

УДК 532.516.5:532.59

© 2006 г. Д. А. ТУШКАНОВ, В. Я. ШКАДОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ НА ПОЧТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проведены теоретические исследования нелинейных волн в пленках жидкости на твердой плоской стенке при ее малом отклонении от горизонта. Математическая модель сведена к системе двух уравнений эволюционного типа для толщины слоя и локального расхода жидкости. Наряду с силами вязкости, тяжести, поверхностного натяжения учитывается также перепад давления на толщине пленки, вызываемый проекцией силы тяжести на нормаль к удерживающей поверхности. Рассматриваются пространственно-периодические решения, развивающиеся во времени от малых начальных возмущений до регулярных нелинейных волн. Применяется спектральное представление решения и метод Галеркина по однородной координате с последующим численным интегрированием уравнений соответствующей динамической системы на больших интервалах времени. Выполнены расчеты вариантов в пространстве трех свободных управляющих параметров задачи и выведены некоторые основные закономерности нелинейной динамики двумерных волн. Результаты расчетов использованы для сопоставления с имеющимися экспериментальными данными. Показано, что выводы теории пригодны для истолкования и прогнозирования экспериментов.

*Ключевые слова:* капиллярная пленка, гидродинамическая неустойчивость, нелинейные волны, бифуркации, аттракторы, стохастичность, солитоны.

В работах [1–3] представлены обширные измерения нелинейных волн в стекающих пленках на наклонной поверхности при малых отклонениях ее от горизонта (углы наклона  $\theta = 4\text{--}10^\circ$ ). Серия измерений проведена как развитие и расширение пионерской работы [4], в которой впервые исследованы экспериментально волны на вертикальной твердой поверхности. Ставилась цель более углубленного изучения процессов развития и взаимодействий нелинейных волн, возникающих из малых начальных возмущений с использованием современных методов эксперимента, включая технику лазерного зондирования и флюоресцентного изображения волн. Авторы работ [1–3] отмечают, что они не располагали подходящей теорией волновых движений для компактного и упорядоченного представления результатов экспериментов, приводят лишь некоторые аналогии со случаем волн на вертикальной пленке, для которого такая теория существует. Результаты измерений представлены в виде наборов отдельных частных вариантов, сопровождаемых пояснениями и рассуждениями о возможных закономерностях в наблюдаемых сценариях развития волн.

В настоящей работе проведено систематическое исследование сценариев развития нелинейных волн в пленке путем численного решения уравнений математической модели. В расчетах моделируются условия, при которых проводились эксперименты [1–3], и проводится сопоставление расчетных и экспериментальных данных.

**1. Основные уравнения.** В основу теоретического исследования нелинейных волн примем систему уравнений [5] для локальных значений толщины пленки  $h(x, t)$  и расхода жидкости  $q(x, t)$ , отнесенных к толщине и расходу жидкости в невозмущенной пленке  $h_0, q_0$ . Запишем эту систему в виде

$$h_t + q_x = 0$$

$$q_t + \frac{6}{5} \left( \frac{q^2}{h} \right)_x = \frac{1}{5\delta} \left( h h_{xxx} + h - \frac{q}{h^2} \right) - \varepsilon h h_x \quad (1.1)$$

$$\delta = \frac{1}{45} \gamma^{-1/3} R^{11/9}, \quad \varepsilon = \frac{9 \operatorname{ctg} \theta}{R}, \quad h_0 = \left( \frac{v^2}{\bar{g}} \right)^{1/3} R^{1/3} \quad (1.2)$$

$$R = \frac{3q_0}{v}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho} (v^4 \bar{g})^{-1/3}, \quad \bar{g} = g \sin \theta$$

Решения системы (1.1) зависят от параметра подобия  $\delta$  [6] и от параметра  $\varepsilon$ , связанного с углом  $\theta$  отклонения удерживающей поверхности от горизонта. Соответствующий член во втором уравнении системы (1.1) отражает влияние поперечного градиента давления в пленке, возрастающего вместе с проекцией силы тяжести на нормаль к стенке, при уменьшении  $\theta$ .

При выводе системы (1.1) из полной краевой задачи для уравнения Навье – Стокса [5] предполагается, что вязкие, гравитационные и капиллярные силы на классе рассматриваемых течений имеют одинаковый порядок, а расход жидкости  $q_0$ , коэффициенты вязкости  $\nu$  и поверхностного натяжения  $\sigma$  таковы, что выполняется условие

$$n_*^2 \ll 1, \quad n_* = \gamma^{-1/3} R^{2/9} \quad (1.3)$$

Для случая  $\varepsilon = 0$ , соответствующего пленке на вертикальной поверхности  $\theta = \pi/2$ , в [5, 6] исследованы установившиеся нелинейные волны, а в [7] – нестационарное развитие таких волн из малых возмущений и их устойчивость. В последующих работах развития теории нелинейной бифуркационной задачи для регулярных волн и подробно изучены притягивающие свойства волновых решений (1.1) в нестационарной постановке. Результаты теории составили основу методики для истолкования и прогнозирования экспериментальных исследований нелинейных волн в пленках на вертикальной поверхности [8].

Случай  $\varepsilon \neq 0$  был рассмотрен в [9], где численно исследованы нелинейные волны в пленке на твердой поверхности при отклонениях ее от вертикали. В силу принятых предположений полученные численные решения (1.1) пригодны для волн с конечными амплитудами при ограниченных углах отклонения. Показано, что волны существуют при отклонениях в ту и другую сторону от точки  $\theta = \pi/2$ .

Для исследования волн при  $\varepsilon \neq 0$  и малом отклонении удерживающей поверхности от горизонта система (1.1) была использована в [10]. Применительно к экспериментам [1–3] ставилась ограниченная цель – дать качественное истолкование двух типов неустойчивости наблюдаемых регулярных волн. Принятый аналитический метод исследования в слабонелинейном приближении допускал представление основной волны лишь двумя-тремя гармониками разложений Фурье, что оказалось недостаточно для получения доказательных результатов о свойствах решений. Выводы о возможных эволюциях профилей развивающихся волн основаны на сопоставлении оценочных значений фазовых скоростей.

Подробное исследование возможностей системы (1.1) для правильного описания динамики волн в условиях экспериментов [1–3] проведено в [11]. Развивая метод работы [5], авторы вывели также расширенную систему из трех уравнений, в которой учитываются отклонения профиля продольной скорости в пленке от параболического, принятого в [5] при выводе системы (1.1). Рассматривались решения линейной задачи устойчивости, а также отдельные прямые численные решения для нелинейных волн. Во всех случаях решения (1.1) правильно воспроизводят свойства наблюдаемых волн на качественном уровне, хотя в отдельных случаях могут иметь место количественные рас-

хождения в деталях решений. В частности, сложный профиль уединенной волны в целом правильно описывается решением (1.1), хотя количество малых горбов капиллярной ряби перед ее фронтом больше по сравнению с экспериментальными наблюдениями.

В [12] составлен анализ различных обобщений системы (1.1) в применении к изучению критических явлений волновой динамики пленок и к описанию сложных волновых структур. Каждое из таких обобщений имеет свои достоинства и недостатки, но система (1.1) занимает среди них центральное место как наиболее простая и надежная при умеренно больших значениях чисел Рейнольдса.

В [1–3] утверждается, что некоторые теоретические результаты по динамике волн, пригодные для сопоставления с экспериментами, можно получить из решений так называемых слабонелинейных моделей. Однако можно показать, что при переходе к таким моделям основные параметры реальной пленки, связанные с ее конечной толщиной, в действительности теряются<sup>1</sup>.

Основное течение с постоянной толщиной и расходом дается решением уравнений (1.1)

$$h = 1, \quad q = 1 \quad (1.4)$$

а возмущение решения (1.4) в линейном приближении имеет вид

$$h' = \bar{h} e^{i\alpha(x-ct)}, \quad q' = \bar{q} e^{i\alpha(x-ct)} \quad (1.5)$$

$$i\alpha \left[ -c^2 + \frac{6}{5}(2c-1) + \frac{\alpha^2}{5\delta} + \varepsilon \right] = \frac{1}{5\delta}(3-c) \quad (1.6)$$

Покажем, что слабонелинейные модели, рассматриваемые в [1–3], неприменимы к исследованию динамики волн в пленках конечной толщины  $h_0$ .

Так как при  $h_0 \rightarrow 0$  имеем  $\delta \rightarrow 0$ , то  $\alpha_0 = \varepsilon_1 = \sqrt{15\delta} \ll 1$ . Введем растяжение независимых переменных  $t \rightarrow \alpha t$ ,  $x \rightarrow \alpha x$ . Тогда из первого уравнения (1.1) получаем

$$q = q_* = h^3 + \alpha^3 h^3 h_{xxx} + 15\delta \alpha h^3 h_x \left( h^3 - \frac{3 \operatorname{ctg} \theta}{R} \right) + o(\varepsilon_1^3) \quad (1.7)$$

При выводе (1.7) использованы соотношения

$$q = h^3, \quad q_t = -3h^2 q_x = -9h^4 h_x$$

с точностью до членов  $o(\varepsilon_1^2)$ . Теперь из второго уравнения (1.1) получаем уравнение для  $h(x, t)$

$$h_t + (q_*)_x = 0 \quad (1.8)$$

эквивалентное уравнению Бенни.

Положим

$$h = 1 + \varphi, \quad \varphi = \alpha \varepsilon_1^3 H, \quad \xi = x - 3t, \quad \tau = \alpha \varepsilon_1^3 t$$

Тогда в пределе при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  из (1.8) получаем уравнение

$$H_\tau + (3H^2 + H_{\xi\xi\xi} + H_\xi)_\xi = 0 \quad (1.9)$$

<sup>1</sup> Шкадов В.Я. Вопросы нелинейной гидродинамической устойчивости слоев вязкой жидкости, капиллярных струй и внутренних течений. Докт. дис. М.: МГУ. Мех.-мат. 1973. 258 с.

Таким образом, слабонелинейные уравнения (1.8), (1.9) представляют асимптотические следствия из полной системы (1.1) при стремлении к нулю толщины, амплитуды и волнового числа исследуемых волн. Для сопоставления теории с экспериментами [1–3] требуются решения системы (1.1) при конечных значениях  $\delta$ , а следовательно и  $\alpha$ ,  $\epsilon_1$ .

Многие основные свойства волн, наблюдаемых в пленках на наклонной поверхности, качественно согласуются с теоретическими решениями системы (1.1) для вертикальной пленки [2]. При обобщении результатов расчетов и сопоставлении их с экспериментами систематически используется указанная аналогия с волновыми структурами на вертикальной пленке.

**2. Типы волновых режимов.** В экспериментах [1–3] возбуждались  $t$ -периодические волны с помощью малых пульсаций расхода в начальном сечении  $x = 0$  с частотой  $f$ . Здесь будут рассматриваться  $x$ -периодические волны, развивающиеся по  $t$  от малых начальных гармонических волн. Главная цель – сопоставление предельных нелинейных режимов, которые достигаются соответственно при  $x \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow \infty$ . Можно сравнивать также промежуточные волновые структуры на разных этапах развития по  $t$  и  $x$ .

Развитие по времени пространственно-периодических возмущений определяется парой  $(\alpha, c_r + ic_i)$  при заданных  $\alpha$ , а пространственное нарастание периодических по времени возмущений –  $(\omega, \alpha_r + i\alpha_i)$  при заданных значениях  $\omega$ . В последнем случае дисперсионное уравнение (1.6) переписывается в уравнение для  $\alpha$  с помощью замены  $c = \omega/\alpha$ . Имеется тесная связь между этими двумя постановками. Полагая  $\alpha = \alpha_r$ ,  $x = (\omega/\alpha_r)t$ , приведем экспоненциальные множители в (1.5) для этих двух случаев к виду

$$e^{i\alpha(x - c_r t)} e^{\alpha c_i t}, \quad e^{i\alpha_r(x - (\omega/\alpha_r)t)} e^{-\alpha_i(\omega/\alpha_r)t}$$

Для решений (1.6) в рассматриваемой области выполняются с достаточной точностью соотношения

$$c_r = \frac{\omega}{\alpha_r}, \quad \alpha c_i = -\alpha_i \frac{\omega}{\alpha_r} \quad (2.1)$$

Таким образом, в системе координат, движущейся со скоростью  $\omega/\alpha$ , возмущения, вызываемые с частотой  $\omega$  в начальном сечении  $x = 0$ , усиливаются так же, как пространственно-периодические волны с волновым числом  $\alpha$ . Физическая частота  $f$  возбуждаемых при  $x = 0$  колебаний выражается следующим образом:

$$f = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{g^2}{v} \right)^{1/3} \alpha_r c_r n_* R^{1/3} \quad (2.2)$$

При каждом заданном варианте  $\delta$ ,  $\epsilon$  множество неустойчивых решений ограничено

$$\alpha \leq \alpha_0, \quad \omega \leq \omega_0, \quad \alpha_0 = \sqrt{5\delta(3 - \epsilon)}, \quad \omega_0 = 3\alpha_0$$

Введем нормированные значения волновых чисел  $s_\alpha = \alpha/\alpha_0 \leq 1$ ,  $s_f = \omega/\omega_0 \leq 1$ . Тогда конкретный вариант волновой структуры в пленке определяется заданием параметров  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $s_\alpha$  для временно растущих волн и параметров  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $s_f$  для пространственно растущих волн. Пусть задано  $s_f$ , тогда, вычислив из дисперсионного уравнения (1.6)  $\alpha_r + i\alpha_i$ , найдем соответствующее значение  $\alpha = \alpha_r$  и  $s_\alpha$ . Аналогично, используя (2.1), можно найти  $s_f$ , зная  $s_\alpha$ .

Решения системы (1.1) для нестационарной нелинейной  $x$ -периодической волны разыскиваются в виде

$$f(x, t) = \sum_{k=-N}^N f_k(t) e^{ik\xi}, \quad f_k = \bar{f}_{-k}, \quad f = (h, q), \quad h_0 = 1, \quad \xi = \alpha(x - c_l t) \quad (2.3)$$

где  $c_l$  – скорость соответствующей линейной волны. В начальный момент задается малая амплитуда первой гармоники  $h_1$ . Динамическая система для  $f_k(t)$ , возникающая после

$Re_G$	$\delta$	$\epsilon$	$n_*$	$\alpha_0$	$f_0$
17.9	0.227	1.788	0.286	1.172	11.80
20.4	0.266	1.569	0.294	1.378	14.90
25.2	0.345	1.269	0.308	1.726	20.98
27	0.376	1.185	0.313	1.848	23.36
28.1	0.394	1.140	0.316	1.913	24.74
30.2	0.430	1.059	0.321	2.042	27.48
32	0.462	1.000	0.325	2.150	29.85

подстановки (2.3) в (1.1), интегрируется численно до установления асимптотического предельного решения. Для вычисления нелинейных правых частей уравнений применяются псевдоспектральный метод и процедуры быстрых Фурье-преобразований, ранее применявшиеся в [13, 14].

Для вычисления фазовых скоростей гармоник нелинейной волны использовалось получающееся из (2.3) дифференцированием по  $t$  и по  $x$  соотношение

$$c = c_l - \frac{1}{k\alpha} \frac{d}{dt} \arctg \frac{f_{ki}}{f_{kr}} \quad (2.4)$$

Для сравнения с экспериментами следует учитывать следующие соотношения, в которых индекс  $G$  указывает величину из [1–3]

$$Re = 2/3 Re_G = 1/3 R, \quad \alpha_G = n_* \alpha, \quad c_G = 2/3 c \quad (2.5)$$

Полный набор параметров, характеризующих конкретный вариант развития волн, включает  $Re_G, f, \mu, \rho, \sigma, \theta, g$ . По формулам (1.2), (2.2), (2.5) вычисляются координаты точки в пространстве параметров подобия  $\delta, \epsilon, s_f$ .

В таблице представлены значения управляющих параметров, вычисленные по исходным данным, принимаемым в отдельных экспериментах при  $\theta = 8^\circ$  [1–3].

Применимость математической модели (1.1) к исследованию динамики нелинейных волновых режимов определяется условием (1.3). Это условие выполнено для всех вариантов, реализованных в экспериментах [1–3] (см. таблицу), что обеспечивается достаточно большим значением  $\gamma = 469$ .

Каждая пара значений  $\delta, \epsilon$  из таблицы порождает серию вариантов с параметром  $s_\alpha \in [0, 1]$ . Каждое из допустимых значений  $s_\alpha$  соответствует определенной внешней частоте возмущений, которую можно вычислить по (2.2) (фиг. 1).

Другие серии экспериментов [1–3] характеризуются следующими значениями параметров  $\delta, \epsilon$ :

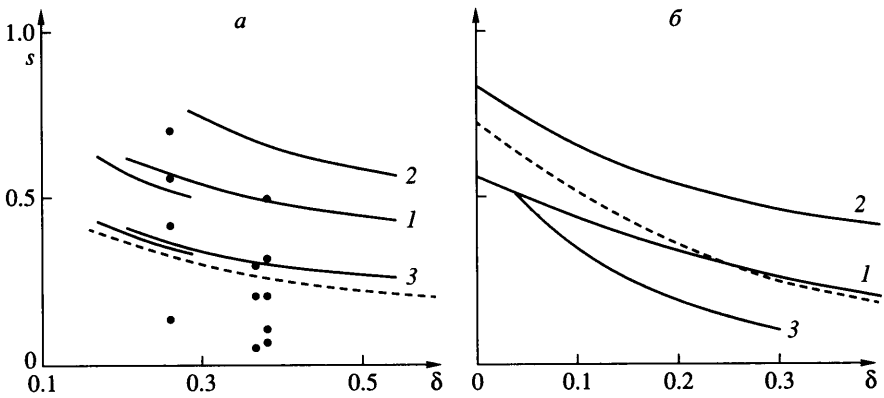
$$\theta = 6.4^\circ; \quad 0.122 \leq \delta \leq 0.538; \quad 1.084 \leq \epsilon \leq 3.000; \quad 11 \leq Re_G \leq 37$$

$$\theta = 5.6^\circ; \quad 0.160 \leq \delta \leq 0.266; \quad 1.995 \leq \epsilon \leq 3.000; \quad 13 \leq Re_G \leq 23$$

$$\theta = 4.6^\circ; \quad 0.172 \leq \delta \leq 0.268; \quad 0.981 \leq \epsilon \leq 2.432; \quad 23 \leq Re_G \leq 57$$

Таким образом представлены типичные значения  $\delta, \epsilon$ , характеризующие проведенные эксперименты, поэтому исследование влияния значений параметра  $\epsilon$ , иных чем в таблице, не проводилось.

На фиг. 1, *a* показаны границы существования волновых режимов разных типов, установленные экспериментально. Исходные экспериментальные данные, приведенные в [1, фиг. 18] при  $\beta = 4.6^\circ$  и в [2, фиг. 2] при  $\beta = 6.4^\circ$ , пересчитаны к параметрам подобия  $\delta, \alpha, \epsilon$ .



Фиг. 1. Бифуркационная диаграмма: *a* – эксперимент. Линия 1 разделяет одногорбые и многогорбые волны (выше и ниже линии 1). Линия 2 разделяет одногорбые волны на части с различным характером неустойчивости. Линия 3 – волны, наиболее растущие на линейной стадии. Сплошная – эксперимент, пунктир – теория. Точки – варианты расчетов; *b* – теория для  $\epsilon = 0$ . Линия 1 разделяет зоны одногорбых и многогорбых волн, линия 2 соответствует одногорбым волнам первого семейства с наибольшей амплитудой. Ниже линии 3 – быстрые многогорбые волны второго семейства. Пунктир – максимальный коэффициент усиления

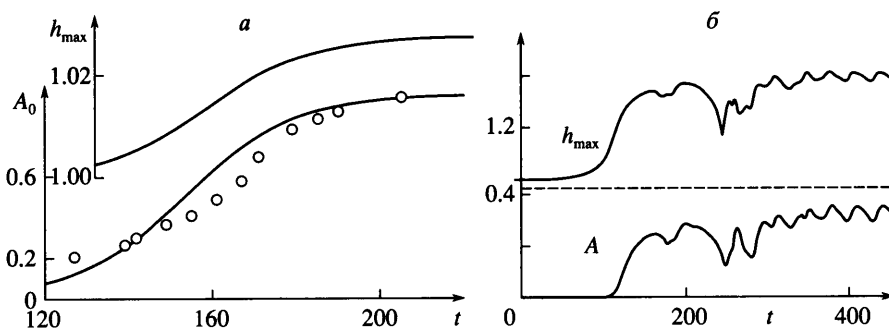
Эти данные охватывают различные интервалы значений  $\delta$ , но практически совпадают на интервале  $\delta$ , общем для этих двух серий экспериментов.

В экспериментах не проводилась классификация многогорбых волн ниже линии 1, хотя эта область наиболее интересна, в частности, тем, что при  $s_\alpha \rightarrow 0$  достигаются режимы уединенных волн. Наиболее четкие и законченные представления о границах, разделяющих волновые режимы разных типов, могут быть составлены при исследовании бифуркаций регулярных волн. Такие данные имеются для волновых режимов в пленке на вертикальной поверхности ( $\epsilon = 0$ ), полученные в [15–17] тщательными численными экспериментами с решениями системы (1.1). На фиг. 1, *b* показаны для сравнения волновые режимы для этого случая.

Важное различие случаев  $\epsilon \neq 0$  и  $\epsilon = 0$  состоит в том, что линия наиболее растущих волн расположена в зоне многогорбых волн в первом случае и в зоне одногорбых волн во втором. Как следствие этого, в режиме естественного развития волн преимущественно должны развиваться многогорбые волны в пленках на почти горизонтальной поверхности и одногорбые волны в пленке на вертикальной поверхности, что соответствует экспериментальным наблюдениям [1–3] и [4].

Использовались два различных подхода: во-первых, численно исследовались бифуркации регулярных (установившихся по  $t$ ) волновых решений системы (1.1); во-вторых, численно решалась задача Коши и получались сценарии развития с течением времени малых начальных возмущений к установившимся нелинейным волнам или более сложным волновым структурам. Изображенные на фиг. 1, *b* линии получены при анализе бифуркаций нелинейных волн при фиксированном  $\delta$  и переменном  $s_\alpha$ . На каждой из линий дополнительно к существующим начинается такое новое семейство, которое при  $\delta = \text{const}$  продолжается по  $s_\alpha$  до  $s_\alpha = 0$ .

В каждой из точек  $\delta, s$ , расположенных выше линии 1 до  $s = 1$  имеется единственное решение – нелинейная волна первого семейства (одногорбая). В точках  $\delta, s$  ниже линии 3 до  $s = 0$  наряду с волной первого семейства имеется нелинейная волна второго семейства (многогорбая). В области между линиями 1 и 3 показаны линии промежуточных бифуркаций, количество которых растет с увеличением  $\delta$ .



Фиг. 2. Развитие максимальной толщины и среднеквадратичного отклонения при  $\varepsilon = 0.266$ . *a* – одnogорбая волна ( $\varepsilon = 1.995$ ,  $s_f = 0.617$ ), точки – эксперимент, *б* – многогорбая волна ( $\varepsilon = 1.569$ ,  $s_\alpha = 0.15$ )

**3. Регулярные нелинейные волны.** Проведены серии расчетов методом установления, в ходе которых вычислялись коэффициенты разложения (2.3) как функции времени на интервале  $0 \leq t \leq T$  при малых отклонениях от основного течения в начальных условиях и различных значениях  $T$ . В различные моменты времени по формуле (2.3) восстанавливался профиль волны и фиксировались основные параметры, такие как фазовая скорость  $c_r$ , максимальная и минимальная толщина  $h_{\max}$ ,  $h_{\min}$ , амплитуда волны  $a = h_{\max} - h_{\min}$ , средний расход  $q_0$ . Пространственное развитие волны восстанавливалось по вычисленному развитию во времени на основе аналогии пространство–время. В качестве исходных величин для расчета  $\delta$ ,  $s_f$ ,  $\varepsilon$  использованы данные серии экспериментов при  $\theta = 8^\circ$ ,  $\sigma/\rho = 58.5 \text{ см}^3/\text{с}^2$ ,  $\nu = 6.16 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  и различных наложенных частотах колебаний  $f$ .

Каждый отдельный расчет состоял в том, что при заданных значениях  $\delta$ ,  $s$ ,  $\varepsilon$  решалась задача Коши – численно интегрировалась динамическая система для коэффициентов  $f_k(t)$  представления (2.3) на больших интервалах времени. Методом Галеркина выводилась из (1.1), (2.3) система (динамическая система) уравнений для коэффициентов  $f_k(t)$ .

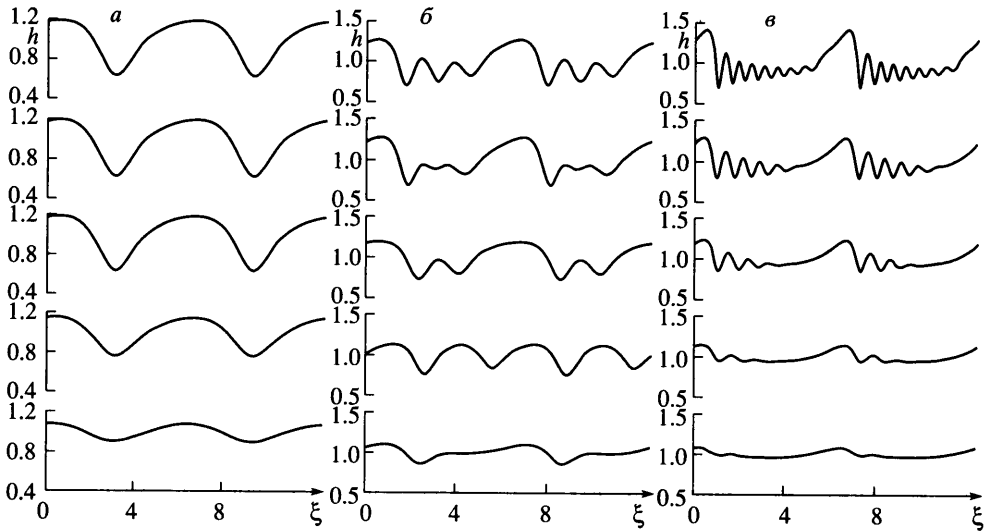
В любой точке ( $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $s_f$ ) малая начальная гармоническая волна ( $h_1 \neq 0$ ) усиливается с течением времени, возбуждаются более высокие гармоники, изменяется фазовая скорость, возрастают значения среднего расхода  $q_0(t)$ , амплитуды  $a(t)$ , максимальной толщины, среднеквадратичное отклонение поверхности  $A(t)$

$$A(t) = \sum_{n=0}^N (h_x^2)_n$$

где  $(h_x^2)_n$  –  $n$ -я компонента спектра  $h_x^2$ . Для одnogорбых волн зависимость указанных величин от времени монотонная, и после достаточно большого времени формируется регулярная нелинейная волна, периодическая по  $x$ ,  $t$ . В зоне многогорбых нелинейных волн возрастание характеристик немонотонное, сопровождается значительными нерегулярными отклонениями и заканчивается установлением двухпериодической или непериодической нелинейной волны, при этом осредненные характеристики остаются постоянными во времени.

На фиг. 2, *a* показана зависимость от времени  $A_0(t) = A(t)/A_{\max}$  – нормированное среднеквадратичное отклонение поверхности пленки при  $\theta = 5.6^\circ$ ,  $\text{Re}_G = 23$ ,  $f = 6$  Гц. Экспериментальные данные [1] пересчитаны на основе пространственно-временной аналогии

$$t - t_0 = \frac{n_*}{h_0 c_r} (x - x_0)$$



Фиг. 3. Развитие профилей нелинейных волн при  $\delta = 0.266$ ,  $\varepsilon = 1.569$ . *а* – волна первого семейства ( $s = 0.6$ ) при  $t = 50, 60, 70, 80, 90$ ; *б* – промежуточная многогорбая волна ( $s = 0.3$ ) при  $t = 70, 90, 150, 180, 250$ ; *в* – быстрая волна второго семейства ( $s = 0.15$ ) при  $t = 100, 110, 120, 130, 350$

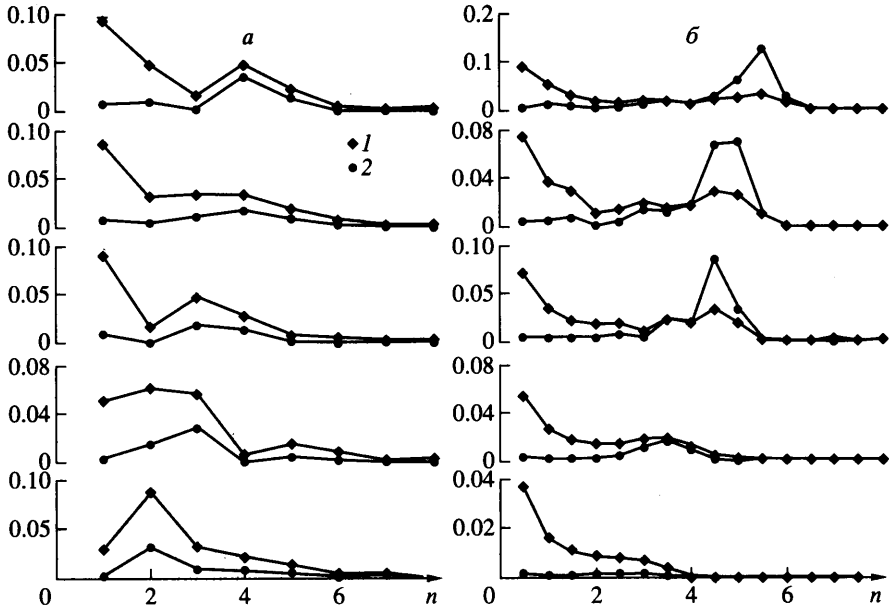
Для вычисления начальных значений  $t_0$ ,  $x_0$  выбрана точка  $A_0 = 0.2$ . Эта волна – одногорбая, выход на установившееся решение монотонный.

Для многогорбой нелинейной волны предельное состояние представляет двухпериодический по времени режим (фиг. 2, б). Образование двухпериодического режима при  $\varepsilon = 0$  вызывается колебаниями решений динамической системы между двумя квазистановившимися решениями [14, 17]. Это явление связано с неединственностью решений и их неустойчивостью.

Для многогорбых волн основное свойство профилей проявляется в образовании наряду с основным (наибольшим) локальным максимумом толщины дополнительных локальных максимумов, количество которых с течением времени увеличивается (фиг. 3). Общая длина пространственного отрезка, на котором сосредоточены дополнительные горбы, составляет примерно около половины длины волны, что согласуется с экспериментальными наблюдениями [2]. Предельное количество  $m$  дополнительных горбов зависит от базового волнового числа  $s_\alpha$  и удовлетворяет условию  $ms_\alpha \leq 1$ . Таким образом, каждая кратная гармоника  $ks_\alpha$  ( $k \leq m$ ), попадающая в область неустойчивости, вызывает формирование и рост дополнительного локального максимума. Эти свойства развивающихся профилей волн отчетливо прослеживаются также на фиг. 4, на котором показан сдвиг пространственных спектров волн  $(h_x^2)_n$  в сторону больших волновых чисел.

В силу того что притягивающие свойства и свойства устойчивости регулярных волновых режимов различны, лишь часть их может реализоваться в процессе саморазвития малых начальных возмущений. Это предельные решения задачи Коши по времени в расчетах, или развитые регулярные волны вдали от начального участка течения пленки в экспериментах. Множество таких нелинейных режимов, названных в [14, 17] доминирующими волнами, устанавливается прямыми численными решениями задачи Коши при различных  $\delta$ . Предельные устанавливающиеся режимы соответствуют решениям, для которых фазовая скорость наибольшая среди всех возможных решений при данных  $\delta$ ,  $s$ .



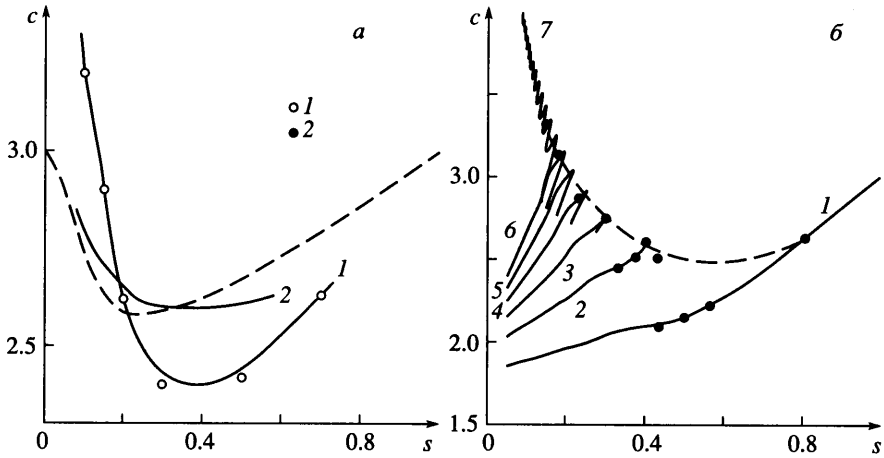


Фиг. 4. Развитие спектров волн при  $\delta = 0.266$ :  $h_n(1)$ ,  $(h_x^2)_n(2)$ ; а – волна промежуточно-го семейства ( $s = 0.3$ ) при  $t = 110, 120, 130, 140, 250$ ; б – волна второго семейства ( $s = 0.15$ ) при  $t = 100, 110, 120, 140, 350$

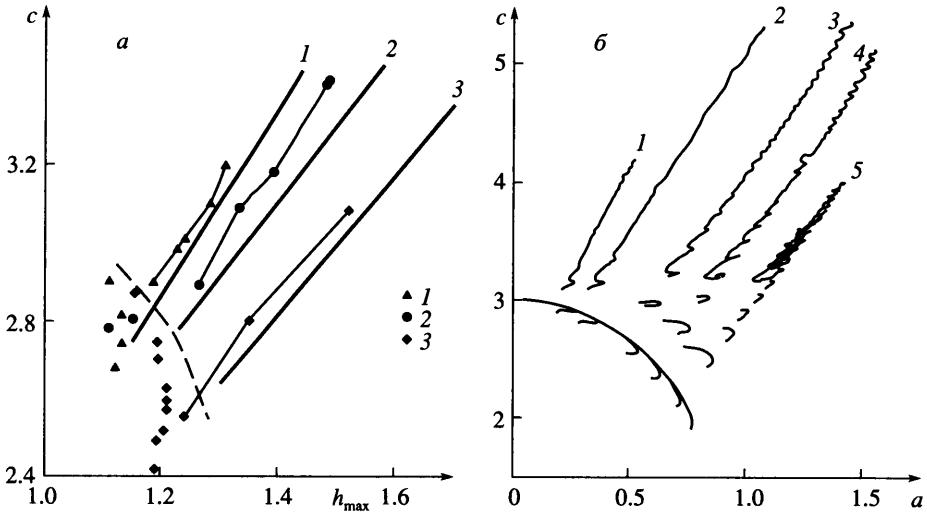
Были проведены численные расчеты полного цикла развития нелинейной волны из малого гармонического возмущения при  $\delta = 0.397$ ,  $\epsilon = 1.14$ ,  $s_f = 0.1; 0.15; 0.2; 0.3; 0.5$  (фиг. 5, а). Эти расчеты можно сравнивать с экспериментальными данными [1] при  $\delta = 6.4^\circ$ ,  $Re_G = 29$ , что соответствует  $\delta = 0.394$ ;  $\epsilon = 1.38$ . Для двухпериодических предельных режимов точки соответствуют наибольшим значениям, достигаемым в процессе вторичных колебаний параметров нелинейной волны.

Отметим хорошее соответствие экспериментальных и теоретических данных. Интервал неустойчивых частот  $0 \leq s_f \leq 1$  делится на три части. При  $s_A \leq s \leq 1$  фазовая скорость нелинейной волны убывает с уменьшением  $s$  монотонно, оставаясь меньше скорости линейной волны малой амплитуды. При  $s_B \leq s \leq s_A$  фазовая скорость растет. При  $0 \leq s \leq s_B$  фазовая скорость превышает скорость линейной волны и растет с уменьшением частоты  $s_f$ . Точка А расположена на границе 1 фиг. 1, разделяющей одногорбые и многогорбые волны.

На фиг. 5, б для сравнения представлена также полная картина семейств решений на вертикальной пленке в виде кривых  $c(s)$ , каждая из которых начинается в точке бифуркации и заканчивается в точке  $s = 0$ . Глобальным аттрактором, к точкам которого притягиваются решения от малой линейной волны при  $t \rightarrow \infty$ , является кусочно-непрерывная линия, составленная из кусков, принадлежащих разным семействам, таким, что при каждом  $s_f$  в точке этой линии фазовая скорость максимальна среди всех других возможных решений при данном  $s_f$  (доминирующие волны [17]). При любом  $\delta$  последний кусок аттрактора при малых  $s_f$  принадлежит второму основному семейству ( $s_f \leq s_{f_2}$ , где  $s_{f_2}$  – точка бифуркации второго семейства). На этой ветви реализуются быстрые уединенные волны возвышения, переходящие в положительные солитоны при  $s \rightarrow \infty$ . Именно для этих волн зависимости  $c(h_{\max})$  или  $c(a)$  оказываются линейными. Волны семейств



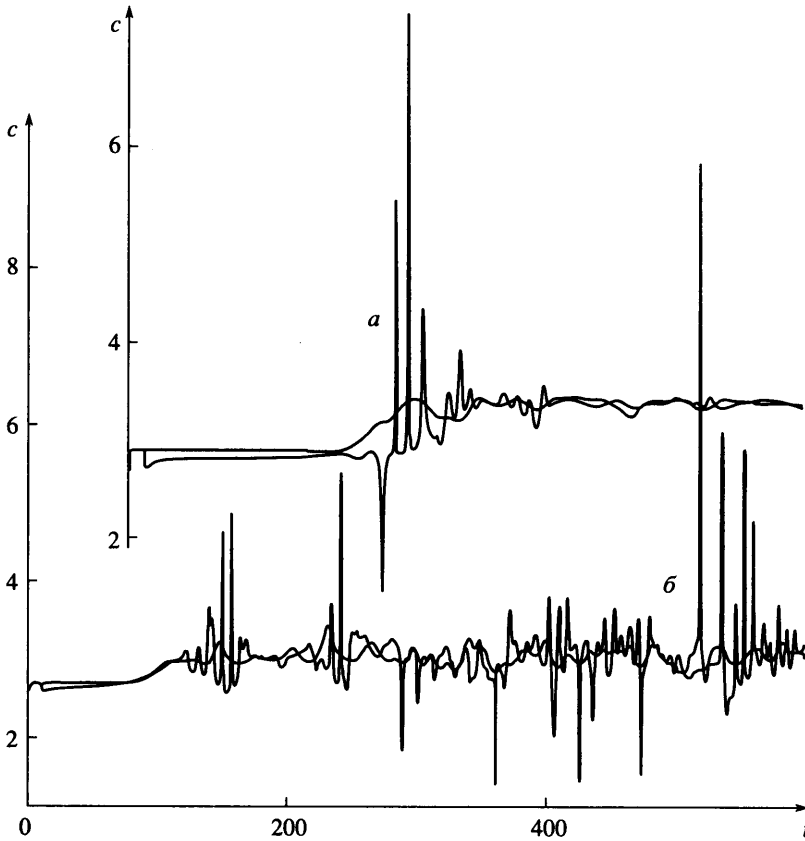
Фиг. 5. Зависимость фазовой скорости от волнового числа: *a* – нелинейные волны при  $\delta = 0.4$ ,  $\theta = 6.4^\circ$ , линии 1, 2 – развившиеся нелинейные и гармонические волны (эксперимент), пунктир – гармонические волны (теория), точки (1) – нелинейные волны (теория); *б* –  $\delta = 0.247$ ,  $\theta = 90^\circ$ , точки 2 – предельные устанавливающиеся режимы



Фиг. 6. Зависимость фазовой скорости от  $h_{\max}$ : *a* –  $\delta = 0.227, 0.266, 0.394$  – точки 1–3 (теория), линии 1–3 (эксперимент [3]), *б* –  $\theta = 90^\circ$ ,  $\delta = 0.04, 0.055, 0.1, 0.15, 0.247$  (линии 1–5)

промежуточных бифуркаций и первого семейства свойств линейности  $c(a)$  не обладают. На фиг. 6, *б* показаны для сравнения зависимости  $c(a)$ , полученные методом исследования бифуркаций в системе (1.1).

**4. Неустойчивости регулярных волн и сценарии их развития.** О степени синхронизации отдельных гармоник, составляющих нелинейную волну, можно судить по их фазовым скоростям (2.4). Можно выделить временные интервалы формирования регулярной волны и временной эволюции сформировавшейся волны (фиг. 7). В конце первого интервала при  $T \approx T_*$  в обоих случаях возникает синхронизированная по фазовым ско-



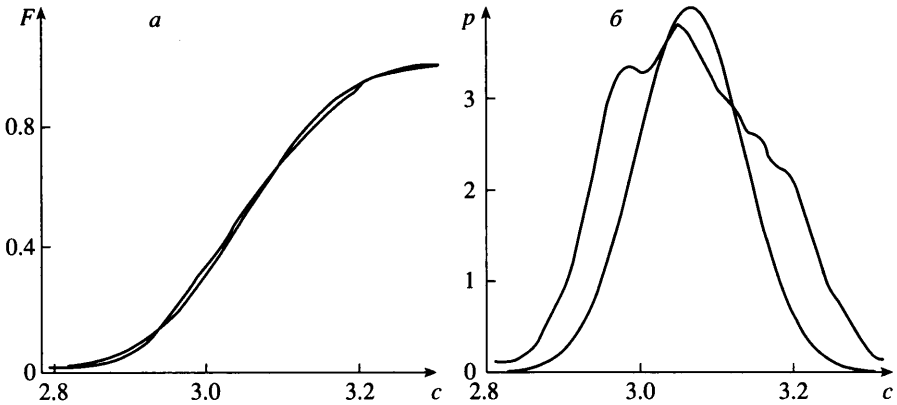
Фиг. 7. Фазовые скорости первой и пятой гармоник,  $s = 0.1$ .  $a - \delta = 0.266$ ,  $\varepsilon = 1.569$ ;  
 $b - \delta = 0.394$ ,  $\varepsilon = 1.14$

ростам нелинейная волна, которую можно сопоставлять с развитыми волнами, наблюдаемыми в экспериментах до их существенного искажения развивающейся неустойчивостью. Эволюция сформировавшейся волны при  $T > T_*$  в двух случаях в расчетах происходит по-разному. В первом случае фазовые скорости слабо изменяются в соответствии с колебаниями двухпериодической структуры. Во втором – эволюция сопровождается отдельными, возможно случайными, резкими изменениями значений фазовой скорости первой гармоники.

Если в первом случае имеются малые периодические отклонения фазовой скорости от среднего значения, то во втором – пульсации значений явно стохастические (фиг. 8). Фактически набор гармоник не представляет синхронизированную волну по фазовым скоростям в каждый момент времени, и можно говорить о синхронизации гармоник в единую волну только в среднем.

Пульсации параметров развившихся нелинейных волн связаны с их неустойчивостью. В [7] предложен метод, который объединяет вычисление основной нелинейной волны и исследование ее неустойчивости. Решение уравнений (1.1) разыскивается по аналогии с (2.3) в виде

$$f(x, t) = \sum_{k=-N}^N f_k(x, t) e^{ik\xi}, \quad \xi = \alpha x - \omega_0 t \quad (4.1)$$



Фиг. 8. Характеристики стохастического ряда фазовой скорости: *a* – функция распределения; *б* – плотность распределения

где предполагается, что в общем случае коэффициенты  $f_k$  зависят от  $x$ ,  $t$ , а  $\alpha$ ,  $\omega_0$  – константы. Подставляя (4.1) в (1.1), представим левые части в виде разложений по гармоникам  $\exp\{ik\xi\}$  и, приравнявая нулю коэффициенты при них, получим уравнения для  $f_k(x, t)$ . При  $f_k = f_{k0} = \text{const}$  эти уравнения составляют нелинейную алгебраическую систему для  $f_{k0}$ ,  $c_0$ , а разложение (4.1) дает предельную нелинейную регулярную волну, перемещающуюся с фазовой скоростью  $c_0$ . Решение этой бифуркационной задачи прямыми вычислениями дано в [7] для волн первого семейства и методом инвариантного погружения в [15, 16] для волн второго семейства. В [7] этим методом исследованы также ветвления других семейств решений. Если принять в (4.1)  $f_k = f_k(t)$ , то получающаяся динамическая система для  $f_k$  описывает развитие по времени пространственно-периодической нелинейной волны. При численном интегрировании задачи Коши получаем при  $t \rightarrow \infty$  решение для предельной регулярной волны ( $f_k(t) \rightarrow f_{k0}$ ) или одно из таких решений, если при заданных значениях внешних параметров  $\delta$ ,  $s$  их существует несколько. Уже первые численные решения задачи о развитии волн из малых начальных возмущений в [7] показали, что существует две возможности: либо переход  $f_k \rightarrow f_{k0}$  происходит монотонно, либо он сопровождается колебаниями (пульсациями) параметров нелинейной волны, не затухающими при  $t \rightarrow \infty$ .

Следуя [7], развитие возмущений волнового режима можно описать в виде

$$f_k(x, t) = f_{k0} + f_{k1}(x, t) \quad (4.2)$$

где  $\{f_{k0}\}$  – волновое решение (1.1),  $f_{k1}(x, t)$  – малые возмущения. Подставим (4.2) в систему для  $f_k(x, t)$  и отбросим члены второго (и выше) порядка относительно  $f_{k1}$ . Рассмотрим частные решения получающейся линейной системы в виде бегущих волн

$$f_{k1}(x, t) = a_{k1} \exp\{i(b\xi - i\omega_1 t)\} \quad (4.3)$$

Здесь  $a_{k1}$  обозначают амплитуду возмущения любой из неизвестных величин  $h_{k0}$ ,  $q_{k0}$ . Величина  $b$  считается заданной, она характеризует отношение длин волн: при  $b < 1$  длина волны возмущения больше, а при  $b > 1$  – меньше, чем базовая длина волны исходного режима. Для определения  $a_{k1}$  из линеаризованной системы получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений. В случае нетривиального решения определитель ее должен обращаться в нуль, и это приводит к характеристическому уравнению для определения собственного числа  $\omega_1$ .

При подстановке возмущенного решения (4.2), (4.3) в разложение (4.1) получаем систему вторичных волн малой амплитуды, наложенных на основной волновой режим

$$\exp\{i[(b \pm k)\alpha x - (c_0(b \pm k) - 1)\alpha t]\} \exp\{\omega_{1r}\alpha t\} \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует связь между исходной длиной волны  $\lambda_b$ , возмущенной  $\lambda_d$  и фазовыми скоростями  $c_0$  и  $c_{1k}$

$$\lambda_b = \left(\pm 1 + \frac{b}{k}\right)\lambda_d, \quad c_{1k} = c_0 - \frac{\omega_{1i}}{b \pm k}, \quad b \neq k \quad (4.5)$$

Амплитуда порожденной гармоникой (4.4) экспоненциально растет при  $\omega_{1r} > 0$ , при этом фазовые скорости могут изменяться в широком диапазоне в зависимости от значения  $\omega_{1i}$  и номера гармоникой исходной волны. В [7] была установлена неустойчивость волновых нелинейных режимов, так как при исследованных значениях  $0.6 \leq b \leq 1.5$  для пяти собственных значений из десяти выполнялось условие  $\omega_{1r} > 0$ .

При прямом численном интегрировании уравнений динамической системы для  $f_k(t)$  при фиксированном волновом числе  $s$ , что определяет периодичность решения по пространственной координате, в системе имеются вторичные возмущения, кратные основной волне. Таким образом, в (4.3) могут быть значения  $b = 1, 2, \dots, k_{\max}$ . Чем больше значение  $k_{\max}$ , тем сложнее набор вторичных волн. С уменьшением  $s$  от  $s = 1$  и приближением к точке  $s = 0$  (или увеличением  $\delta$  при фиксированном  $\alpha$ ) усложняется профиль волны и требуется соответственно увеличивать  $N$  в (4.1). Соответственно этому возрастают количество мод вторичной неустойчивости и пульсации, сопровождающие развитие волны. С этим свойством решений можно связать стохастический характер возникающих пульсаций.

**Заключение.** Система уравнений для локальных значений толщины пленки  $h(x, t)$  и расхода жидкости  $q(x, t)$  позволяет воспроизвести в расчетах основные свойства двумерных нелинейных волн, развивающихся в пленках жидкости на наклонных плоских поверхностях. Имеется не только качественное, но и количественное соответствие расчетных и экспериментальных данных, которые касаются профилей предельных регулярных волн, саморазвивающихся из малых возмущений заданной частоты, а также фазовых скоростей, изменяющихся вместе с амплитудой волн.

В расчетах отчетливо воспроизводятся эволюции профилей регулярных волн от однокорбых почти гармонических к уединенным волнам при уменьшении частоты возбуждения от критического значения на нейтральной кривой в области линейной неустойчивости. При естественном развитии волн под воздействием белого шума преимущество в развитии имеют многокорбых длинные волны, так как максимум коэффициента усиления сдвинут в сторону малых волновых чисел.

Пока остается открытой проблема разрушения регулярных волн с последующим формированием пространственно-временного хаоса, которым заканчивается развитие волн в экспериментальных установках большой протяженности. Хотя в статье продемонстрирована возможность проявления стохастических свойств решений на двумерных волнах вследствие их неустойчивости, для сопоставления с экспериментами этих стадий развития волновых структур требуется рассматривать трехмерные возмущения и взаимодействия одновременно развивающихся и взаимодействующих волн с различными базовыми частотами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 03-01-00042).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu J., Paul J.D., Gollub J.P. Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.

2. *Liu J., Gollub J.P.* Solitary wave dynamics of film flows // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6. №. P. 1702–1712.
3. *Liu J., Schneider J.B., Gollub J.P.* Three-dimensional instabilities of film flows // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 1. P. 55–67.
4. *Капица П.Л., Капица С.П.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // *ЖЭТФ*. 1949. Т. 19. № 2. С. 105–120.
5. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1967. № 1. С. 43–51.
6. *Шкадов В.Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1977. № 1. С. 63–66.
7. *Шкадов В.Я.* К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1968. № 2. С. 20–25.
8. *Shkadov V.Ya.* Hydrodynamics of sloped falling films // *Interfacial Phenomena and the Marangoni Effect* / Eds. M. Velarde and R.K. Zeytounian. Berlin: Springer, 2000. P. 191–224.
9. *М. Набиль Есмаиль, Шкадов В.Я.* К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1971. № 4. С. 54–59.
10. *Cheng M., Chang H.-C.* Competition between subharmonic and sideband secondary instabilities on a falling film // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 1. P. 34–54.
11. *Ruyer-Quil C., Manneville P.* Modeling film flows down inclined planes // *Eur. Phys. J. Ser. B*. 1998. V. 6. № 2. P. 277–292.
12. *Ruyer-Quil C., Manneville P.* Improved modeling of flows down inclined planes // *Eur. Phys. J. Ser. B*. 2000. V. 15. P. 357–369.
13. *Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я.* Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости // *Теорет. основы химич. технологии*. 1987. Т. 21. № 2. С. 177–183.
14. *Сисоев Г.М., Шкадов В.Я.* Развитие доминирующих волн из малых возмущений в стекающих пленках вязкой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 1997. № 6. С. 30–41.
15. *Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // *ПММ*. 1984. Т. 48. № 4. С. 691–696.
16. *Бунов А.В., Демехин Е.А., Шкадов В.Я.* Бифуркации уединенных волн в стекающем слое жидкости // *Вестн. МГУ. Математика, механика*. 1986. № 2. С. 73–78.
17. *Сисоев Г.М., Шкадов В.Я.* О двухпараметрическом многообразии волновых решений уравнения стекающей пленки вязкой жидкости // *Докл. РАН*. 1999. Т. 367. № 1. С. 56–61.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VIII.2005