

УДК 532.546

© 2006 г. А. А. АФАНАСЬЕВ, А. А. БАРМИН

О ФАЗОВЫХ РАЗРЫВАХ В ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВОДЫ

Рассматривается фильтрация жидкости в пористой среде с учетом процессов теплопроводности и фазовых переходов. Изучены разрывы при фильтрационных течениях между однофазными областями, насыщенными водой и паром, а также между однофазной и двухфазной областью, насыщенной равновесной пароводяной смесью. Показано, что для выпуклой вниз ударной адиабаты разрыва внутри пароводяной смеси эволюционны только фронты испарения. Рассмотрена структура указанных фронтов и из условия существования структуры разрыва между водой (паром) и пароводяной смесью найдено дополнительное к законам сохранения условие, необходимое для корректной постановки задач, решение которых содержит указанный фронт.

Ключевые слова: фильтрация, фазовые переходы, разрывы, эволюционность, структура разрывов.

В работах [1–3] рассмотрены одномерные задачи об инъекции воды в паросодержащий геотермальный пласт. Показано [1], что существуют параметры задачи, для которых решение, содержащее исключительно однофазные области фильтрации воды или пара, термодинамически противоречиво (имеются области, в которых пар переохлажден, т.е. температура пара меньше температуры равновесия между водой и паром или области, в которых вода перегрета). В [3] в ряде случаев удалось построить решение с промежуточной областью совместной фильтрации жидкостей, т.е. областью фильтрации пароводяной смеси, причем для корректной постановки задачи необходимо было поставить дополнительное условие на одном из разрывов. Такое условие бралось из эвристических соображений. В [4, 5] предложена модель структуры разрывов внутри пароводяной смеси. В работе [6] рассмотрена аналогичная [1–3] задача об инъекции перегретого пара в нефтяной пласт.

Предложенное в данной работе описание позволило провести качественное исследование типов фазовых фронтов на плоскости. Показано, что для выпуклой вниз ударной адиабаты разрыва внутри пароводяной смеси эволюционны только фронты испарения. В предположении слабой неравновесности [4] предложена модель структуры разрыва между областями фильтрации воды (пара) и пароводяной смеси и разрыва между водой и паром. Из условия существования структуры разрыва найдено дополнительное к законам сохранения условие, необходимое для корректной постановки задач. Показано, что эволюционные фронты между водой и паром могут не иметь структуры.

1. Законы сохранения на фазовом разрыве. Систему одномерных законов сохранения массы и энергии, описывающую процессы совместной неизотермической фильтрации воды и пара в пористой среде, запишем в виде [4]

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Phi \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho_m(s, P, T) &= m s \rho_w + m(1-s)\rho_v + (1-m)\rho_s \\ \rho e_m(s, P, T) &= m s \rho_w e_w + m(1-s)\rho_v e_v + (1-m)\rho_s e_s \\ \kappa(s, P, T) &= \rho_w \frac{k f_w(s)}{\mu_w} + \rho_v \frac{k f_v(s)}{\mu_v} \\ \varphi(s, P, T) &= \rho_w \frac{k f_w(s)}{\mu_w} h_w + \rho_v \frac{k f_v(s)}{\mu_v} h_v \\ \lambda_m(s, P, T) &= m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_v + (1-m)\lambda_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ_m – эффективное значение плотности среды, ρe_m – эффективная плотность внутренней энергии, $-\kappa \partial P / \partial x$ – поток массы ($\kappa > 0$), $-\varphi \partial P / \partial x$ – поток энергии, обуславливаемый потоком среды ($\varphi > 0$), $\lambda_m \partial T / \partial x$ – поток энергии, связанный с процессами теплопроводности, s – водонасыщенность (объемное содержание воды в порах), P – давление, T – температура среды, m – пористость пласта, k – проницаемость пористой среды, $f(s)$ – относительная фазовая проницаемость, μ – вязкость, e – плотность внутренней энергии, h – энтальпия. Индексы: m – эффективное значение в пласте, w – значение в воде, v – значение в паре, s – значение в скелете пористой среды.

Процессы тепломассопереноса в пористой среде описываются системой вида (1.1) для сред, подчиняющихся закону фильтрации Дарси, который для каждой фазы имеет вид

$$V_i = -\frac{k f_i(s) \partial P}{\mu_i} \frac{\partial P}{\partial x} \quad i = v, w$$

где V – скорость фильтрации.

Обозначим через $T_f(P)$ температуру термодинамического равновесия между водой и паром, т.е. температуру фазового перехода при данном давлении. Считаем, что пароводяная смесь находится в термодинамическом равновесии: $T = T_f(P)$. Таким образом, состояние смеси определяется двумя параметрами: водонасыщенностью и давлением, а температура выражается через давление. В области фильтрации пара или воды справедливо $s = 0$ или $s = 1$ соответственно и состояние среды характеризуется давлением и температурой.

Запишем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\chi \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ \chi &= \varphi + \lambda_m T_f'(P), \quad F = T - T_f(P) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функция F показывает величину перегрева среды, причем $F \geq 0$ в паре, $F = 0$ в пароводяной смеси, $F \leq 0$ в воде.

При фильтрации пара или воды уравнения (1.2) будут представлять собой систему двух параболических уравнений [1, 2]. При фильтрации пароводяной смеси система (1.2) вырождается и имеет одно гиперболическое и пару параболических малых возмущений. Малые возмущения берутся пропорциональными $\exp(kx - \omega t)$, тогда корни дисперсионного уравнения системы (1.2) в случае фильтрации пароводяной смеси имеют вид ($k \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$)

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{\kappa'_s \chi - \chi'_s \kappa \partial P}{\Psi} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad i \frac{\omega}{k^2} = \frac{\Psi}{(\rho_m)'_s (\rho e_m)'_p - (\rho e_m)'_s (\rho_m)'_p} > 0 \quad (1.3)$$

$$\Psi = (\rho_m)'_s \chi - (\rho e_m)'_s \kappa > 0, \quad (\rho_m)'_s (\rho e_m)'_p - (\rho e_m)'_s (\rho_m)'_p > 0 \quad (1.4)$$

Неравенство (1.3) есть требование диссипативности системы (1.2). Для моделей воды и свойств пористой среды справедливы соотношения (1.4), из которых следует условие диссипативности (1.3). Ниже предполагается выполнение (1.4).

В дальнейшем будут рассмотрены решения системы (1.2) в окрестности фронтов фазовых переходов. Предполагается, что на фазовых разрывах температура среды совпадает с равновесной температурой, поэтому $F = 0$ на разрыве, а $\partial F / \partial x \neq 0$ на разрыве со стороны воды или пара и $\partial F / \partial x = 0$ со стороны пароводяной смеси. Анализ системы (1.2) показывает, что давление и температура на фазовом разрыве непрерывны, а рвутся только их градиенты и водонасыщенность [4].

Законы сохранения массы и энергии на конечном разрыве системы (1.2) имеют вид

$$W[\rho_m] + \left[\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.5)$$

$$W[\rho e_m] + \left[\chi \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \left[\lambda_m \frac{\partial F}{\partial x} \right] = 0$$

где W – скорость разрыва. Из (1.1) следуют соотношения $(\rho_m)'_s = (\rho_m)'_s(P, T)$, $(\rho e_m)'_s = (\rho e_m)'_s(P, T)$, с учетом которых (1.5) запишем в виде

$$W = -\left(\frac{H(s_+)}{1+G_+} - \frac{H(s_-)}{1+G_-} \right) \frac{(1+G_-)}{s_+ - s_-} \Psi(s_-) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (1.6)$$

$$(1+G_+) \Psi(s_+) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_+ = (1+G_-) \Psi(s_-) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (1.7)$$

$$H(s) = \frac{1}{(\rho_m)'_s} \frac{\kappa(s)}{\Psi(s)}, \quad G(s) = \lambda_m(s) \frac{(\rho_m)'_s \partial F}{\Psi(s) \partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^{-1}$$

Индексы “-”, “+” соответствуют значениям слева и справа от разрыва. Функцию $H(s)$ будем называть в дальнейшем ударной адиабатой. Безразмерный параметр $G(s)$ пропорционален F'_x и, следовательно, $G(s) \neq 0$ на разрыве со стороны воды или пара, и $G(s) = 0$ со стороны пароводяной смеси.

Так как плотность воды больше плотности пара, то справедливо неравенство $(\rho_m)'_s = m(\rho_w - \rho_v) > 0$, поэтому знак параметра G совпадает со знаком выражения F'_x / P'_x .

Предположим, что вода находится слева от разрыва, а пар – справа, тогда в (1.6), (1.7) $s_- = 1$, $G_- = G(1)$, $s_+ = 0$, $G_+ = G(0)$. Для разрыва между водой и пароводяной смесью с водонасыщенностью равной s_* , $s_- = 1$, $G_- = G(1)$, $s_+ = s_*$, $G_+ = 0$. Для разрыва пароводяная смесь–пар $s_- = s_*$, $G_- = 0$, $s_+ = 0$, $G_+ = G(0)$. Для разрыва внутри пароводяной смеси между состояниями s_- , s_+ следует положить $G_- = 0$, $G_+ = 0$ и система (1.6), (1.7) примет вид

$$W = -\frac{H(s_+) - H(s_-)}{s_+ - s_-} \Psi(s_-) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (1.8)$$

$$\Psi(s_+) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_+ = \Psi(s_-) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (1.9)$$

Из (1.8) следует, что скорость разрыва смесь–смесь пропорциональна тангенсу угла наклона секущей к ударной адиабате между состояниями за и перед фронтом.

При заданном состоянии перед фронтом его скорость определяется только функцией $H(s)$, пропорциональной потоку массы в коротких волнах [4].

2. Фронты испарения и конденсации. На фазовом разрыве происходит либо испарение воды, либо конденсация пара. Для определения типа фазового фронта рассмотрим объемный поток среды относительно разрыва. Пусть на фронте происходит испарение воды, следовательно, объемный поток пара справа относительно фронта больше потока слева, а поток воды справа меньше, чем слева:

$$\begin{aligned} V_{v+} - m(1 - s_+)W &> V_{v-} - m(1 - s_-)W \\ V_{w-} - ms_-W &> V_{w+} - ms_+W \end{aligned} \quad (2.1)$$

Сложим неравенства (2.1) и подставим в полученное неравенство W из (1.6). Таким образом, на фронте имеет место испарение воды при

$$\begin{aligned} \left(\frac{L(s_+)}{1 + G_+} - \frac{L(s_-)}{1 + G_-} \right) (1 + G_-) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- < 0 \\ L(s) = \frac{kf_w(s)/\mu_w + kf_v(s)/\mu_v}{\Psi(s)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

При выполнении неравенства, обратного (2.2), на фазовом фронте происходит конденсация пара.

В случае разрыва внутри пароводяной смеси условие (2.2) принимает вид

$$(L(s_+) - L(s_-)) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- < 0 \quad (2.3)$$

т.е. на разрыве смесь–смесь фазовые превращения зависят от скачка функции $L(s)$.

При заданном состоянии перед фронтом фазовые превращения определяются только функцией $L(s)$, пропорциональной объемному потоку среды в коротких волнах.

3. Уравнение структуры фронта фазового разрыва. Представим характер вырождения системы (1.2) при условии $T = T_f(P)$ как результат предельного перехода $T = T_f(P) - \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ [4]. Тогда система (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\chi \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda_m \varepsilon \frac{\partial s}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Переходя в (3.1) к системе координат (ξ, t) , движущейся со скоростью W относительно исходной (x, t) , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial \xi} + W \rho_m \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\chi \frac{\partial P}{\partial \xi} + W \rho e_m \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda_m \frac{\partial F}{\partial \xi} - \lambda_m \varepsilon \frac{\partial s}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где P и F постоянны внутри структуры. Будем искать структуру разрывов – стационарные решения системы (3.2) между точками

$$\xi \rightarrow -\infty, \quad s \rightarrow s_-, \quad \frac{dP}{d\xi} \rightarrow \frac{dP}{d\xi}\Big|_-, \quad \frac{dF}{d\xi} \rightarrow \frac{dF}{d\xi}\Big|_- \quad (3.3)$$

$$\xi \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow s_+, \quad \frac{dP}{d\xi} \rightarrow \frac{dP}{d\xi}\Big|_+, \quad \frac{dF}{d\xi} \rightarrow \frac{dF}{d\xi}\Big|_+ \quad (3.4)$$

В предположении стационарности, при учете граничных условий (3.3), (3.4), из системы (3.2) получим уравнение структуры фазового разрыва:

$$\lambda_m \varepsilon \frac{\kappa ds}{\Psi d\xi} = - \left\{ H(s) - \left(\frac{H(s_-)}{1+G_-} + \left(\frac{H(s_+)}{1+G_+} - \frac{H(s_-)}{1+G_-} \right) \frac{s-s_-}{s_+-s_-} \right) \right\} (1+G_-) \Psi(s_-) \frac{dP}{d\xi}\Big|_- \quad (3.5)$$

Внутри структуры фазового разрыва между водой (паром) и пароводяной смесью имеется критическая поверхность $s = 1 (s = 0)$, по разные стороны от которой независимые переменные в системе (3.2) различны. Со стороны пароводяной смеси s и $dP/d\xi$ независимы, а $dF/d\xi = 0$. Со стороны воды (пара) $dP/d\xi$ и $dF/d\xi$ – независимые величины, а $s = 1 (s = 0)$, и поэтому, из (3.2) следует, что $dP/d\xi = \text{const}$ и $dF/d\xi = \text{const}$.

Из (3.2) следует, что на критической поверхности выполняется соотношение

$$\varepsilon \frac{ds}{d\xi}\Big|_+ = \frac{dF}{d\xi}\Big|_- \quad (3.6)$$

Таким образом, внутри структуры со стороны пароводяной смеси s и $dP/d\xi$ изменяются непрерывным образом от значений (3.4) до тех пор, пока водонасыщенность не станет равной $s = 1 (s = 0)$. Затем имеет место слабый разрыв s и F , удовлетворяющий (3.6), на котором со стороны воды (пара) $dP/d\xi = dP/d\xi|_-$, $dF/d\xi = dF/d\xi|_-$. Внутри структуры со стороны воды (пара) $dP/d\xi$ и $dF/d\xi$ постоянны, поэтому условия (3.3) выполнены.

Так как $dP/d\xi$ и $dF/d\xi$ постоянны, для существования структуры разрыва достаточно потребовать существования интегральной кривой уравнения (3.5), соединяющей значения s_- и s_+ .

Внутри структуры фазового разрыва вода–пар имеются две критические поверхности $s = 0$ и $s = 1$.

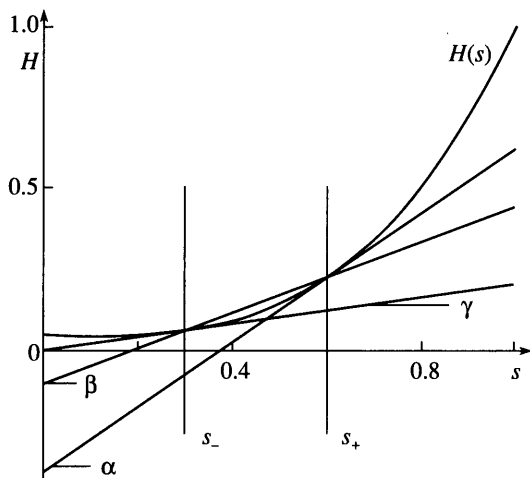
Для рассмотрения структуры разрыва смесь–смесь в уравнении (3.5) следует положить $G_- = 0$, $G_+ = 0$, тогда (3.5) примет вид [4]

$$\lambda_m \varepsilon \frac{\kappa ds}{\Psi d\xi} = - \left\{ H(s) - \left(H(s_-) + (H(s_+) - H(s_-)) \frac{s-s_-}{s_+-s_-} \right) \right\} \Psi(s_-) \frac{dP}{d\xi}\Big|_- \quad (3.7)$$

Внутри структуры фронта смесь–смесь критических поверхностей нет.

4. Разрывы внутри пароводяной смеси. Рассмотрим разрыв внутри пароводяной смеси. Из уравнения (1.8) следует, что скорость разрыва пропорциональна тангенсу угла наклона секущей к ударной адиабате между состояниями перед и за разрывом (фиг. 1). Скорости гиперболических малых возмущений

$$C = - \frac{\kappa'_s \chi - \chi'_s \kappa \partial P}{\Psi} \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial H}{\partial s} \Psi \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.1)$$



Фиг. 1. Ударная адиабата разрыва смесь–смесь $H(s)$; $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\gamma)$ определяют скорости малых возмущений в точках s_+ и s_- , $\operatorname{tg}(\beta)$ – скорость фронта

пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к ударной адиабате в соответствующем состоянии

$$C(s_+) \sim \operatorname{tg} \alpha, \quad W \sim \operatorname{tg} \beta, \quad C(s_-) \sim \operatorname{tg} \gamma$$

На разрыве смесь–смесь выполняются три условия: законы сохранения массы, энергии и условие непрерывности давления, поэтому для эволюционности фронта необходимо потребовать, чтобы только два малых возмущения уходили от разрыва. В каждую сторону от фронта смесь–смесь обязательно уходит по одному малому параболическому возмущению, поэтому для эволюционности необходимо, чтобы малые гиперболические возмущения приходили к разрыву $C(s_-) > W > C(s_+)$, т.е. должны выполняться неравенства

$$(\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta))\psi(s_-)\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- > 0, \quad (\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\gamma))\psi(s_-)\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- > 0 \quad (4.2)$$

Вид ударной адиабаты зависит от относительных фазовых проницаемостей $f(s)$ пара и воды, которые определяются свойствами фильтрующегося флюида и пористой среды. Если относительные фазовые проницаемости моделировать в виде $f_v(s) = (1 - s)$, $f_w(s) = s^3$, то ударная адиабата выпукла вниз, а если в виде $f_v(s) = (1 - s)^2$, $f_w(s) = s^3$, то адиабата может содержать точку перегиба. Зависимость $f_v(s) = (1 - s)^2$ соответствует прилипанию пара к скелету пористой среды при малом объемном содержании пара ($s \rightarrow 1$). Ниже считаем, что адиабата выпукла вниз, тогда, пользуясь условием $\psi > 0$, (4.2) запишем в виде (фиг. 1)

$$(s_+ - s_-)\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- > 0 \quad (4.3)$$

Если свойства пористой среды и фильтрующегося флюида таковы, что функция $L(s)$ убывает (например, при $f_v(s) = (1 - s)$, $f_w(s) = s^3$), то, согласно критерию (2.3), условию (4.3) удовлетворяют только фронты испарения. Таким образом, для выпуклой вниз

$H(s)$ и убывающей $L(s)$ эволюционными внутри пароводяной смеси будут только фронты испарения.

Из уравнения (1.9) при условии $\psi > 0$ следует, что давление на разрыве внутри пароводяной смеси не может иметь экстремума.

Выражение в фигурных скобках уравнения структуры разрыва смесь–смесь (3.7) представляет собой расстояние между секущей к ударной адиабате между состояниями перед и за разрывом и самой адиабатой. Рассмотрим разрыв смесь–смесь, удовлетворяющий условию (4.3). Для определенности положим $\partial P/\partial x|_- > 0$, тогда $s_+ > s_-$. В таком случае для существования структуры разрыва необходимо, чтобы $ds/d\xi > 0$, т.е. чтобы расстояние между ударной адиабатой и секущей было отрицательным. Из фиг. 1 видно, что все эволюционные разрывы имеют структуру. Разрывы, не удовлетворяющие условию (4.3), структуры не имеют. Таким образом, для фронтов внутри пароводяной смеси условие существования структуры не вносит дополнительных ограничений на вид эволюционных разрывов, а неэволюционные фронты при рассматриваемом механизме структуры не имеют.

5. Разрывы между пароводяной смесью и водой (паром). Рассмотрим разрыв между пароводяной смесью и областью фильтрации воды или пара. Для определенности считаем, что пароводяная смесь находится справа от разрыва, а вода (пар) – слева, тогда $G_+ = 0$, $G = G_- \neq 0$, а $s_- = 0$ или $s_- = 1$, если слева находится пар или вода соответственно.

Рассмотрим случай, когда слева от фронта находится вода и параметр $G > 0$ (исследование случая $G \leq 0$ разрыва вода–смесь, а также разрыва пар–смесь приводит к качественно аналогичным результатам). Так как температура воды меньше температуры кипения, то $\partial F/\partial x|_- > 0$ и, следовательно, при $G > 0$ $\partial P/\partial x|_- > 0$.

Условия (1.6), (1.7) в случае разрыва вода–смесь имеют вид

$$W = \frac{(1 + G)H(s_+) - H(1)}{s_+ - 1} \psi(1) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (5.1)$$

$$\psi(s_+) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_+ = (1 + G) \psi(1) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (5.2)$$

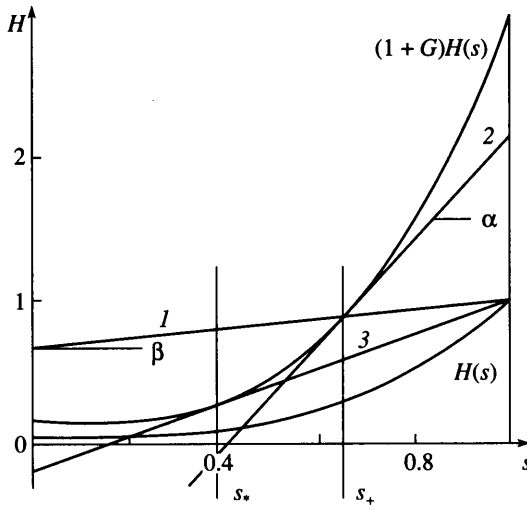
Таким образом, скорость разрыва пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, проходящей через точки $(1 + G)H(s_+)$ и $H(1)$ ударных адиабат (фиг. 2 прямая 1). Скорость малого гиперболического возмущения в пароводяной смеси на разрыве равна

$$C = -\frac{\partial H}{\partial s}(s_+) \psi(s_+) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_+ = -(1 + G) \frac{\partial H}{\partial s}(s_+) \psi(1) \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_- \quad (5.3)$$

и пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, касающейся адиабаты $(1 + G)H(s)$ в точке s_+ (фиг. 2, прямая 2).

На разрыве между пароводяной смесью и водой выполняются четыре условия: законы сохранения массы и энергии, условие непрерывности давления и непрерывности температуры. От фронта вода–смесь всегда уходят три малых параболических возмущения: два – относительно фронта в сторону воды и одно – в сторону пароводяной смеси. Если гиперболическое возмущение приходит к разрыву, то фронт будет априорно эволюционным, а если уходит, то для эволюционности фронта необходимо потребовать выполнение пятого дополнительного условия на разрыве.

При $G > 0$ гиперболическое возмущение приходит к фронту $W > C$, если $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ (фиг. 2). При $s = s_*$ прямая, определяющая скорость разрыва, касается ударной адиабаты $(1 + G)H(s)$ (прямая 3), тогда при $s \in (s_*, 1)$ гиперболическое возмущение приходит к разрыву, а при $s \in (0, s_*)$ уходит. При $s = s_*$ разрыв вода–смесь движется с характеристической скоростью $W = C$ и будет фронтом Жуге.



Фиг. 2. Адиабаты разрыва вода–смесь, $\operatorname{tg}(\alpha)$ определяет скорость малого возмущения в пароводяной смеси, $\operatorname{tg}(\beta)$ – скорость фронта

Из (5.1)–(5.3) и (2.2) следует, что разрыв между водой (паром) и смесью будет фронтом Жуге при выполнении равенства

$$\frac{(1 + G)H(s_+) - H(s_-)}{s_+ - s_-} = (1 + G)\frac{\partial H}{\partial s}(s_+), \quad s_- = 0, 1 \quad (5.4)$$

и на фронте интенсивность фазовых превращений равна нулю при

$$(1 + G)L(s_+) - L(s_-) = 0, \quad s_- = 0, 1 \quad (5.5)$$

В плоскости (G, s) удобно изобразить различные типы фронта вода(пар) – смесь (фиг. 3). Фронту Жуге соответствуют линии 1a, 1c, которые определяются уравнением (5.4). Линия 2a определяется уравнением (5.5). Линия 3 ($W = 0$) разделяет области, в которых направление движения фронта относительно пористой среды совпадает с направлением движения воды (пара) на нем ($W/V_+ > 0$) или противоположно ($W/V_- < 0$).

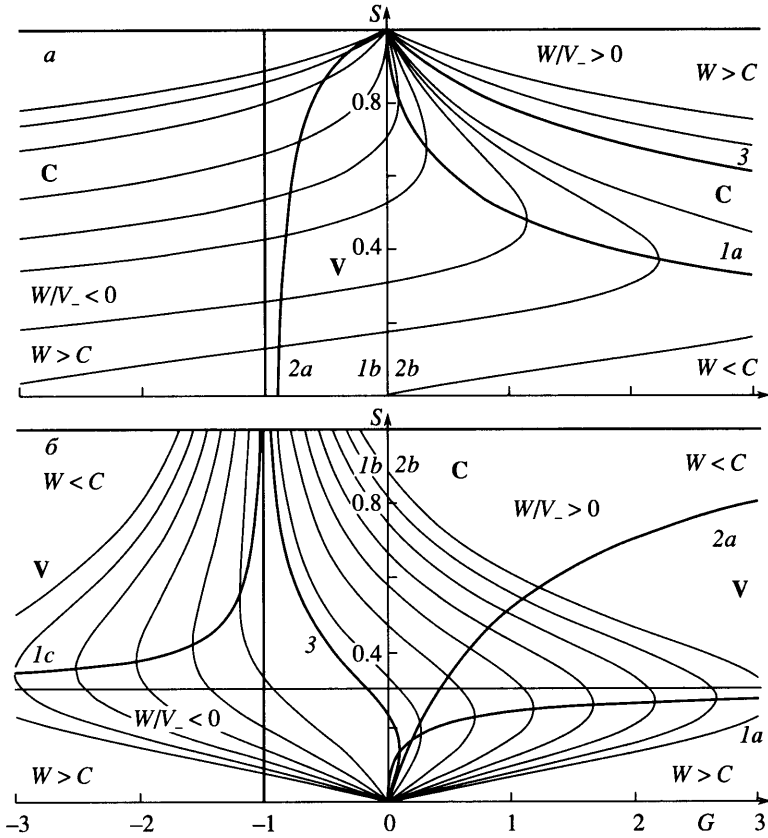
Из (5.2) получаем, что давление на разрыве между водой (паром) и пароводяной смесью при $G < -1$ имеет локальный экстремум. В этом случае вода (пар) и пароводяная смесь на фронте движутся в противоположные стороны относительно пористой среды.

Из линий уровня отношения W/V_- на фиг. 3, которые при фиксированном градиенте давления в воде (паре) также будут линиями уровня W , видно, что при фиксированном G скорость фронта имеет экстремум в точке Жуге. Это суть свойство фронта Жуге [7].

На оси $G = 0$ соотношения на разрыве вода(пар) – смесь такие же, как на разрыве смесь–смесь, и эволюционность такого фронта определяется неравенством (4.3). Если условие (4.3) выполнено, то разрыв вода(пар) – смесь будет фронтом испарения. Ось $G = 0$ разделяет фронты испарения и конденсации, и направления распространения малого возмущения.

При $G_+ = 0, G_- = G, s_- = 1$ уравнение (3.5) описывает структуру разрыва вода–смесь:

$$\lambda_m \varepsilon \frac{\kappa ds}{\psi d\xi} = - \left\{ (1 + G)H(s) - \left(H(1) + ((1 + G)H(s_+) - H(1)) \frac{s-1}{s_+-1} \right) \right\} \psi(1) \frac{dP}{d\xi} \Big|_- \quad (5.6)$$

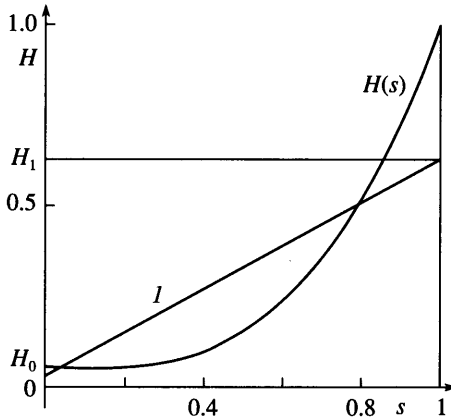


Фиг. 3. Диаграммы на плоскости (G, s) для разрыва вода–смесь (а) и пар–смесь (б). Линии 1 разделяют области, в которых характеристика приходит к разрыву $W > C$ или уходит от него $W < C$. Линии 2 разделяют области с фронтом испарения V и конденсации C . На линии 3 $W = 0$. Тонкие линии – линии уровня W/V_- .

Выражение в фигурных скобках представляет собой расстояние между ударной адиабатой $(1 + G)H(s)$ и прямой, соединяющей точки $(1 + G)H(s_+)$ и $H(1)$, т.е. прямой l (фиг. 2). Так как $s_+ < s_-$, для существования структуры разрыва должно выполняться неравенство $ds/d\xi < 0$, т.е. выражение в фигурных скобках должно быть положительным. Из фиг. 2 видно, что разрыв вода–смесь имеет структуру при $s_+ \in [s_*, 1]$, т.е. если гиперболическое возмущение приходит к разрыву ($W > C$) или разрыв будет фронтом Жуге ($W = C$), и не имеет структуры при $s_+ \in [0, s_*)$, если гиперболическое возмущение уходит от разрыва ($W < C$). Действительно при $s_+ \in [s_*, 1]$ прямая l пересекает ударную адиабату $(1 + G)H(s)$ один раз на промежутке $s \in [s_+, 1]$ и выражение в фигурных скобках (5.6) положительно, а при $s_+ \in [0, s_*)$ прямая l пересекает $(1 + G)H(s)$ два раза и выражение в фигурных скобках (5.6) меняет знак и становится отрицательным.

Таким образом, структуру имеют только априорно эволюционные разрывы между водой (паром) и пароводяной смесью и фронты Жуге. В плоскости (G, s) (фиг. 3) фронтам, имеющим структуру, соответствуют области $W > C$ и их границы $W = C$ (линии $1a, 1c$).

Если гиперболическое возмущение уходит от разрыва вода(пар) – смесь, то для эволюционности фронта на нем необходимо поставить дополнительное условие. Рассмотр-



Фиг. 4. Тангенс угла наклона прямой I определяет скорость разрыва вода–пар.
 $H_0 = H(0)/(1 + G_+)$, $H_1 = H(1)/(1 + G_-)$

рение структуры показывает, что такому разрыву может соответствовать только фронт Жуге. Таким образом, дополнительным условием на разрыве будет $W = C$.

6. Разрывы между водой и паром. Для определенности считаем, что вода находится слева от фронта, а пар – справа. Законы сохранения на разрыве имеют вид (1.6), (1.7), с $s_- = 1$, $s_+ = 0$. Таким образом, скорость фронта вода–пар пропорциональна тангенсу угла наклона прямой между точками $H(0)/(1 + G_+)$ и $H(1)/(1 + G_-)$ (фиг. 4, прямая I).

Так как температура воды меньше, а температура пара больше равновесной температуры, то

$$\partial F/\partial x|_- > 0, \quad \partial F/\partial x|_+ > 0 \Rightarrow \text{sign} G_- = \text{sign} \partial P/\partial x|_-, \quad \text{sign} G_+ = \text{sign} \partial P/\partial x|_+$$

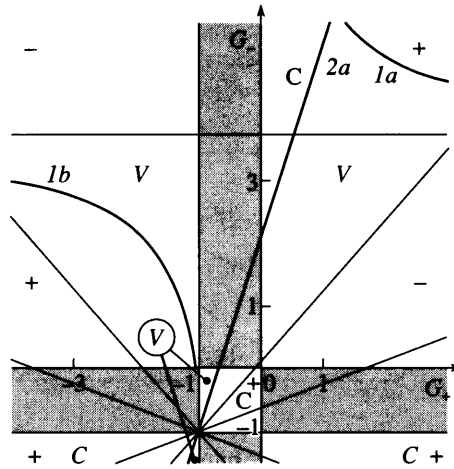
Тогда, используя условие $\psi > 0$, из (1.7) получаем, что на фронте вода–пар должно выполняться неравенство

$$G_+ G_- (1 + G_+) (1 + G_-) \geq 0 \tag{6.1}$$

На разрыве вода–пар выполняются пять условий: законы сохранения массы и энергии, условия непрерывности давления и температуры и условие термодинамического равновесия $T = T_f(P)$. Только четыре малых возмущения уходят от фронта: по два параболических в каждую сторону, поэтому фронт вода–пар всегда эволюционен.

При $s_- = 1$, $s_+ = 0$ уравнение (3.5) описывает структуру разрыва вода–пар. Выражение в фигурных скобках (3.5) представляет собой расстояние между ударной адиабатой $H(s)$ и прямой I (фиг. 4). Так как $s_+ < s_-$, для существования структуры фронта вода–пар должно выполняться неравенство $ds/d\xi < 0$. Пусть для определенности $G_- > 0$, $G_+ > 0$ (фиг. 4), тогда $\partial P/\partial x|_- > 0$ и для существования структуры необходимо потребовать положительность выражения в фигурных скобках (3.5). Если прямая I пересекает ударную адиабату $H(s)$, то выражение в фигурных скобках (3.5) меняет знак на интервале $s \in (0, 1)$ и фронт вода–пар не имеет структуры. Таким образом, эволюционный разрыв между водой и паром может не иметь структуры.

В плоскости (G_+, G_-) удобно изобразить области с различными типами разрыва вода–пар (фиг. 5). Разрыву вода–пар на диаграмме (G_+, G_-) соответствуют только области, определяемые неравенством (6.1), т.е. вся плоскость, кроме полубесконечных полос,



Фиг. 5. Диаграмма на плоскости (G_+, G_-) для разрыва вода-пар. Линии 1 разделяют области, в которых существует (+) или не существует (-) структура разрыва. Прямая 2 – граница областей с фронтом испарения V и конденсации C. Тонкие прямые – линии уровня W/V_-

ограниченных прямыми $G_{\pm} = -1.0$. Линии 1 задаются параметрически двумя уравнениями, определяемыми (5.4): при $s_+ = s, s_- = 1, G = G_-$, и $s_+ = s, s_- = 0, G = G_+$

$$G_- = \frac{H(1)(H(s) - \frac{\partial H}{\partial s}(s))^{-1}}{s-1} - 1, \quad G_+ = \frac{H(0)(H(s) - \frac{\partial H}{\partial s}(s))^{-1}}{s} - 1 \quad (6.2)$$

где s является параметром кривой.

Разрыв между водой и паром будет фронтом испарения при выполнении условия (2.2) с $s_- = 1, s_+ = 0$, а интенсивность фазовых превращений равна нулю при

$$\frac{L(0)}{1+G_+} - \frac{L(1)}{1+G_-} = 0 \quad (6.3)$$

Линия 2 на фиг. 5 определяется уравнением (6.3).

На диаграмме (G_+, G_-) представлены линии уровня отношения скорости разрыва и скорости воды на нем (W/V_-), которые при фиксированном градиенте давления в воде также будут линиями уровня W .

Из (1.7) следует, что давление на разрыве между водой и паром имеет экстремум при условии

$$(1+G_+)(1+G_-) < 0 \quad (6.4)$$

В случае (6.4) вода и пар на разрыве движутся в противоположные стороны относительно пористой среды. На фиг. 5 условию (6.4) соответствуют области $G_+ > 0, G_- < -1$ и $G_+ < -1, G_- > 0$.

Заключение. Исследованы все возможные типы разрывов между областями фильтрации воды, пара и пароводяной смеси с учетом теплопроводности и фазовых переходов. Качественно их свойства зависят только от вида функций $H(s)$ и $L(s)$, определяемых свойствами пористой среды и фильтрующегося флюида. При этом $H(s)$ (ударная адиабата) пропорциональна потоку массы, а $L(s)$ пропорциональна объемному потоку среды в

коротких волнах. Если $H(s)$ выпукла вниз, а $L(s)$ убывает, то внутри пароводяной смеси априорно эволюционны только фронты испарения.

В предположении слабой неравновесности и стационарности, структуру разрыва смесь–смесь имеют только априорно эволюционные фронты. Структуру разрыва вода(пар) – смесь имеют только априорно эволюционные разрывы и фронты Жуге. Эволюционные разрывы между водой и паром могут не иметь структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 05-01-00228, 05-01-02901 ЯФ) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4710.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
2. Кондрашов А.В., Цыпкин Г.Г. О режимах инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 86–91.
3. Бармин А.А., Кондрашов А.В. Двухфронтная математическая модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 105–112.
4. Куликовский А.Г. О фронтах испарения и конденсации в пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 85–92.
5. Куликовский А.Г. О фазовых переходах при фильтрации в теплопроводном скелете // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 85–90.
6. Насырова Л.А., Рахматуллин И.Р., Шагапов В.Ш. Гидродинамические и тепловые поля в пористой среде при инъекции перегретого пара // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 113–126.
7. Куликовский А.Г. О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. Т. 14. № 2. С. 317–319.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.2006