671.
19. *Атавин А.А., Васильев О.Ф.* Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // *Тез. докл. Междунар. симп. “Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических сооружений”*, Санкт-Петербург, 2002. СПб.: ВНИИГ, 2002. С. 121.
20. *Остапенко В.В.* Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // *ПМТФ.* 2003. Т. 44. № 4. С. 51–63.
21. *Остапенко В.В.* Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна // *ПМТФ.* 2003. Т. 44. № 6. С. 107–122.
22. *Букреев В.И., Гусев А.В.* Гравитационные волны при распаде разрыва над уступом дна открытого канала // *ПМТФ.* 2003. Т. 44. № 4. С. 64–75.
23. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // *Водные ресурсы.* 2004. Т. 31. № 5. С. 540–545.
24. *Букреев В.И., Гусев А.В., Остапенко В.В.* Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 6. С. 72–83.
25. *Остапенко В.В.* О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // *ПМТФ.* 2002. Т. 43. № 6. С. 62–74.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.XII.2004