МЕХАНИКА

ЖИДКОСТИ И ГАЗА

№ 3 • 2006

УДК 532.517.013.4:551.465.4:551.558

© 2006 г. Л. Х. ИНГЕЛЬ

ВОЗМУЩЕНИЯ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ С КОНВЕКТИВНЫМИ ВАЛАМИ

В линейном приближении решена двумерная стационарная задача о конвекции в двухкомпонентной стратифицированной среде (например, во влажной атмосфере) над неоднородно нагретой горизонтальной поверхностью. Если температура поверхности гармонически зависит от горизонтальной координаты, то над поверхностью возникают конвективные валы. В зависимости от фоновой температурной стратификации в двухкомпонентной среде возможны ситуации со сменой знака температурного отклика (например, понижение температуры среды в ответ на нагрев снизу – "отрицательная теплоемкость" среды). Рассчитаны возмущения, возникающие в фоновом горизонтальном течении с вертикальным сдвигом, направленном вдоль конвективных валов.

Ключевые слова: конвекция, неоднородный нагрев, сдвиговые течения, линейное приближение, аналитическое решение, бинарные смеси.

В настоящей статье рассмотрена линейная задача о конвекции в двухкомпонентной среде над неоднородно нагретой горизонтальной поверхностью и о возмущениях фонового горизонтального течения с вертикальным сдвигом, вызванных взаимодействием с конвективными валами. Эта задача представляет интерес, в частности, в связи с известными геофизическими приложениями. В пограничном слое атмосферы распространены ситуации, когда на фоне горизонтального течения с вертикальным сдвигом могут развиваться различные формы конвекции. Взаимодействие упомянутых движений играет важную роль для целого ряда атмосферных процессов. Например, в [1] обсуждается возможное влияние взаимодействия фонового горизонтального течения с конвективными валами на развитие тропических циклонов (см. также библиографию к этой работе). Такие взаимодействия процессов различных масштабов весьма сложны и обычно исследуются численно (см., например, [2]).

В настоящей работе в линейном приближении находится аналитическое решение стационарной задачи такого рода в случае, когда конвективные валы связаны с наличием термических неоднородностей горизонтальной поверхности. Попутно исследуются некоторые нетривиальные эффекты, к которым может приводить двухкомпонентный характер среды (она предполагается стратифицированной не только по температуре, но и по концентрации примеси; например, воздух, стратифицированный по влажности).

1. Рассматривается полуограниченный слой среды $z \geq 0$ (ось z направлена вертикально вверх), стратифицированный по температуре и концентрации примеси. Для определенности будем говорить о влажном воздухе (без фазовых переходов)). Согласно обычно используемому приближению, предполагаем, что плотность среды линейно зависит от возмущений температуры T и удельной влажности q

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha T - \delta q)$$

где ρ_* – средняя (отсчетная) плотность среды; α – термический коэффициент расширения среды, $\delta \approx 0.608$ – аналогичный коэффициент для влажности [3]. Система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси (влаги) в приближении Буссинеска имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\Phi + \nu\nabla^2\mathbf{v} + g(\alpha T + \delta q)\mathbf{e}_z, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = \kappa\nabla^2 T, \quad \frac{dq}{dt} = \chi\nabla^2 q$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости с компонентами u, v, w вдоль осей x, y, z соответственно (ось z направлена вертикально вверх); $\Phi = p'/\rho_*$, p' – отклонение давления от гидростатического; g – ускорение свободного падения, $\mathbf{e}_z$ – вертикальный орт, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ – оператор полной производной, ν, κ, χ – коэффициенты обмена для соответствующих субстанций.

В фоновом состоянии заданы постоянные вертикальные градиенты температуры и примеси γ_T и γ_q соответственно, а также течение вдоль горизонтальной оси y с постоянным вертикальным сдвигом Ω: $v_0 = \Omega z$. Исследуются стационарные возмущения, связанные с заданной температурной неоднородностью горизонтальной поверхности $z = 0$

$$T = T_0\cos(kx), \quad z = 0 \tag{1.1}$$

где T_0 – соответствующая амплитуда, k – волновое число. Линеаризованная по двумерным стационарным возмущениям система уравнений имеет вид

$$0 = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

$$0 = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g(\alpha T + \delta q) \tag{1.3}$$

$$\Omega w = \nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right) \tag{1.4}$$

$$\gamma_T w = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad \gamma_q w = \chi\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right) \tag{1.5}$$

где штрихом обозначено возмущение скорости фонового течения.

На поверхности $z = 0$ помимо (1.1) заданы условия непротекания и прилипания, а также аналогичное условие для концентрации примеси

$$u = v' = w = q = 0, \quad z = 0$$

Предполагается, что вдали от поверхности (при $z \to \infty$) все возмущения затухают.

2. Число неизвестных в системе (1.2)–(1.5) можно уменьшить, если вместо переменных T, q ввести безразмерное отклонение плавучести[1]

$$\sigma = \alpha T + \delta q$$

Линейной комбинацией уравнений (1.5) получаем уравнение

$$\Gamma w = \left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right), \quad \Gamma = \frac{\alpha\gamma_T}{\kappa} + \frac{\delta\gamma_q}{\chi} \tag{2.1}$$

[1] В литературе плавучестью нередко называют величину $b = g\sigma$.

Далее для простоты ограничимся случаем $\Gamma = 0$. При равенстве коэффициентов переноса κ и χ это означает нейтральную стратификацию плотности. (Обобщение на более общий случай $\Gamma \neq 0$ не представляет принципиальной трудности, но требует громоздких расчетов.) Граничное условие для σ имеет вид

$$\sigma = \alpha T_0 \cos(kx)$$

вдали от поверхности σ, как и другие возмущения, затухает.

Ищем для возмущений стационарные решения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x

$$u(x,z) = U(z)\sin(kx), \quad w(x,z) = W(z)\cos(kx)$$

$$v'(x,z) = V(z)\cos(kx), \quad \sigma(x,z) = S(z)\cos(kx)$$

и т.д. Уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - k^2 S = 0$$

С учетом краевых условий решение для σ будет

$$\sigma = \alpha T_0 \exp(-kz)\cos(kx)$$

Уравнения (1.2), (1.3) преобразуются в замкнутую неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными и коэффициентами. Решив ее и определив поле вертикальной скорости, из (1.4), (1.5) найдем остальные неизвестные: v', T, q. Приведем результат

$$u = -\frac{\alpha g T_0}{8\nu k} z(2 - kz)\exp(-kz)\sin(kx)$$

$$v' = -\frac{\alpha g T_0 \Omega}{32\nu^2 k^3} z\left(1 + kz + \frac{2}{3}k^2 z^2\right)\exp(-kz)\cos(kx)$$

$$w = \frac{\alpha g T_0}{8\nu} z^2 \exp(-kz)\cos(kx)$$

$$p' = -\frac{\rho_* \alpha g T_0}{4k}(3 - 2kz)\exp(-kz)\cos(kx)$$

$$T = T_0\left[1 - \frac{\alpha g \gamma_T z}{32\kappa\nu k^3}\left(1 + kz + \frac{2}{3}k^2 z^2\right)\right]\exp(-kz)\cos(kx)$$

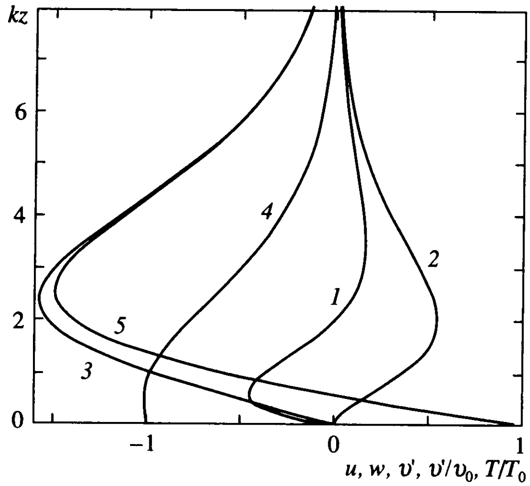
$$q = -\frac{\alpha g \gamma_q T_0 z}{32\chi\nu k^3}\left(1 + kz + \frac{2}{3}k^2 z^2\right)\exp(-kz)\cos(kx)$$

Относительное возмущение фонового потока

$$\frac{v'(x,z)}{v_0(z)} = -\frac{\alpha g T_0}{32\nu^2 k^3}\left(1 + kz + \frac{2}{3}k^2 z^2\right)\exp(-kz)\cos(kx)$$

Отсюда видно, что необходимое условие применимости линейного приближения – малость аналога числа Грассхофа для возмущений $\alpha g T_0/32\nu^2 k^3$.

3. На фигуре представлены безразмерные вертикальные профили возмущений на вертикали $x = 0$, т.е. над максимально нагретым участком горизонтальной поверхности



Безразмерные вертикальные профили возмущений при $x = 0$ над нагретым участком горизонтальной поверхности: *1*, *2* – u, w (нормированы на $\alpha g T_0/8\nu k^2$), *3* – v' (на $\alpha g T_0 \Omega/32\nu^2 k^4$), *4* – v'/v_0 (на $\alpha g T_0/32\nu^2 k^3$), *5* – T/T_0

$z = 0$. Возмущения проникают в среду до высот порядка горизонтального масштаба возмущений $L = 2\pi/k$. Над неоднородно нагретой поверхностью возникают циркуляционные ячейки (валы) с восходящими движениями над более нагретыми областями, с аспектным отношением (отношением горизонтального масштаба к вертикальному) порядка единицы. Можно показать, что при устойчивой стратификации плотности $\Gamma > 0$ вертикальные масштабы ячеек уменьшаются. Амплитуды возмущений составляющих скорости u и w порядка $\alpha g T_0/(8\nu k^2)$, возмущения сдвигового течения, направленного вдоль валов, порядка $\alpha g T_0 \Omega/(32\nu^2 k^4)$. Течение с вертикальным сдвигом тормозится в области восходящих движений и ускоряется в области нисходящих. Это легко объяснимо, если принять во внимание направления переноса горизонтального импульса вертикальными движениями. Отметим, что в результате взаимодействия сдвигового потока с валами в каждой конвективной ячейке генерируется вертикальная составляющая вихря с амплитудой порядка $\alpha g T_0 \Omega/(32\nu^2 k^3)$. В известном смысле происходит частичная трансформация горизонтального вихря в вертикальный.

Отметим нетривиальный результат, относящийся к температурным профилям. Последние зависят от значения безразмерного параметра $\alpha g \gamma_T/(32\kappa\nu k^4)$. Его можно назвать "температурным" числом Рэлея для фонового состояния (в отличие от чисел Рэлея, относящихся к возмущениям или(и) к вертикальным перепадам концентрации примеси и плотности). При не слишком малых положительных значениях этого параметра температурные возмущения среды над нагретой частью горизонтальной поверхности оказываются отрицательными (см. фигуру), вопреки, казалось бы, очевидным интуитивным представлениям. Подобные результаты ранее уже получались и в некоторых других задачах конвекции в бинарных смесях [4, 5]. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат объясняется следующим образом. Восходящие движения, возникающие над "теплым пятном", при устойчивой температурной стратификации ($\gamma_T > 0$) переносят вверх более холодные объемы среды. Связанное с этим охлаждение в случае однокомпонентной среды частично компенсирует непосредственный приток тепла в среду от теплого пятна. В рассматриваемом же случае бинарной смеси восходящие движения, при прочих равных условиях, более интенсивны, поскольку фоновая стратификация плотности не устойчива, а нейтральна (стратификация примеси компенсирует температурную стратификацию в поле плотности). В результате упомянутые восходящие движения более холодной среды снизу оказываются достаточно интенсивными, чтобы с избытком компенсировать непосредственный нагрев среды от поверхности, поэтому в результате нагрева снизу среда становится холоднее ("отрицательная теплоемкость" бинарной смеси [4]).

Заключение. Рассмотренная модель позволяет в линейном приближении получить несложное аналитическое решение для конвекции над неоднородно нагретой горизонтальной поверхностью и описать воздействие этой конвекции на горизонтальной сдвиговый поток. В случае бинарной смеси при этом возможны такие нетривиальные эффекты, как понижение температуры среды над теплым пятном на поверхности. Взаимодействие горизонтального потока с конвекцией (каждое из этих течений обладает только горизонтальной завихренностью) приводит к возникновению течений с ненулевой вертикальной составляющей вихря. Механизмы генерации вихрей с вертикальной осью представляют особый интерес для геофизических приложений. Рассмотренная модель, разумеется, не учитывает ряд факторов, существенных для природных процессов в атмосфере и водоемах. Сюда относятся нелинейность достаточно интенсивных процессов, горизонтальная неоднородность фонового течения, планетарное вращение. При дополнительном учете этих факторов, требующем численного моделирования, найденное решение может быть полезным и в качестве тестового примера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 04-05-64027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ginis I., Khain A.P., Morozovsky E.* Effects of large eddies on the structure of the marine boundary layer under strong wing conditions // J. Atmos. Sci. 2004. V. 61. № 24. P. 3049–3063.
2. *Хаин А.П., Ингель Л.Х.* Численное моделирование взаимодействия нестационарного дивергентного потока с конвективными процессами в пограничном слое атмосферы над океаном // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 4. С. 496–506.
3. *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 751 с.
4. *Ингель Л.Х.* "Отрицательная теплоемкость" стратифицированных жидкостей // Успехи физ. наук. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
5. *Ингель Л.Х.* Нестационарная конвекция в бинарной смеси у плоской вертикальной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 92–97.

Обнинск

Поступила в редакцию
17.VIII.2005