МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 2006

УДК 532.546

© 2006 г. Н. М. ДМИТРИЕВ, В. М. МАКСИМОВ, Е. А. РЯБЧУКОВ

ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНЫХ ПОРИСТЫХ И ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ

В инвариантном тензорном виде выписаны законы фильтрации вязкопластичных жидкостей для капиллярных и трещиноватых сред с периодической микроструктурой, обладающей ортотропной и трансверсально-изотропной симметрией фильтрационных свойств. Анализ законов фильтрации вязкопластичных жидкостей в трансверсально-изотропных и ортотропных пористых и трещиноватых средах показал, что при построении уравнений необходимо различать тензор коэффициентов проницаемости и тензор предельных градиентов, которые могут обладать различной симметрией фильтрационных свойств, и что закон фильтрации многовариантен и допускает одно-, двух- и трехмерные течения.

Ключевые слова: фильтрация вязкопластичной жидкости, анизотропия, тензор предельных (начальных) градиентов, условие начала течения, поверхность предельных (начальных) градиентов.

Буровые растворы и аномальные нефти относятся к неньютоновским жидкостям и часто проявляют вязкопластичные свойства [1, 2]. Для изотропных пористых сред фильтрационные течения вязкопластичных жидкостей описываются законом фильтрации с предельным (начальным) градиентом и достаточно хорошо изучены [3, 4]. Однако реальные пористые среды, как правило, обладают анизотропией фильтрационных свойств. Фильтрационные течения вязкопластичных жидкостей в анизотропных пористых средах практически не изучены из-за отсутствия экспериментальных данных, которые, в свою очередь, невозможно получить из-за отсутствия теоретических основ: законов фильтрации, условий начала течения и так далее для различных типов анизотропных пористых сред. Результаты отдельных работ, в которых рассматривались частные типы анизотропии, не дают возможности сформулировать общие принципы и проанализировать возможные эффекты, проявление которых обуславливается вязкопластичными свойствами неньютоновской жидкости. Вместе с тем применение методов кристаллофизики и теории нелинейных тензорных функций на примере простейших капиллярных моделей [5–7] позволяет дать общие методы построения определяющих уравнений теории фильтрации при течении вязкопластичных жидкостей в анизотропных пористых средах.

1. Для моделирования фильтрационного течения вязкопластичных жидкостей воспользуемся стандартными идеализированными моделями, в которых пустотное пространство представляется в виде периодических решеток, образованных взаимно перпендикулярными прямыми каналами [8, 9]. Рассмотрим модели, в которых каналы представляются трубками кругового сечения и трещинами с параллельными стенками [7]. Каждую систему каналов наделим своим диаметром d_α, шириной щелей b_α и периодом укладки a_α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Для удобства дальнейших рассуждений совместим направления осей симметрии капилляров с осями декартовой системы координат, а плоскости трещин с координатными плоскостями. Через e_i^α обозначим компоненты орта, задающего направление x_α координатной оси, при этом орт e^α будет совпадать с направлением оси симметрии α-й системы капилляров и перпендикулярен к α-й системе трещин.

При построении определяющих уравнений в идеализированных моделях обычно полагается, что взаимодействием потоков в каналах можно пренебречь [9, 10]. В этом случае легко определяются выражения для компонент вектора истинной скорости фильтрации для каждой системы каналов. При построении закона Дарси для идеальных и трещиноватых грунтов используются формулы Пуазейля и Буссинеска соответственно. Очевидно, что в случае фильтрации вязкопластичных жидкостей при определении выражения для вектора истинной скорости фильтрации можно воспользоваться формулой Бэкингема [1] для капилляров и трещин соответственно:

$$V = \frac{d^2\Delta p}{32\mu_0 L}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d\Delta p}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d\Delta p}\right)^4\right] \quad (1.1)$$

$$V = \frac{b^2\Delta p}{12\mu_0 L}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2\tau_0 L}{b\Delta p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\tau_0 L}{b\Delta p}\right)^3\right] \quad (1.2)$$

Здесь V – средняя скорость, Δp – перепад давления в капилляре на участке длиной L, d – диаметр капилляра, b – ширина трещины, μ_0 – пластическая или структурная вязкость, τ_0 – начальное напряжение сдвига.

В подземной гидромеханике обычно в формулах (1.1) и (1.2) пренебрегают последними слагаемыми в квадратных скобках. Для того чтобы перейти от истинной скорости к скорости фильтрации необходимо "размазать" расход по всей грани элементарной ячейки. В результате подобных преобразований приближенных формул соответственно получим

$$w^\alpha = \frac{\pi d_\alpha^4}{128\mu_0 a_\beta a_\gamma}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{4\tau_0 L}{d_\alpha \Delta p}\right)\right]\frac{\Delta p}{L}, \quad w^\alpha = \frac{b_\alpha^3}{12\mu_0(b_\alpha + a_\alpha)}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2\tau_0 L}{b_\alpha \Delta p}\right)\right]\frac{\Delta p}{L} \quad (1.3)$$

Здесь w^α – модуль вектора скорости фильтрации при течении вдоль α-й системы капилляров и трещин, a_β и a_γ – периоды укладки систем капилляров и щелей вдоль соответствующих осей системы координат. Индексы α, β, γ – здесь и далее образуют циклическую перестановку из чисел 1, 2, 3.

Соотношения (1.3) определяют скорость фильтрации в α-й системе капилляров (трещин) в случае, когда направление градиента давления совпадает с направлением оси симметрии капилляра (лежит в плоскости трещин). В общем случае необходимо рассмотреть модельную задачу о фильтрации вязкопластичных жидкостей в одной системе каналов при произвольной взаимной ориентации капилляров (трещин) и градиента давления [7] и соотношения (1.3) примут, соответственно, вид:

$$w_i^\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu_0}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{\gamma_\alpha}{|e_j^\alpha \nabla_j p|}\right]e_i^\alpha e_j^\alpha \nabla_j p, \quad k_\alpha = \frac{\pi d_\alpha^4}{128 a_\beta a_\gamma} \quad (1.4)$$

$$w_i^\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu_0}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_i p \nabla_j p}}\right](e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_j p, \quad k_\alpha = \frac{b_\alpha^3}{12(b_\alpha + h_\alpha)} \quad (1.5)$$

Здесь $|e_j^\alpha \nabla_j p|$ – модуль скалярного произведения орта и градиента давления, $\gamma_\alpha = 4\tau_0/d_\alpha$ – значение предельного градиента для α-й системы капилляров, $\lambda_\alpha = 2\tau_0/b_\alpha$ – значение предельного градиента для α-й системы трещин, k_α – проницаемость, греческие индексы, здесь и далее, обозначают номер системы каналов, а латинские – компоненты векторов и тензоров, по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование, по повторяющимся греческим индексам суммирование, при необходимости обозначается обычным образом – с помощью знака суммы.

Используя допущение о независимости потоков в каналах, можно просуммировать соотношения (1.4) и (1.5) для всех систем капилляров и трещин и перейти к трехмерным уравнениям фильтрации вязкопластичной жидкости

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha e_i^\alpha e_j^\alpha \nabla_j p + \frac{4}{3\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \gamma_\alpha e_i^\alpha e_j^\alpha \frac{\nabla_j p}{|e_n^\alpha \nabla_n p|} \tag{1.6}$$

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} (k_\beta + k_\gamma) e_i^\alpha e_j^\alpha \nabla_i p + \frac{3}{2\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{k_\alpha \lambda_\alpha (e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_j p}{\sqrt{(e_l^\beta e_m^\beta + e_l^\gamma e_m^\gamma)\nabla_l p \nabla_m p}} \tag{1.7}$$

Проанализируем полученные соотношения (1.6) и (1.7). Решетка, образованная тремя взаимно перпендикулярными системами капилляров, в зависимости от геометрических параметров d_α, b_α, a_α может обладать симметрией классов кубической или ромбической сингонии [5]. При $d_1 = d_2 = d_3$, $b_1 = b_2 = b_3$ и $a_1 = a_2 = a_3$ имеем решетку с кубической симметрией, в остальных случаях – с тетрагональной или ромбической симметрией. Для кубической симметрии соотношения (1.6) и (1.7) принимают вид:

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{4k}{3\mu_0}\gamma\sum_{\alpha=1}^{3} e_i^\alpha e_j^\alpha \frac{\nabla_j p}{|e_n^\alpha \nabla_n p|} \tag{1.8}$$

$$w_i = -\frac{2k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_i p + \frac{3k\lambda}{2\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(e_l^\beta e_j^\beta + e_l^\gamma e_j^\gamma)\nabla_j p}{\sqrt{(e_l^\beta e_m^\beta + e_l^\gamma e_m^\gamma)\nabla_l p \nabla_m p}} \tag{1.9}$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера. Согласно принципу Неймана [5] для сред с кубической симметрией материальные тензоры второго ранга изотропные, для тетрагональной симметрии фильтрационные свойства трансверсально-изотропные, для ромбической симметрии фильтрационные свойства ортотропные.

Сравним полученное соотношение (1.8) с уравнением фильтрации вязкопластичной жидкости в изотропной пористой среде. Обычно закон фильтрации вязкопластичной жидкости в изотропной пористой среде записывается в виде

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\left(1 - \frac{\gamma}{|\nabla p|}\right)\nabla_i p \tag{1.10}$$

где $|\nabla p|$ – модуль градиента фильтрационного давления. Однако нетрудно заметить, что отношение $\nabla_i p/|\nabla p|$ равно единичному вектору, направленному вдоль приложения воздействия. Поэтому равенство (1.10) можно представить в виде

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{k}{\mu_0}\gamma\delta_{ij}n_i, \quad \nabla_i p = |\nabla p| n_i \tag{1.11}$$

Соотношения (1.10) и (1.11) несмотря на свою математическую эквивалентность допускают различные физические интерпретации. Соотношение (1.10) обычно рассматривается как нелинейное уравнение фильтрации, в котором выражение $k(1 - \gamma/|\nabla p|)$ задает нелинейную проницаемость. Соотношение (1.11) можно рассматривать как сумму двух тензоров – тензора коэффициентов проницаемости ($k_{ij} = k\delta_{ij}$) и тензора коэффициентов предельных (начальных) градиентов ($t_{ij} = k\gamma\delta_{ij}$). Представление (1.11) оказывается более общим, так как допускает возможную независимость симметрии свойств, задаваемых тензорами k_{ij} и t_{ij}. Как следует из модельного представления (1.3), возможна ситуация, когда при $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ ($b_1 \neq b_2 \neq b_3$) среда проявляет изотропные свойства при фильтрации ньютоновской жидкости [7], но при фильтрации вязкопластичной жидкости тензор будет анизотропным. В результате в уравнении фильтрации вязкопластичной жидкости при изотропном тензоре k_{ij} будем иметь ортотропный (трансверсально-изотропный) тензор t_{ij}. В самом деле, тензор коэффициентов проницаемости k_{ij} для капилляров представляется в виде композиции двух параметров: коэффициента формы $d_\alpha^2/32$ и коэффициента просветности $\pi d_\alpha^2/4a_\beta a_\gamma$, а тензор предельных градиентов представляется уже в виде композиции трех параметров: коэффициента формы, коэффициента просветности и предельного градиента – $4\tau_0/d_\alpha$. Следовательно, при изотропном тензоре коэффициентов проницаемости получим ортотропный тензор предельных градиентов. Аналогичные рассуждения, очевидно, можно провести и для трещин. Поэтому в общем случае необходимо положить, что при фильтрации вязкопластичных жидкостей в пористых средах уравнение фильтрации имеет вид:

$$w_i = -\frac{1}{\mu_0}k_{ij}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}t_{ij}n_j \qquad (1.12)$$

Вернемся к соотношению (1.8) и учитывая, что $\nabla_i p = |\nabla p|n_i$, перепишем его иначе

$$w_i = -\frac{k}{\mu_0}\delta_{ij}\nabla_j p + \frac{4k}{3\mu_0}\gamma\sum_{\alpha=1}^{3} l_i^\alpha \operatorname{sgn}(n_j l_j^\alpha) \qquad (1.13)$$

где $\operatorname{sgn}(n_j l_j^\alpha)$ – функция, значение которой равно единице при $n_j l_j^\alpha > 0$ и минус единице при $n_j l_j^\alpha < 0$.

Далее рассмотрим соотношения (1.12) и (1.13). Сравнение соотношений показывает, что в равенстве (1.12) значение предельного градиента задается вдоль любого направления с помощью тензора второго ранга, а в равенстве (1.13) предельный градиент определяется как сумма предельных градиентов вдоль главных направлений тензора коэффициентов проницаемости. В обоих случаях значение предельного градиента не зависит от градиента фильтрационного давления. Таким образом, в уравнении (1.12) предельный градиент может изменяться и определяется и задается непрерывно для любого направления, а в равенстве (1.13) предельный градиент представляется постоянным вектором в каждом квадранте декартовой системы координат. Понятно, что для континуальной модели более естественно представление (1.12). Более того, в проведенных рассуждениях физические свойства (проницаемость, предельный градиент) в уравнении фильтрации (1.4) определяются и задаются тензорами второго ранга, и представление уравнения фильтрации (1.4) будет удовлетворять принципу Неймана, если принять, что значение предельного градиента определяется и задается вдоль направления приложения градиента фильтрационного давления. Тогда уравнение фильтрации (1.4) в случае ортотропной симметрии фильтрационных свойств будет иметь вид:

$$\begin{gathered} w_i = -\frac{1}{\mu_0}D_{(2h)ij}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}D^*_{(2h)ij}n_j \\ D_{(2h)ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha, \quad D^*_{(2h)ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha\gamma_\alpha b_i^\alpha b_j^\alpha \end{gathered} \qquad (1.14)$$

и для трансверсально-изотропной симметрии

$$
\begin{aligned}
w_i &= -\frac{1}{\mu_0}B_{ij}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}B^*_{ij}n_j \\
B_{ij} &= k_1\delta_{ij} + k_2 b_i b_j, \quad B^*_{ij} = k_1\gamma_1\delta_{ij} + k_2\gamma_2 b_i b_j
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Для кубической симметрии уравнение запишется в виде (1.11). Аналогичные рассуждения, очевидно, можно провести и для трещин.

2. Однако выписанное соотношение (1.14) или в общем виде (1.12) еще не определяет закона фильтрации вязкопластичной жидкости, так как они задают лишь уравнение фильтрации при выполнении условия начала течения (в изотропном случае $|\nabla p| > \gamma$). Поэтому для того чтобы записать закон фильтрации вязкопластичной жидкости в анизотропных средах, необходимо сформулировать условие начала течения и выписать все возможные варианты фильтрационных течений, которые возникают из-за того, что в анизотропных средах значения предельного градиента изменяются в зависимости от направления.

В качестве условия начала течения можно задать неравенство, которое следует из условия отрицательности работы сил трения при движении жидкости в пористой среде [3]:

$$w_i\nabla_i p < 0 \tag{2.1}$$

После подстановки в неравенство (2.1) уравнения фильтрации (1.12) условие начала течения в направлении n_i принимает вид

$$|\nabla p| > \frac{t_{ij}n_i n_j}{k_{ij}n_i n_j} \tag{2.2}$$

из которого в изотропном случае и следует, что течение возможно при $|\nabla p| > \gamma$, но для анизотропных сред это представление мало информативно. Поэтому для интерпретации условия, задаваемого неравенством (2.1), по аналогии с определением направленной проницаемости [4] можно ввести коэффициент "направленной подвижности"

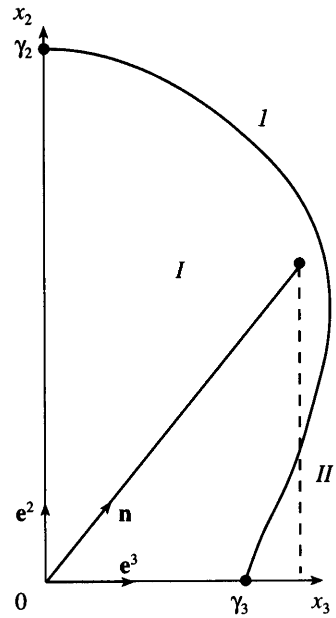
$$P(|\nabla p|, n_i) = -\frac{\mu_0 w_i n_i}{|\nabla p|} = k_{ij}n_i n_j - \frac{t_{ij}n_i n_j}{|\nabla p|} \tag{2.3}$$

Тогда условие начала течения сводится к требованию положительности коэффициента подвижности: $P(|\nabla p|, n_i) > 0$. Таким образом, уравнение фильтрации (1.12) справедливо, если коэффициент подвижности при приложении воздействия в направлении n_i больше нуля.

Для изотропной среды добавление к этой системе условия отсутствия течения ($w_i = 0$), если коэффициент подвижности отрицательный, полностью бы определило закон фильтрации. Однако в анизотропных пористых и трещиноватых средах формулировка (1.12) закона фильтрации вязкопластичной жидкости приводит к большему набору возможностей.

Действительно, в анизотропных средах выполнение условия начала течения $P(|\nabla p|, n_i) > 0$ для всех направлений n_i гарантирует реализацию пространственного (трехмерного) движения вязкопластичной жидкости в соответствии с уравнением (1.12). Однако, как известно [5], на главных направлениях тензоры второго ранга принимают экстремальные значения направленных свойств. Поэтому если $P(|\nabla p|, n_i) < 0$, то это еще не означает, что фильтрация вязкопластичной жидкости невозможна. В самом деле, положим для определенности, что $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$. Тогда нетрудно убедиться в том, что и при выполнении условия $P(|\nabla p|, n_i) < 0$ возможно неравенство

$$\nabla_i p e_i^3 > \gamma_3^* \tag{2.4}$$



Сечение поверхности нулевой направленной подвижности при $k_2 = k_3$ и $d_3/d_2 = 3$

где $\gamma_\alpha^* = 4\gamma/3$ (см. фигуру). Последнее означает, что приложенного в направлении n_i градиента давления достаточно для того, чтобы условие начала течения было выполнено лишь для одной системы каналов. В этом случае фильтрационное течение одномерно и описывается уравнением движения (1.3) при $\alpha = 3$. Возможно и двумерное течение, если $P(|\nabla p|, n_i) < 0$, но

$$(k_2n_2^2 + k_3n_3^2)|\nabla p||n_0| - (k_2\gamma_2^* n_2^2 + k_3\gamma_3^* n_3^2) > 0 \tag{2.5}$$

где $|n_0|$ длина проекции орта n_i на плоскость x_2x_3. Таким образом закон фильтрации вязкопластичной жидкости в анизотропных пористых средах допускает одно-, двух- и трехмерные формулировки. Под трехмерной формулировкой закона фильтрации подразумевается вариант, в котором выполняется условие начала течения (2.3), двумерной – (2.5), одномерной – (2.4).

Для унификации записи закона фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде для ортотропной симметрии фильтрационных свойств введем следующие обозначения тензоров: $e_{ij}^{(n)}$, $k_{ij}^{(n)}$, $t_{ij}^{(n)}$, где n = 1, 2, 3 и обозначает число диад $e_i^\beta e_j^\beta$, $k_\beta e_i^\beta e_j^\beta$, $k_\beta\gamma_\beta^* e_i^\beta e_j^\beta$, соответственно образующих тензоры. При этом для $n = 3$ тензоры представляются в виде суммы всех трех диад, для $n = 2$ – в виде суммы диад с индексами 2 и 3, а для $n = 1$ – одной диадой с индексом 3 (здесь учитывается, что $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$). Используя введенные обозначения, уравнение фильтрации (1.8) можно представить в виде

$$w_i = -\frac{k_{ij}^{(3)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{(3)}}{\mu_0} n_j$$

а закон фильтрации (1.3) запишется аналогично, но с индексом 1 в круглых скобках. Введем следующие обозначения:

$$A^{(n)} = \sqrt{e_{ij}^{(n)}\nabla_i p\nabla_j p k_{ij}^{(n)} n_i n_j} - t_{ij}^{(n)} n_i n_j$$

$$B^{(n)} = \left|\nabla_i p e_i^n\right| - \gamma_n^*$$

Тогда варианты закона фильтрации вязкопластичной жидкости для ортотропной симметрии в трехмерной, двухмерной и одномерной формулировке можно записать в виде

$$A^{(3)} > 0 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{(3)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{(3)}}{\mu_0} n_j \tag{2.6}$$

$$A^{(3)} < 0,\quad A^{(2)} > 0 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{(2)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{(2)}}{\mu_0\sqrt{e_{ij}^{(2)}\nabla_i p\nabla_j p}}\nabla_j p \tag{2.7}$$

$$A^{(3)} < 0,\quad A^{(2)} < 0,\quad A^{(1)} > 0 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{(1)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{(1)}}{\mu_0\sqrt{e_{ij}^{(1)}\nabla_i p\nabla_j p}}\nabla_j p \tag{2.8}$$

$$A^{(3)} < 0,\quad A^{(2)} < 0,\quad A^{(1)} < 0 \Rightarrow w_i = 0 \tag{2.9}$$

т.е. движение отсутствует.

Для идеального грунта, моделируемого тремя системами капилляров, соответствующие варианты закона фильтрации имеют вид:

$$B^{(n)} > 0,\quad n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i = -\frac{1}{\mu_0}k_{ij}^{(3)}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha\gamma_\alpha^* e_i^\alpha e_j^\alpha\frac{\nabla_j p}{\left|e_n^\alpha\nabla_n p\right|} \tag{2.10}$$

$$B^{(1)} < 0,\quad B^{(n)} > 0,\quad n = 2, 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_i = -\frac{1}{\mu_0}k_{ij}^{(2)}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}\left(k_2\gamma_2^* e_i^2 e_j^2\frac{\nabla_j p}{\left|e_n^2\nabla_n p\right|} + k_3\gamma_3^* e_i^3 e_j^3\frac{\nabla_j p}{\left|e_n^3\nabla_n p\right|}\right) \tag{2.11}$$

$$B^{(n)} < 0,\quad n = 1, 2,\ B^{(3)} > 0 \Rightarrow w_i = -\frac{1}{\mu_0}k_{ij}^{(1)}\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}k_3\gamma_3^* e_i^3 e_j^3\frac{\nabla_j p}{\left|e_n^3\nabla_n p\right|} \tag{2.12}$$

$$B^{(n)} < 0,\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i = 0 \tag{2.13}$$

Для унификации записи закона фильтрации вязкопластичной жидкости в трещиноватой среде с ортотропной симметрией фильтрационных свойств введем следующие обозначения тензоров: $e_{ij}^{(n)}$, $k_{ij}^{*(n)}$, $t_{ij}^{*(n)}$, где $n = 1, 2, 3$ и обозначает число тензоров $e_i^\beta e_j^\beta$, $k_{ij}^\alpha = k_\alpha(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)$, $t_{ij}^\alpha = k_\alpha\lambda_\alpha^*(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)$ соответственно и $\lambda_\alpha^* = 3\lambda/2$. При этом для $n = 3$ тензоры представляются в виде суммы всех трех тензоров, для $n = 2$ – в виде суммы двух тензоров с индексами 2 и 3, а для $n = 1$ – одним тензором с индексом 3 (здесь учитывается, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).

Введем следующие обозначения:

$$A^{*(n)} = \sqrt{e_{ij}^{(n)}\nabla_i p\nabla_j p k_{ij}^{*(n)} n_i n_j} - t_{ij}^{*(n)} n_i n_j$$

$$B^{*(n)} = \sqrt{(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_i p\nabla_j p} - \lambda_n^*$$

Используя введенные обозначения, варианты закона фильтрации вязкопластичной жидкости для трещиноватой среды имеют вид

$$A^{*(n)} > 0,\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{*(3)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{*(3)}}{\mu_0} n_j \tag{2.14}$$

$$A^{*(3)} < 0,\ A^{*(n)} > 0,\ n = 1, 2 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{*(2)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{*(2)}}{\mu_0\sqrt{e_{ij}^{(2)}\nabla_i p\nabla_j p}}\nabla_j p \tag{2.15}$$

$$A^{*(n)} < 0,\ n = 3, 2,\ A^{*(1)} > 0 \Rightarrow w_i = -\frac{k_{ij}^{*(1)}}{\mu_0}\nabla_j p + \frac{t_{ij}^{*(1)}}{\mu_0\sqrt{e_{ij}^{(1)}\nabla_i p\nabla_j p}}\nabla_j p \tag{2.16}$$

$$A^{*(n)} < 0,\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i = 0 \tag{2.17}$$

Для идеального грунта, моделируемого тремя системами трещин, соответствующие варианты закона фильтрации имеют вид

$$B^{*(n)} > 0,\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3}(k_\beta + k_\gamma)e_i^\alpha e_j^\alpha\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{k_\alpha\lambda_\alpha^*(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_j p}{\sqrt{(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_i p\nabla_j p}} \tag{2.18}$$

$$B^{*(3)} < 0,\ B^{*(n)} > 0,\ n = 1, 2 \Rightarrow w_i =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=2}^{3}(k_\beta + k_\gamma)e_i^\alpha e_j^\alpha\nabla_j p + \frac{1}{\mu_0}\sum_{\alpha=2}^{3}\frac{k_\alpha\lambda_\alpha^*(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_j p}{\sqrt{(e_i^\beta e_j^\beta + e_i^\gamma e_j^\gamma)\nabla_i p\nabla_j p}} \tag{2.19}$$

$$B^{*(n)} < 0,\ n = 3, 2,\ B^{*(1)} > 0 \Rightarrow w_i =$$

$$= -\frac{k_3}{\mu_0}\left[1 - \frac{\lambda_3^*}{\sqrt{(e_i^1 e_j^1 + e_i^2 e_j^2)\nabla_i p\nabla_j p}}\right](e_i^1 e_j^1 + e_i^2 e_j^2)\nabla_j p \tag{2.20}$$

$$B^{*(n)} < 0,\ n = 1, 2, 3 \Rightarrow w_i = 0 \tag{2.21}$$

3. Законы фильтрации вязкопластичной жидкости в идеальном пористом и трещиноватом грунте, моделирующем ортотропную пористую среду, (2.10)–(2.13) и (2.18)–(2.21), как уже отмечалось, обладают дискретностью, которая проявляется в том, что в зависимости от величины и ориентации вектора фильтрационного давления $\nabla_i p$ "включается" или "выключается" движение в одной или нескольких системах капилляров или трещин. При этом предельный градиент, если не учитывать различные варианты одномерных течений и комбинации двумерных течений, для каждого типа течения есть величина постоянная. В законах фильтрации вязкопластичной жидкости (2.6)–(2.9) и (2.14)–(2.17) предельный градиент для трех- и двухмерных течений определяется непрерывно и образует поверхность предельных градиентов

$$P(|\nabla p|, n_i) = -\frac{\mu_0 w_i n_i}{|\nabla p|} = k_{ij}n_i n_j - \frac{t_{ij}n_i n_j}{|\nabla p|} = 0$$

Однако и законы фильтрации (2.6)–(2.9) и (2.14)–(2.17) содержат элементы дискретности, которые проявляются и в их многовариантности, и внутреннем противоречии, состоящем в том, что при превышении градиентом фильтрационного давления значения предельного градиента вдоль произвольного, не главного направления, вектор скорости фильтрации содержит отличные от нуля компоненты вдоль всех трех координатных направлений, даже в том случае, когда проекция вектора градиента фильтрационного давления не превышает предельный градиент вдоль некоторых главных направлений. Поэтому в качестве "контрольного" эксперимента можно предложить следующую схему экспериментальных измерений для идеального пористого грунта. Так как тензоры коэффициентов проницаемости и предельных градиентов для ортотропного материала соосны, причем значения тензора k_{ij} могут быть определены в независимом эксперименте с ньютоновской жидкости, то и для определения тензора t_{ij} достаточно определить его главные значения на тех же трех образцах, вырезанных вдоль главных направлений, которые использовались для определения k_{ij}. Для проверки справедливости законов (2.6)–(2.9) необходимо изготовить еще один образец, направление оси симметрии которого не будет совпадать с главным. Удобнее всего взять образец, направленный по биссектрисе, например, плоскости x_1x_2. Тогда при выполнении закона фильтрации вязкопластичной жидкости (2.4) значение предельного градиента будет определяться неравенством $\sqrt{e_{ij}^{(2)}\nabla_i p\nabla_j p k_{ij}^{(2)}}\, n_i n_j > t_{ij}^{(2)} n_i n_j$, а при справедливости законов фильтрации (2.10)–(2.13) неравенствами $|\nabla_i p e_i^1| > \gamma_1$ или $|\nabla_i p e_i^2| > \gamma_2$ в зависимости от того, какое значение предельного градиента будет большим.

Заключение. Выписаны законы фильтрации вязкопластичных жидкостей для анизотропных пористых и трещиноватых сред с периодической микроструктурой. Показано, что законы фильтрации вязкопластичных жидкостей в трансверсально-изотропных и ортотропных пористых и трещиноватых средах многовариантные и допускают одно-, двух- и трехмерные течения. Анализ структуры уравнений фильтрации вязкопластичной жидкости показал, что при построении уравнений необходимо различать тензор коэффициентов проницаемости и тензор предельных градиентов, которые могут обладать различной симметрией фильтрационных свойств. Проведенные исследования позволяют учесть анизотропию при решении прикладных задач по фильтрации буровых растворов и аномальных нефтей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-33699).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Е.Г., Исаев В.И.* Гидроаэромеханика в бурении. М.: Недра, 1987. 304 с.
2. *Гукасов Н.А.* Механика жидкости и газа. М.: Недра, 1996. 443 с.
3. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
4. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. Москва: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 496 с.
5. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
6. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963.Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
7. *Дмитриев Н.М.* Просветность и проницаемость пористых сред с периодической микроструктурой // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 79–85.
8. *Scheidegger A. E.* The Physics of Flow though porous media. Toronto: Univ. Toronto Press, 1974. 353 p.
9. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. N.Y.: Amer. Elsevier, 1972. 764 p.
10. *Turcotte D., Schubert G.* Geodynamics : Applications of Continuum Physics to Geological Problems. N.Y.: Wiley, 1982. 450 p.

Москва
E-mail: dmitriev.msc@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
17.I.2006