

УДК 532.595.032 + 539.214 + 612.13

© 2006 г. Н. Н. КИЗИЛОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ТРУБКАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Исследуется распространение волн малой амплитуды в толстостенной длинной трубке переменного сечения из вязкоупругого материала, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, с учетом отражения волн на конце трубки. Задача рассматривается в приложении к распространению пульсовых волн в артериях. Решение задачи получено в виде разложений по малому параметру. Исследовано влияние коэффициента отражения волн на конце трубки и параметров материала стенки на объемный расход жидкости и перемещение стенки трубки. Показано, что характеристики фазового спектра объемного расхода слабо зависят от свойств стенки и могут быть использованы в клинической диагностике для определения коэффициента отражения по результатам регистрации давления и расхода.

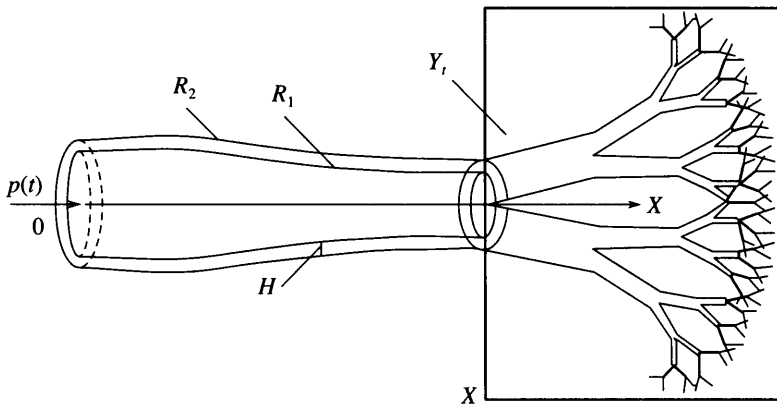
Ключевые слова: пульсовая волна, вязкоупругая трубка, отражение волн.

Распространение волн давления в заполненных жидкостью податливых трубках интенсивно исследуется в связи с приложениями к анализу пульсовых волн в артериях [1–5]. Артериальные сосуды представляют собой многослойные трубки из вязкоупругого ортотропного материала, а кровь – концентрированная суспензия агрегирующих частиц, поэтому учет реологии жидкости и стенки приводит к довольно громоздким математическим моделям [6, 7], для которых возможно лишь численное исследование. Однако многие аспекты, связанные с распространением и отражением волн в артериальных руслах, удается проследить на достаточно простых моделях [8–12].

Течение крови в крупных артериях, где реализуется движение с большими числами Рейнольдса ($Re \geq 500$), исследуется на основании моделей движения идеальной несжимаемой жидкости в податливых тонкостенных трубках ($h/R \leq 0.1$, h – толщина стенки, R – внутренний радиус трубки). Вязкоупругие свойства крови, связанные с присутствием клеток крови и высокомолекулярных соединений, проявляются лишь при турбулентных режимах течения [13]. При моделировании течений в малых артериях кровь рассматривается чаще всего как однородная псевдопластическая жидкость, а артерии – как толстостенные трубки из вязкоупругого материала [1, 6]. Сравнение результатов моделирования пульсовых волн в артериях с учетом вязкости, сжимаемости и неньютоновских свойств крови, сжимаемости и анизотропии материала стенки показало, что для аорты и средних артерий основные экспериментальные закономерности распространения и отражения волн удовлетворительно описываются на основе модели толстостенной однородной изотропной вязкоупругой трубки, заполненной однородной несжимаемой вязкой жидкостью [14].

Волновое движение крови вызывается периодическими сокращениями сердца. На тех участках, где проводимости сосудов несогласованны, возникают отраженные волны [1, 6]. Это области, где механические свойства стенки изменены в связи с патологией (уплотнения, атеросклеротические бляшки), а также ветвления, сужения или расширения сосудов, нормальные или патологические (стенозы, аневризмы).

Таким образом, кривые внутрисосудистого давления $p(t)$, зафиксированные с помощью микроманометров или полученные путем измерения ультразвуковыми датчиками



Фиг. 1. Схема модели артериального дерева как трубки с терминальным элементом Y_t

осцилляций $d(t)$ диаметра артерии, представляют собой результат суперпозиции падающей волны и многочисленных отраженных волн. Параметры кривых $p(t)$ определяются условиями отражения, поэтому детальный анализ и биомеханическая интерпретация волн давления чрезвычайно важны для клинических приложений [15–18].

Важным диагностическим параметром служит напряжение трения τ_w на стенке артерий, величина которого коррелирует с местами образования атеросклеротических бляшек. Численные расчеты значений τ_w на основе кривых $d(t)$ должны основываться на более детальных моделях, учитывающих реальную структуру и механические свойства материала сосудистой стенки, которые в настоящее время отсутствуют.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по осесимметричной трубке переменного сечения, которая близка по форме к круговому цилиндру. Стенка трубки состоит из однородного изотропного несжимаемого вязкоупругого материала. Длина трубки L , толщина стенки H , а внутренний радиус в ненапряженном состоянии $R_0 = R_0(x)$. Предполагается, что при прохождении волны давления поперечное сечение трубки остается круговым. При этом ее внутренний и внешний радиусы суть R_1 и $R_2 = R_1 + H$. В приложении к артериям зависимость $R_0(x)$ может учитывать их естественное постепенное сужение, особенно существенное для аорты и крупных артерий. Внешняя поверхность трубки считается прикрепленной к окружающим тканям.

На конце $x = L$ трубка последовательно соединена с трубкой другого радиуса или бифуркацией трубок, являющихся продолжением артериального русла, которое рассматривается как терминальный элемент с заданной комплексной волновой проводимостью Y_t (фиг. 1). Уравнения движения жидкости:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = (v_r, 0, v_x)$, p , ρ_f и ν – скорость, гидростатическое давление, плотность и кинематическая вязкость жидкости.

Уравнение движения стенки трубки:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \Sigma \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_x)$ – вектор перемещения, ρ_s – плотность материала, Σ – тензор напряжений для стенки.

Для описания вязкоупругих свойств материала стенки примем трехэлементную реологическую модель, учитывающую релаксацию напряжений и деформаций [13]:

$$\lambda_1 \frac{\delta \sigma}{\delta t} + \sigma = 2G \left(\mathbf{e} + \lambda_2 \frac{\delta \mathbf{e}}{\delta t} \right), \quad \sigma = \Sigma + p_s \mathbf{I} \quad (1.4)$$

где p_s – гидростатическое давление в стенке, \mathbf{I} – единичный тензор, $\lambda_{1,2}$ – времена ретардации и релаксации, G – модуль сдвига, \mathbf{e} – тензор деформаций для стенки, $\delta/\delta t$ обозначает дифференцирование тензора по времени. Будем рассматривать определяющее соотношение (1.4) в линейном приближении и использовать далее вместо $\delta/\delta t$ частную производную по времени.

Из (1.3), (1.4) получим систему уравнений движения стенки в перемещениях, которая в связанной с трубкой цилиндрической системе координат примет вид [19]:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) = G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right) \quad (1.5)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) = G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \quad (1.6)$$

Замыкающее уравнение модели есть условие несжимаемости материала:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

Граничные условия для системы (1.1), (1.2), (1.5)–(1.7) – это условие осевой симметрии профиля и ограниченности скорости на оси трубки:

$$r = 0: v_L = 0, \quad |v_x| < \infty \quad (1.8)$$

условия непрерывности скоростей и напряжений на границе жидкость–стенка:

$$r = R_1: v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(p_s - p + 2\nu \rho_f \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 2G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (1.9)$$

$$\nu \rho_f \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)$$

и условие закрепления стенки трубки к окружающей недеформируемой среде:

$$r = R_2: u_{r,x} = 0 \quad (1.10)$$

При записи соотношений (1.9) пренебрегается отличием направления касательного вектора к границе раздела жидкость–стенка от направления продольной оси трубки, что связано с близостью формы трубки к цилиндрической.

На входе в трубку задана волна давления:

$$x = 0: \frac{2}{R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} r p(t, r, 0) dr = p_0(t) \quad (1.11)$$

Из определения входной волновой проводимости $Y_i = Q/\langle P \rangle$ терминального элемента, где Q – объемный расход и $\langle P \rangle$ – среднее по сечению давление, следует условие на конце трубки

$$x = L: Y_i \int_0^{R_1} r p(t, r, x) dr = \pi R_1^2 \int_0^{R_1} r v_x(t, r, x) dr \quad (1.12)$$

Функция $p_0(t)$ может быть задана в явном виде на основе экспериментально измеренных колебаний давления в различных сечениях артерий человека и животных [1]. При построении теоретических моделей обычно выражение для $p_0(t)$ задается в виде Фурье-разложения. Поскольку пульсовые кривые удовлетворительно описываются четырьмя–шестью гармониками разложения, то такой способ задания условия на входе позволяет рассчитать реальные профили скорости течения крови и сравнить их с результатами измерений [1, 6]. Задача (1.1), (1.2), (1.5)–(1.12) исследовалась ранее для модели Фойгта (при $\lambda_1 = 0$) и линеаризованных уравнений (1.2) [8], а в нелинейной постановке – для невязкой жидкости и при $\lambda_{1,2} = 0$ [10, 11].

Характерные значения размеров трубки, перемещений стенки и скоростей течения крови для артерий человека составляют [1, 6]

$$r_0 = 10^{-4} - 10^{-2} \text{ м}, \quad \frac{H^*}{r_0} = 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-1}, \quad \frac{r_0}{L} = 2 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-1}$$

$$v_x^* = 2 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}, \quad \frac{u_r^*}{r_0} = (1 - 8) \cdot 10^{-2}, \quad r_0 = \frac{1}{L} \int_0^L R_0(x) dx$$

где звездочками обозначены характерные значения величин, r_0 – среднее по длине трубки значение внутреннего радиуса в ненапряженном состоянии. Таким образом, можно считать, что трубка длинная и $r_0/L = \varepsilon \ll 1$, а радиальные перемещения стенки малы и имеют тот же порядок $u_r^*/r_0 = \varepsilon$.

Преобразуем граничные условия (1.10), учитывая, что перемещения стенки однозначно определяются взаимодействием жидкости со стенкой и механическими свойствами материала стенки. При этом внутренний радиус трубки в произвольный момент времени есть $R_1(t, x) = R_0(x) + u_r(t, R_0(x), x)$. Раскладывая входящие в (1.9) функции вида $f(t, R_1(t, x), x)$, где $f = \{u_r, u_x, v_r, v_x, p, p_s\}$, в ряды Тэйлора и пренебрегая слагаемыми порядка u_r^2 , получим вместо (1.9)

$$r = R_0(x): v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial r} u_r \quad (1.13)$$

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial r} u_r = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial r} u_r$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(p_s - p + u_r \frac{\partial}{\partial r} (p_s - p) + 2\nu \rho_f \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right) = \\ & = 2G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\nu \rho_f \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} + u_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) =$$

$$= G \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial x} + \frac{\partial u_r \partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x \partial u_r}{\partial r} \right)$$

Для решения задачи введем безразмерные переменные

$$x^\circ = \frac{x}{L}, \quad r^\circ = \frac{r}{r_0}, \quad t^\circ = \frac{tc}{L}, \quad u_{r,x}^\circ = \frac{u_{r,x}}{u_{r,x}^*}$$

$$v_{r,x}^\circ = \frac{v_{r,x}}{v_{r,x}^*}, \quad p^\circ = \frac{p}{p^*}, \quad p_s^\circ = \frac{p_s}{p_s^*}$$

где c – скорость распространения пульсовой волны. Поскольку численные оценки дают $u_r^* = \varepsilon r_0$, то из уравнения (1.7) следует, что $u_x^* = u_r^* / \varepsilon = r_0$. Из первых двух соотношений (1.9) получим, что $v_r^* = c\varepsilon^2$, $v_x^* = c\varepsilon$. Примем, что p^* , $p_s^* = \rho_f c^2 \varepsilon$ и запишем (1.2), (1.5), (1.6) в безразмерной форме (значки при безразмерных переменных далее опущены):

$$\varepsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial t} + \varepsilon^3 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \varepsilon^3 v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \varepsilon v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \varepsilon v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \quad (1.16)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\varepsilon^2 \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) = \frac{\Gamma \varepsilon^2}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right) \quad (1.17)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) = \frac{\Gamma}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \quad (1.18)$$

$$\text{Re} = \frac{c\varepsilon R}{\nu}, \quad \Gamma = \frac{Gr_0}{\mu c}, \quad \alpha_i = \frac{\lambda_i c}{L}, \quad \rho = \frac{\rho_s}{\rho_f}$$

где Re – число Рейнольдса, Γ – безразмерный модуль сдвига, μ – вязкость жидкости, $i = 1, 2$.

Условия (1.8), (1.10)–(1.14) запишем в безразмерном виде. При этом, соотношения (1.1), (1.7), (1.8) и (1.10) останутся без изменений, а условия (1.13), (1.14) примут вид:

$$r = a: v_r + \varepsilon u_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \varepsilon v_r \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad v_x + \varepsilon u_r \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \varepsilon v_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(p_s - p + \varepsilon u_r \frac{\partial}{\partial r} (p_s - p) + \frac{2\varepsilon^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \varepsilon u_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{\partial v_r \partial u_r}{\partial r} \right) \right) = \\ & = \frac{2\Gamma \varepsilon}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \varepsilon u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} + \varepsilon^3 \left(u_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) + \varepsilon \left(u_r \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right) = \\ & = \Gamma \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} + \varepsilon^3 \left(u_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) + \varepsilon \left(u_r \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right) \\ & r_i = \frac{R_i}{r_0}, \quad a(x) = \frac{R_0(x)}{r_0}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Условия (1.11), (1.12) на концах трубки в безразмерном виде суть:

$$\begin{aligned} x = 0: & 2 \int_0^{a_0} r p(t, r, 0) dr + 2 \varepsilon a_0 p|_{r=a_0} u_r|_{r=a_0} = (a_0^2 + 2 \varepsilon a_0 u_r|_{r=a_0}) p_0(t), \quad a_0 = a(0) \\ x = 1: & y_i \left(\int_0^{a_1} r p(t, r, 1) dr + \varepsilon a_1 p|_{r=a_1} u_r|_{r=a_1} \right) = (a_1^2 + 2 \varepsilon a_1 u_r|_{r=a_1}) \times \\ & \times \left(\int_0^{a_1} r v_x(t, r, 1) dr + \varepsilon a_1 v_x|_{r=a_1} u_r|_{r=a_1} \right), \quad a_1 = a(1) \end{aligned}$$

где $y_i = Y_i/Y^*$ – безразмерная проводимость терминального элемента, $Y^* = \pi r_0^2 / (\rho c)$ – характеристическая проводимость трубки.

2. Метод решения. Будем искать решение задачи в виде разложений по малому параметру ε :

$$g = g^{(0)} + \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \dots \quad (2.1)$$

Подставляя выражения вида (2.1) в соотношения (1.1), (1.7), (1.8), (1.15)–(1.21) и приравнявая нулю сомножители при одинаковых степенях малого параметра, получим системы уравнений для нулевого и первого приближений задачи и соответствующие граничные условия. Для нулевого приближения

$$\frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{v_r^{(0)}}{r} + \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(0)}}{r} + \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_x^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p_s^{(0)}}{\partial r} + \alpha_1 \frac{\partial^2 p_s^{(0)}}{\partial r \partial t} = 0 \quad (2.4)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\rho \frac{\partial^2 u_x^{(0)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(0)}}{\partial x} \right) = \frac{\Gamma}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

$$r = 0: v_r^{(0)} = 0, \quad |v_x^{(0)}| < \infty \quad (2.6)$$

$$r = a(x): v_r^{(0)} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial t}, \quad v_x^{(0)} = \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)(p_s^0 - p^{(0)}) = 0, \quad \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial r} = 0 \quad (2.8)$$

$$r = r_2: u_{r,x}^{(0)} = 0 \quad (2.9)$$

$$x = 0: 2 \int_0^a r p^{(0)} dr = a^2 p_0, \quad x = 1: y_i \int_0^a r p^{(0)} dr = a^2 \int_0^a r v_x^{(0)} dr \quad (2.10)$$

Для первого приближения:

$$\frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{v_r^{(1)}}{r} + \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(1)}}{r} + \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial r} \right) = -v_x^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} - v_r^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial r} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} = 0 \quad (2.13)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\rho \frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial x} \right) = \frac{\Gamma}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r} \right) \quad (2.14)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p_s^{(1)}}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u_r^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(0)}}{r^2} \right) \quad (2.15)$$

$$r = 0: v_r^{(1)} = 0, \quad |v_x^{(1)}| < \infty \quad (2.16)$$

$$r = a(x): v_r^{(1)} - \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} - u_r^{(0)} \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} + u_r^{(0)} \frac{\partial^2 u_r^{(0)}}{\partial t \partial r} \quad (2.17)$$

$$v_x^{(1)} - \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial t} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial r} - u_r^{(0)} \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial r} + u_r^{(0)} \frac{\partial^2 u_x^{(0)}}{\partial t \partial r} \quad (2.18)$$

$$\left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (p_s^{(1)} - p^{(1)}) = \frac{2\Gamma}{\text{Re}} \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} - \left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(u_r^{(0)} \frac{\partial}{\partial r} (p_s^{(0)} - p^{(0)}) \right) \quad (2.19)$$

$$\Gamma \left(1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial r} = \left(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial r} \quad (2.20)$$

$$r = r_2: u_{r,x}^{(1)} = 0 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
 x = 0: & 2 \int_0^a r p^{(1)} dr + 2 a u_r^{(0)} \Big|_{r=a} p^{(0)} \Big|_{r=a} = 2 a u_r^{(0)} \Big|_{r=a} p_0 \\
 x = 1: & y_t \left(\int_0^a r p^{(1)} dr + a p^{(0)} \Big|_{r=a} u_r^{(0)} \Big|_{r=a} \right) = 2 a u_r^{(0)} \Big|_{r=a} \int_0^a r v_x^{(0)} dr + \\
 & + a^2 \int_0^a r v_x^{(1)} dr + a^3 v_x^{(0)} \Big|_{r=a} u_r^{(0)} \Big|_{r=a}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

3. Решение задачи для нулевого и первого приближений. Задача (2.2)–(2.10) для нулевого приближения представляет собой обобщение классической задачи [8] на случай вязкоупругого материала стенки и трубки конечной длины. На входе в трубку задана волна давления $p_0(t) = p_0 e^{i\omega t}$ и решение может быть найдено в виде

$$g(t, r, x) = g^*(r, x) e^{i\omega t}, \quad g = \{u_r^{(0)}, u_x^{(0)}, v_r^{(0)}, v_x^{(0)}, p^{(0)}, p_s^{(0)}\}$$

Из первого соотношения (2.3) и (2.4) следует, что $p^* = p^*(x)$, $p_s^* = p_s^*(x)$. Задача (2.2)–(2.10) разделяется, и решение второго уравнения (2.3), удовлетворяющее второму условию (2.6), имеет вид:

$$v_r^*(r, x) = C_1(x) J_0(\gamma r) + \frac{i}{\omega} (p^*)', \quad \gamma = (-i\omega \text{Re})^{0.5} \tag{3.1}$$

где, J_n – функция Бесселя первого рода, $C_1(x)$ – неизвестная функция. Подставляя (3.1) в первое соотношение (2.2), получим уравнение для определения $v_r^*(r, x)$, решение которого с учетом первого условия (2.6), имеет вид:

$$v_r^*(r, x) = -\frac{J_1(\gamma r)}{\gamma} C_1'(x) - \frac{ir}{2\omega} (p^*)'' \tag{3.2}$$

Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее (2.9):

$$u_x^*(r, x) = C_3(x) Y_0(\beta r) + C_4(x) J_0(\beta r) + \frac{1}{\rho\omega^2} (p_s^*)'$$

$$C_4(x) = -J_0^{-1}(\beta r_2) \left(\frac{1}{\rho\omega^2} (p_s^*)' + C_3(x) Y_0(\beta r_2) \right) \tag{3.3}$$

$$\beta^2 = \frac{\rho\omega^2 \text{Re}(1 + i\omega\alpha_1)}{\Gamma(1 + i\omega\alpha_2)}$$

где Y_n – функция Бесселя второго рода порядка n . Подставляя (3.3) во второе соотношение (2.2), получим уравнение для определения $u_r^*(r, x)$, решение которого, удовлетворяющее (2.11), имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u_r^*(r, x) &= \frac{C_5(x)}{r} - \frac{Y_1(\beta r)}{\beta} C_3'(x) - \frac{J_1(\beta r)}{\beta} C_4'(x) - \frac{r}{2\rho\omega^2} (p_s^*)'' \\
 C_5(x) &= r_2 \left(\frac{Y_1(\beta r_2)}{\beta} C_3'(x) + \frac{J_1(\beta r_2)}{\beta} C_4'(x) + \frac{r_2}{2\rho\omega^2} (p_s^*)'' \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из условий (2.7), (2.8) имеем

$$p_s^*(x) = p^*(x), \quad C_3(x) = A_3(x)(p^*)', \quad A_3(x) = \left[\frac{Y_1(\beta a)}{J_1(\beta a)} - \frac{Y_0(\beta r_2)}{J_0(\beta r_2)} \right]^{-1} \frac{1}{\rho \omega^2 J_0(\beta r_2)}$$

$$C_1(x) = A_1(x)(p^*)', \quad A_1(x) = i\omega J_0^{-1}(\gamma a) \left[A_3 Y_0(\beta a) + A_4 J_0(\beta a) + \frac{1-\rho}{\rho \omega^2} \right]$$

Для $p^*(x)$ из (2.7) получим дифференциальное уравнение

$$N_1(x)(p^*)'' + N_2(x)(p^*)' = 0$$

$$N_1(x) = \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} A_1 - \frac{i\omega}{\beta} (Y_1(\beta a) A_3 + J_1(\beta a) A_4) + \frac{ia(\rho - 1)}{2\rho\omega} - \frac{i\omega}{a} A_5$$

$$N_2(x) = \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} A_1' - \frac{i\omega}{\beta} (Y_1(\beta a) A_3' + J_1(\beta a) A_4') + \frac{i\omega}{a} A_6$$

$$A_5(x) = \frac{r_2}{\beta} (Y_1(\beta r_2) A_3 + J_1(\beta r_2) A_4) + \frac{r_2^2}{2\rho\omega^2}, \quad A_6(x) = \frac{r_2}{\beta} (Y_1(\beta r_2) A_3' + J_1(\beta r_2) A_4')$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$p^*(x) = p_0 + C_6 \int_0^x F(x) dx, \quad F(x) = \exp\left(\int \frac{N_2(x)}{N_1(x)} dx\right) \quad (3.5)$$

Постоянная интегрирования C_6 определяется из второго условия (2.10):

$$C_6 = \left(y_l \int_0^1 F(x) dx - \frac{2ia(1)F(1)}{\omega} \right)^{-1} \left(\frac{2a(1)}{\gamma} J_1(\gamma a(1)) C_1(1) - p_0 y_l \right)$$

Соотношения (3.1)–(3.5) позволяют вычислять характеристики течения, которые наиболее важны для приложений, в том числе для определения диагностически значимых параметров течения крови: объемный расход $Q(t, x)$, напряжение сдвига на стенке $\tau_w(t, x)$, линейную скорость на оси трубки $v_x(t, x)$ и волновую проводимость $Y_{in} = Q^*/p^*$ ($x = 0$), где Q^* – амплитуда расхода. Окончательные выражения для указанных величин не приводятся здесь в силу их громоздкости.

Последовательность решения задачи (2.11)–(2.22) для первого приближения аналогична решению задачи (2.2)–(2.10), поэтому окончательные громоздкие выражения для величин

$$g(t, r, x) = g^{**}(r, x) e^{i\omega t}, \quad g = \{u_r^{(1)}, u_x^{(1)}, v_r^{(1)}, v_x^{(1)}, p^{(1)}, p_s^{(1)}\}$$

не выписаны здесь для краткости изложения.

4. Результаты численных расчетов и обсуждение. Для случая трубки с постоянным сечением $a = \text{const}$ выражения (3.1)–(3.5) и аналогичные соотношения для первого приближения существенно упрощаются. При этом $p^* = p_s^* = \text{const}$, $v_r^* = u_r^* = 0$. В случае $a = a(x)$ распределения давлений и поля скоростей жидкости и перемещений стенки трубки находятся путем интегрирования и являются достаточно громоздкими функциями координат уже для нулевого приближения. При численных расчетах исследовалось

влияние параметров модели на решение задачи и интегральные характеристики $Q(t, x)$ и Y_{in} , осцилляции внутреннего диаметра трубки $d = d(t, x)$ и напряжения сдвига $\tau_w(t, x)$ на стенке. При моделировании терминального элемента для удобства физической интерпретации вводился коэффициент отражения волны $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, который связан с безразмерной проводимостью элемента соотношением $y_t = (1 - \xi)/(1 + \xi)$ [6]. При этом $\xi = 1$ соответствует закрытому концу трубки, а $\xi = 0$ – отсутствию отраженной волны (при согласовании проводимостей на конце трубки).

Диапазоны изменения безразмерных параметров выбирались в соответствии с данными для артериальной системы человека в норме: $p_0 = 10^4$ Па, $Re = 0.1-100$, $\varepsilon = 10^{-2}-10^{-1}$, $G = 10^5-10^6$ Па. При исследовании зависимости характеристик течения от одного из параметров принимались следующие значения для остальных параметров: $h = H/r_0 = 0.2$, $\rho = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $\Gamma = 10$, $Re = 10$, $\xi = 0.5$. Основная частота волны $f = \omega/(2\pi)$ выбрана в соответствии с частотой сокращений сердца ($f = 1 - 1.25$ Гц). Представленные ниже на графиках зависимости для всех величин получены путем вычисления соответствующих значений нулевого и первого приближений, так что $f = f^* + \varepsilon f^{**}$, причем величины f записывались в форме $f = f^+ e^{i\varphi}$ и зависимости, представленные на графиках есть амплитуды f^+ соответствующих величин. Для трубки с постоянным сечением погрешность расчетов, выполненных для нулевого приближения, не превышала 1%. В качестве трубок с переменным сечением рассматривались случаи

$$a(x) = a_2 - (a_1 - a_2)(x - 1), \quad a(x) = \sin(k_1 x + k_2)$$

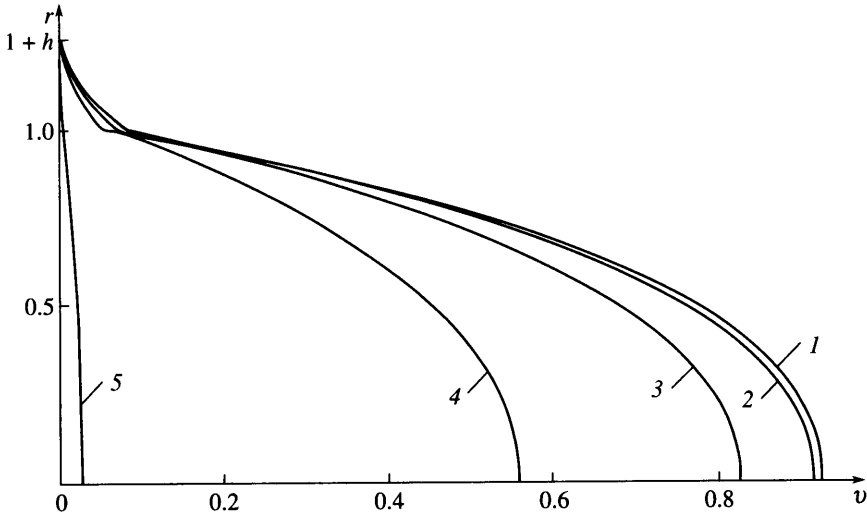
$$k_2 = \arcsin(a_1), \quad k_1 = \arcsin(a_2) - k_2$$

где $a_{1,2}$ – безразмерный радиус трубки при $x = 0; 1$, причем $(a_1 - a_2)/a_1 \leq 0.1$, что соответствует физиологическим вариациям формы артерий в норме. Для этих случаев погрешность вычислений параметров течения на основе только нулевого приближения составила 2–7%.

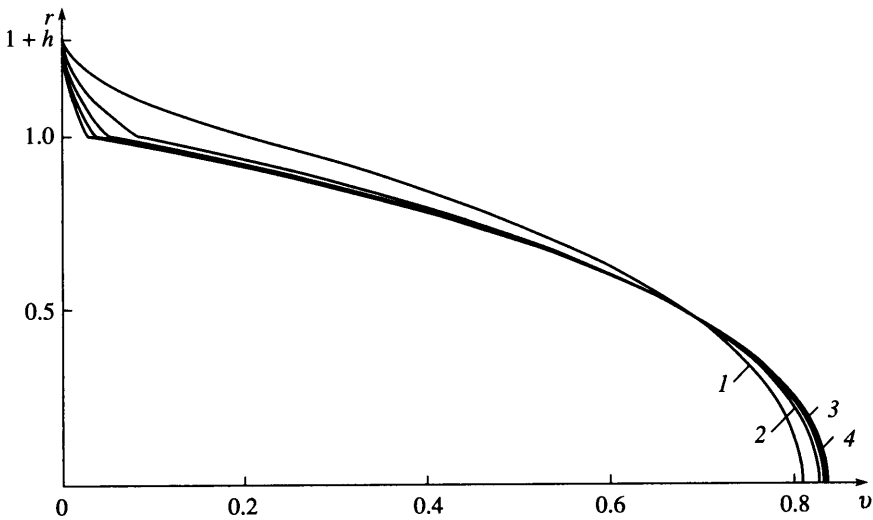
В литературе ранее исследовались случаи, когда отраженная волна отсутствует (проводимости согласованы или трубка бесконечно длинная) [8–11]. Наличие отражения вызывает обратный ток жидкости и изменяет профиль скоростей как жидкости, так и стенки. Результаты расчетов поля скоростей в стенке трубки и жидкости для разных значений коэффициента отражения волны представлены на фиг. 2. Расчеты показали, что изменения коэффициента отражения в пределах $\xi_1 \in [0; 0.25]$ вызывают незначительные изменения профиля скорости. Изменения объемного расхода жидкости зависят при этом от числа Рейнольдса и при умеренных величинах $Re \leq 50$ не превышает 20%, если $\xi_1 \leq 0.25$. Это связано с тем, что отражение приводит к изменению амплитуды давления в трубке за счет суперпозиции падающей и отраженной волн, что вызывает увеличение просвета трубки.

В литературе, посвященной расчетам коэффициентов отражения волн на ветвлениях артерий, давно обсуждается вопрос о согласовании проводимостей при ветвлениях по крайней мере основных крупных артерий сосудистой системы человека [20]. Результаты измерений на препаратах [12] показывают, что согласование проводимостей часто отсутствует, что противоречит представлениям об оптимальном устройстве артериальных русел как систем дальнего транспорта жидкости [21]. Проведенные вычисления показывают, что умеренное отражение волн на участках соединения артерий не приводит к существенному замедлению тока жидкости, что может частично объяснять зафиксированную несогласованность проводимостей артерий при их ветвлениях.

Жесткость материала стенки влияет на распределение скоростей в жидкости, приводя к некоторому уплощению профиля при малых значениях модуля сдвига Γ , и заметно влияет на перемещения стенки (фиг. 3). Объемный расход Q при этом остается практически неизменным за счет ускорения тока жидкости вблизи податливой стенки и замед-

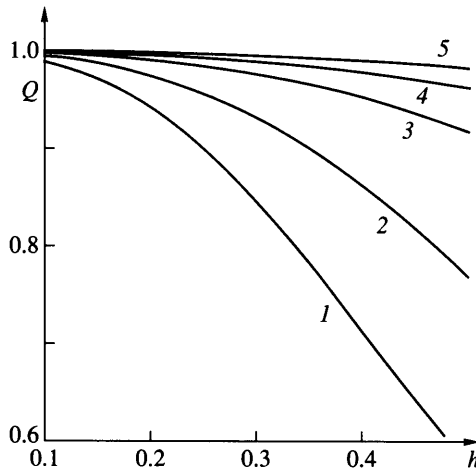


Фиг. 2. Профили скоростей движения жидкости $v_x(r)$ и стенки $u_x(r)$ для трубки постоянного сечения: $\xi = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (кривые 1–5)

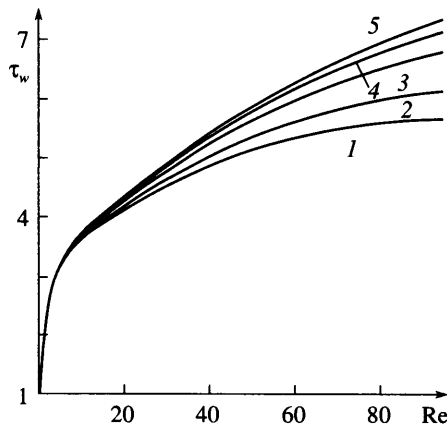


Фиг. 3. Зависимости скорости движения жидкости $v_x(r)$ и стенки $u_x(r)$ для значений безразмерного модуля сдвига материала стенки $\Gamma = 5, 10, 20, 30$ (кривые 1–4)

ления – у оси трубки. Незначительное влияние на движение жидкости и стенки оказывают параметры α_1, α_2 . Более выраженное воздействие на характеристики течения оказывают некоторые комбинации параметров $\Gamma, \alpha_1, \alpha_2$ стенки и ее относительной толщины. На фиг. 4 приведены зависимости $Q(h)$ при разных значениях Γ . С увеличением толщины и податливости стенки расход жидкости уменьшается и при предельных для артериальной стенки значениях $\Gamma, \alpha_1, \alpha_2$ может снижаться на 15–20%. С ростом частоты входной волны $p_0(t)$ выраженность эффекта уменьшается. Для достаточно толстой стенки $h = 0.3–0.5$ изменения $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; 1]$ вызывают разнонаправленные измене-



Фиг. 4. Зависимость объемного расхода от толщины стенки трубки $Q(h)$ при $\Gamma = 5; 10; 15; 20; 25$ (кривые 1–5)



Фиг. 5. Зависимость напряжения сдвига на стенке τ_w от числа Рейнольдса $\tau_w(Re)$: $\Gamma = 5, 10, 15, 20, 25$ (кривые 1–5)

ния расхода, не превышающие 5%. Расход увеличивается при уменьшении значений α_2 и увеличении α_1 . С увеличением числа Рейнольдса напряжение сдвига на стенке монотонно возрастает, причем значения τ_w выше для более жесткой стенки, особенно при $Re > 20$ (фиг. 5).

Изменения объемного расхода, связанные с параметрами стенки, объясняются взаимодействием стенки с потоком жидкости. В системе жидкость – трубка часть кинетической энергии движущейся жидкости расходуется на деформацию стенки и диссипацию. Таким образом, при увеличении энергии, которая передается от потока к стенке и вызывает ее деформации, расход жидкости уменьшается, что имеет место при увеличении податливости стенки (уменьшении Γ), увеличении времени релаксации и уменьшении времени ретардации материала. Подобные закономерности обнаружены также при течениях в схлопывающихся трубках, где развитие неустойчивости системы обусловлено

обменом энергии в системе жидкость–стенка [7, 16]. Из (3.3), (3.4) и аналогичных выражений для $u_r^{**}(r, x)$, $u_x^{**}(r, x)$ следует зависимость

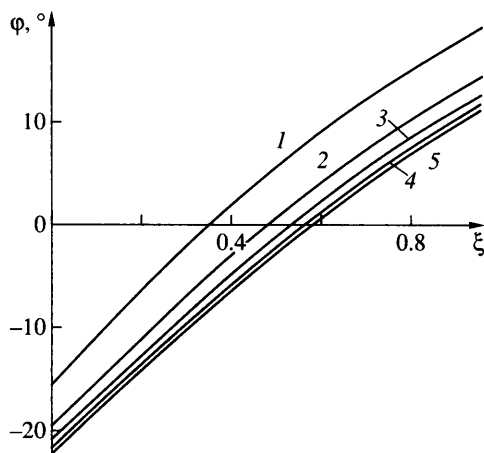
$$u_{r,x} \sim \frac{\text{Re}}{\beta^2 \Gamma} = \frac{1 + i\omega\alpha_2}{\rho\omega^2(1 + i\omega\alpha_1)} \quad (4.1)$$

В физиологическом диапазоне значений параметров изменения расхода, обусловленные взаимодействием на границе жидкость–стенка, невелики. При развитии патологий, связанных с утолщением стенки при одновременном снижении ее плотности за счет разрыхления и накопления жировых компонент, уменьшение расхода крови, как показывают расчеты, будет сопоставимо со снижением Q за счет уменьшения проводимости u , при $\xi_1 = 0.2-0.3$. Следует ожидать, что в норме объемный расход крови в сосуде будет восстановлен за счет активной регуляции просвета артерий, в том числе за счет обратной связи через параметры отраженной волны [22], поэтому исследованные зависимости $Q(\Gamma, \alpha_1, \alpha_2)$ существенны для течения крови в сосудах при наличии патологий стенки или же в трубках технических устройств. Кроме того, зависимость (4.1) представляет интерес с точки зрения предложенного недавно метода расчета внутрисосудистого давления по результатам неинвазивной ультразвуковой регистрации радиальных смещений сосудистой стенки $d(t) = a(x_0) + 2u_r(t, a(x_0), x_0)$ в произвольном сечении x_0 при прохождении пульсовой волны. Результаты измерений, представленные в [23], показывают хорошее соответствие между значениями наибольшего (систолического), наименьшего (диастолического) и среднего давления, измеренными в одной радиальной артерии пациента прямым методом (путем введения в артерию катетера с микроманометром), а в другой радиальной артерии – рассчитанными по осцилляциям диаметра $d(t)$, а также сходную динамику кривых $p(t)$ и $d(t)$. Погрешность неинвазивного метода составляет $\pm 15-20\%$ и увеличивается до $\pm 25\%$ при высоких значениях среднего давления (> 100 мм рт. ст.).

Таким образом, при патологиях сосудистой стенки, связанных с повышенным артериальным давлением, методику расчета кривых $p(t)$ по результатам регистрации кривых $d(t)$ следует уточнить, например, проводя расчеты по предложенной выше модели при задании характерной для артерий зависимости $p_0(t)$ и использовании значений параметров $\Gamma, \alpha_{1,2}, \xi$, свойственных различным патологическим состояниям.

Важным информативным параметром для медицинской диагностики может служить фаза ϕ объемного расхода. При этом изменения параметров стенки изменяют фазу незначительно ($\delta\phi \sim 4-8^\circ$), в то время как изменение коэффициента отражения ξ приводит к вариациям $\delta\phi \sim 40-50^\circ$ и изменению знака величины ϕ . Таким образом, колебания расхода могут как отставать, так и опережать по фазе колебания давления в зависимости от условий отражения волн. Подобная зависимость известна и неоднократно исследовалась для аорты, где бифуркация аорты обладает большим для артериальной системы коэффициентом отражения $\xi_1 = 0.25-0.35$ [12]. Функция $\phi(\xi)$ – возрастающая для всех исследованных случаев (фиг. 6), однако ее расположение и величина $\phi(0) - \phi(1)$ зависят от частоты волны. Поскольку пульсовая волна в артериях может быть представлена суммой нескольких первых Фурье-гармоник, то имеет смысл исследовать фазовый спектр объемного расхода. На основе расчетов по полученным выше соотношениям можно получить характеристики $\phi(\omega)$ при разных условиях отражения $\xi_1 \in [0; 1]$. Приведенные на фиг. 6 предварительные результаты показывают, что анализ фазового спектра можно использовать для диагностики патологически повышенных коэффициентов отражения, причем без предварительного исследования механических свойств стенки исследуемой артерии, используя синхронно зарегистрированные для данного сосуда кривые $p(t)$ и $Q(t)$ с помощью доступных неинвазивных методов.

Регистрируемые ультразвуковыми методами кривые $d(t)$, описывающие осцилляции стенки, используются для расчета кривых внутрисосудистого давления $p(t)$ и последую-



Фиг. 6. Зависимость фазы φ объемного расхода от коэффициента отражения ξ_1 волны давления при $\Gamma = 5, 10, 15, 20, 25$ (кривые 1–5)

щего анализа пульсовых волн, поэтому исследование влияния параметров материала стенки, условий течения и отражения волн важно для оценки диагностически значимой информации. Результаты проведенного исследования показали, что существующие методы расчета кривых $p(t)$ по измеренным значениям $d(t)$ [23] нуждаются в уточнении, по крайней мере, для случаев повышенного среднего артериального давления и сопутствующих сосудистых патологий.

Заключение. Исследовано распространение волн в толстостенной трубке из изотропного несжимаемого вязкоупругого материала, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, в приложении к распространению пульсовых волн в артериях. На конце трубки имеется элемент, моделирующий нижележащее сосудистое русло и определяющий условия отражения волн. Решение задачи получено в виде разложений по малому параметру, равному отношению радиального перемещения стенки ко внутреннему радиусу трубки. Получены соотношения для расчета линейной скорости и объемного расхода жидкости, перемещения стенки трубки, напряжения сдвига на стенке, спектра входной проводимости системы трубка–терминальный элемент. Показано, что ряд параметров пульсовых волн, такие как фазовый спектр объемного расхода крови $Q(t)$, слабо зависят от индивидуальных параметров сосудистой стенки и сильно зависят от условий отражения волн и, таким образом, могут быть предложены для диагностики состояния внутриорганного кровообращения (величины u_i) по результатам ультразвуковых измерений $Q(t)$ и осцилляций стенки $d(t)$ в питающей артерии органа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O'Rourke M.F., Kelly R.P., Avolio A.P. The Arterial Pulse. Philadelphia: Lea and Febiger, 1992. 295 p.
2. Моисеева И.Н., Регирер С.А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 134–139.
3. Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K. Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics // Circ. Res. 1991. V. 69. № 1. P. 246–249.
4. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 129–139.
5. Кизилова Н.Н. Исследование зависимостей давление–расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах // Акуст. вестник. 2004. Т. 7. № 1. С. 50–61.

6. *Milnor W.R.* Hemodynamics. Baltimore: Williams and Wilkins, 1989. 419 p.
7. *Hamadiche M., Kizilova N.N.* Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes // Intern. J. Dynam. Fluids. 2005. V. 1. № 1. P. 1–23.
8. *Womersley J.R.* An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries // Tech. Report TR-56-614. 1957. 45 p.
9. *Taylor M.G.* The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes // Biophys. Journal. 1966. V. 6. № 1. P. 29–51.
10. *Mirsky I.* Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube // Biophys. Journal. 1967. V. 7. № 2. P. 165–186.
11. *Atabek H.B.* Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube // Biophys. Journal/ 1968. V. 8. № 5. P. 626–649.
12. *Avolio A.P.* Multi-branched model of the human arterial system // Med. and Biol. Eng. and Comput. 1980. V. 18. № 6. P. 709–718.
13. *Левтов В.А., Редигер С.А., Шадрин Н.Х.* Реология крови. М.: Медицина, 1982. 270 с.
14. *Cox R.H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis // J. Biomech. 1969. V. 2. № 3. P. 251–265.
15. *Khiri A.W., Parker K.H.* Measurements of wave speed and reflected waves in elastic tubes and bifurcations // J. Biomech. 2002. V. 35. № 6. P. 775–783.
16. *Naili S., Ribreau C.* Wall shear stress in collapsed tubes // Eur. Phys. J. 1999. V. 5. № 1. P. 95–100.
17. *Alderson H., Zamir M.* Smaller, stiffer coronary bypass can moderate or reverse the adverse effects of wave reflections // J. Biomech. 2001. V. 34. № 11. P. 1455–1462.
18. *O'Rourke M.F., Pauca A., Jiang X.-J.* Pulse wave analysis // Brit. J. Clin. Pharmacol. 2001. V. 51. № 6. P. 507–522.
19. *Shankar V., Kumaran V.* Asymptotic analysis of wall modes in a flexible tube revisited // Eur. Phys. Journal. Ser. B. 2001. V. 19. № 4. P. 607–622.
20. *Wang J.J., Parker K.H.* Wave propagation in a model of the arterial circulation // J. Biomech. 2004. V. 37. № 4. P. 457–470.
21. *Quick C.M., O'Hara D.A., Noordergraaf A.* Pulse wave reflection and arterial inefficiency // Proc. 17th IEEE Annual Conf. "Engineering in Medicine and Biology". 1995. V. 1. P. 97, 98.
22. *Quick C.M., Berger D.S., Noordergraaf A.* Arterial pulse wave reflection as feedback // IEEE Trans. BME. 2002. V. 49. № 5. P. 440–445.
23. *Belani K., Ozaki M., Hynson J. et al.* A new noninvasive method to measure blood pressure // Anesthesiol. 1999. V. 91. № 3. P. 686–692.