

УДК 532.529:532.517.4

© 2006 г. А. И. КАРТУШИНСКИЙ, Э. Э. МИХАЭЛИДЕС, Ю. А. РУДИ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННОГО  
ГАЗОДИСПЕРСНОГО ПОТОКА В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ**

Представлена модель движения примеси твердых полидисперсных по составу частиц в горизонтальном плоском канале с учетом осаждения на нижнюю стенку. Моделирование дисперсной фазы, состоящей из шести фракций частиц, характеризующихся размерами и массовой долей, проведено в эйлерой форме. Столкновения частиц происходят из-за разницы скоростей в осредненном движении фракций и из-за пульсаций скоростей частиц. Учет столкновений важен в случае потоков с большой массовой загрузкой (в модели до 50 кг/кг) и из-за их гравитационного накопления на нижней стенке. Для корректного описания столкновений частиц со стенками вводятся падающий и отраженный потоки частиц с коэффициентами восстановления и трения нормальных и тангенциальных скоростей. Расчеты протестированы на экспериментах [1].

*Ключевые слова:* газ – твердые частицы, межчастичные столкновения, падающий и отраженный потоки, плоский горизонтальный канал.

Газодисперсные потоки широко распространены в природе и технике – это диффузия примесей в атмосфере и пылевые бури, пневмотранспорт и кипящие слои, сжигание твердого топлива в ракетных двигателях и плазменное напыление. Особенность данной работы – математическое моделирование движения газозвеси в горизонтальном канале с учетом процесса осаждения частиц на нижнюю стенку, что включает учет силы тяжести, взаимодействие частиц со стенками канала, между собой, и с несущей средой, описываемой силой вязкого сопротивления, процесс турбулентной диффузии частиц, подъемных сил Магнуса и Саффмена (из-за вращения частиц сталкивающихся с нижней стенкой и неравномерного поля скорости газа).

Расчеты описывают наблюдаемое в экспериментах [1] асимметричное распределение осредненных скоростей обеих фаз по сечению канала, динамику изменения скоростей фаз от асимметричного к симметричному распределению при увеличении скорости переноса. Определение минимальной скорости, при которой еще наблюдается транспорт примеси, обсуждается в [2, 3]. Распределения осредненных и пульсационных скоростей газовой и твердой фаз с симметричной формой наблюдались в горизонтальной трубе [4] при скоростях потока 18 м/с. В [4] отмечено, что взаимодействие частиц со стенками трубы и между собой играет заметную роль в формировании скоростных полей; была использована разработанная стохастическая модель столкновений частиц [5], когда случайным образом (генератором случайных чисел) вводится фиктивная частица, с которой сталкиваются прослеживаемые частицы. Подобный подход использован в [6], а в [7] моделирование было ограничено коротким участком трубы. В эйлеровом подходе [8, 9] столкновения частиц описываются с помощью теории “гранулированных потоков” [10]. В данной статье замыкание уравнений строится на базе оригинальной модели столкновения частиц [11], в которой разработан метод осреднения и получены аналитические формулы псевдовязкостных коэффициентов.

В [12] в отличие от [13–17], где описывалось подавление турбулентности частицами, учитывали как генерацию, так и диссипацию турбулентности частицами, тестируемое расчетами двухфазных вертикальных потоков [18].

Рассматриваемая здесь модель движения твердых частиц в плоском горизонтальном канале апробировалась экспериментами [1], а используемый метод разложения потока частиц на падающий и отраженный, но без учета их столкновений и осаждения уже рассмотрен в [19]. Кроме того, проведены расчеты для больших загрузок потока (до 50 кг частиц/кг воздуха) с частицами различных размеров от 100 мкм до 1 мм. Обнаружено, что при больших загрузках скорости газовой фазы становятся заметно асимметричными из-за роста концентрации на нижней стенке.

**1. Уравнения движения газовой фазы.** Уравнения движения даются в приближении плоского пограничного слоя с замыканием по однопараметрической модели [12] с введением “гибридного” масштаба турбулентности для скорости диссипации турбулентной энергии  $L_h$ . Тогда уравнения неразрывности, переноса импульса, турбулентной энергии имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{\rho dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i C'_{Di} (u - u_{si})}{\tau_i} \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( (v_t + v) \frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 + v_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - v \left( \frac{\partial(\sqrt{k})}{\partial y} \right)^2 + \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{\tau_i} \left\{ [(u - u_{si})^2 + (v - v_{si})^2] - \left( \sum_{x,y} \langle u'_{si} u' \rangle \right) \right\} - \frac{k^{3/2}}{L_h} \quad (1.3)$$

$$v_t = C_{\mu t} \sqrt{k} L_T, \quad C_{\mu t} = 0.07 \exp \left[ -2.5 \left( 1 + \left( \frac{L_T \sqrt{k}}{50v} \right) \right)^{-1} \right], \quad L_T = \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0} \quad (1.4)$$

$$L_h = \frac{2L_T \lambda}{L_T + \lambda}, \quad \lambda = \delta_\Sigma \left[ \left( \frac{\pi \rho_p}{6\rho \alpha_\Sigma} \right)^{1/3} - 1 \right], \quad \delta_\Sigma = \frac{1}{\alpha_\Sigma} \sum_{i=1,6} \alpha_i \delta_i, \quad \alpha_\Sigma = \sum_{i=1,6} \alpha_i \quad (1.5)$$

Следуя процедуре [20], рассмотренной для случая движения однофазной несжимаемой жидкости (газа)  $\rho = \text{const}$ , совместное решение уравнений сплошности (1.1) и импульса (1.2), записанных для случая двухфазной жидкости, приводит к конечным представленным в квадратурах выражениям для перепада давления и поперечной скорости несущей (газовой) фазы в виде

$$\frac{dp}{dx} = \left( \int_0^h \frac{dy}{u^2} \right)^{-1h} \int_0^h \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^6 \alpha_i \frac{C'_{Di}}{\tau_i} (u - u_{si}) \right] dy \quad (1.6)$$

$$v = u \left\{ \int_0^h \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \left( (v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{dp}{\rho dx} + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \frac{C'_{Di}}{\tau_i} (u - u_{si}) \right] \right\} dy \quad (1.7)$$

$$C'_{Di} = 1 + 0.1 \text{Re}_{si}^{0.687}, \quad \text{Re}_{si} = \frac{\delta_i \sqrt{(u - u_{si})^2 + (v - v_{si})^2}}{v}, \quad \tau_i = \rho_p \delta_i^2 / 18\mu \quad (1.8)$$

где  $u$ ,  $v$  – осевая и поперечная составляющие скорости газовой фазы,  $u_{si}$ ,  $v_{si}$  – осевая и поперечная составляющие скорости дисперсной фазы ( $i$ -я фракция),  $k$  – энергия турбу-

лентности,  $\alpha_i$  и  $\delta_i$  – массовая концентрация частиц и их размер ( $i$ -я фракция),  $\lambda$  – межчастичное расстояние,  $\epsilon_0$  и  $L_T$  – скорость диссипации энергии турбулентности однофазного потока и его интегральный масштаб турбулентности,  $C'_{Di}$  – коэффициент сопротивления (поправка на режим обтекания, отличный от стокова режима) для случая  $0 \leq \text{Re}_{si} \leq 10^3$  [21] и число Рейнольдса частицы, соответственно,  $\tau_p$  – время релаксации частицы,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\nu_t$  – коэффициенты динамической, кинематической и турбулентной вязкостей,  $\rho$ ,  $\rho_p$  – физические плотности газа и материала частиц.

Как видно из уравнений (1.6) и (1.7), записанных в квадратурах, они линейно зависят от концентрации частиц фракций  $\alpha_i$ . В данном рассматриваемом случае движения примеси твердых частиц в горизонтальном канале с ростом концентрации частиц эффект осаждения частиц проявляется более ярко и выражается в увеличении концентрации частиц на нижней стенке, что ведет к изменению как поперечной составляющей скорости частиц (1.6), так и перепада давления (1.7), а также в деформировании профиля осевой составляющей скорости газа (1.2), что будет продемонстрировано графически в разд. 4.

Граничные условия ставятся на верхней и нижней стенках канала – условия прилипания и непроницаемости

$$y = 0, \quad y = h: u = k = v = 0 \quad (1.9)$$

**2. Уравнения движения падающего и отраженного потоков (поли)дисперсной фазы и граничные условия.** Уравнения сохранения массы, импульса и вращательного момента каждой фракции записаны в тензорном виде в приближении пограничного слоя с общим числом фракций 6, моделирующих поведение полидисперсного материала. Фракции 1–3 учитывают движение падающего потока, а 4–6 – отраженного. Интегрирование уравнений ведется по всей ширине канала. Для падающего потока частиц отсчет координат идет от верхней стенки до нижней, а для отраженного, наоборот, от нижней стенки. Скорости отраженных частиц на нижней стенке вычисляются по скоростям падающих частиц с учетом коэффициентов восстановления нормальной скорости  $k_n$  и трения  $f$  и условиями столкновения частиц со стенкой – со скольжением или без [22]. Влияние частиц на осредненные (1.2), (1.6), (1.7) и турбулентные (1.3) параметры осуществляется через силу сопротивления. Тогда система уравнений падающего (отраженного) потоков примет вид

$$u_{si} \frac{\partial u_{si}}{\partial x} + \left( u_{si} - \frac{(D_{si} + D_{it} + v_{si}^x) \partial \alpha_i}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_{si}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{si}^x \frac{\partial u_{si}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \alpha_i \langle u_{si}^2 \rangle_c}{\alpha_i \partial x} - \quad (2.1)$$

$$- \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial}{\partial y} \alpha_i \langle u'_{pi} v'_{pi} \rangle_t + \frac{C'_{Di}}{\tau_i} (u - u_{si}) \mp C_{Mi} \Omega_i (v - v_{si})$$

$$u_{si} \frac{\partial v_{si}}{\partial x} + \left( v_{si} - \frac{(D_{si} + D_{it} + v_{si}^y) \partial \alpha_i}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \right) \frac{\partial v_{si}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2v_{si}^y \frac{\partial v_{si}}{\partial y} - \frac{2k_{si}}{3} \right) - \frac{\partial \alpha_i \langle u'_{si} v'_{si} \rangle_c}{\alpha_i \partial x} - \quad (2.2)$$

$$- \frac{\partial \alpha_i \langle v_{pi}^2 \rangle_t}{\alpha_i \partial y} + \frac{C'_{Di}}{\tau_i} (v - v_{si}) \pm \left( C_{Mi} \Omega_i \pm F_{si} \text{sgn} \left( \frac{\partial (u - u_{si})}{\partial y} \right) \right) (u - u_{si}) \pm g \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right)$$

$$u_{si} \frac{\partial \omega_{si}}{\partial x} + \left( v_{si} - \frac{(D_{si} + D_{it} + v_{si}^\omega) \partial \alpha_i}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega_{si}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{si}^\omega \frac{\partial \omega_{si}}{\partial y} \right) - \frac{\partial \alpha_i \langle \omega'_{si} u'_{si} \rangle_c}{\alpha_i \partial x} - \quad (2.3)$$

$$- \frac{\partial \alpha_i \langle \omega'_{pi} v'_{pi} \rangle_t}{\alpha_i \partial y} - \frac{C_{\omega i}}{\tau_i} \Omega_i$$

$$\frac{\partial(\alpha_i u_{si})}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_i v_{si})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (D_{si} + D_{ii}) \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \quad (2.4)$$

Верхние знаки  $\mp$  и  $\pm$  в слагаемых уравнений (2.1), (2.2) относятся к падающему потоку, а нижние – к отраженному. Уравнения (2.1), (2.2) – проекции движения вдоль оси и поперек, (2.3), (2.4) – уравнения вращения и перенос массы частиц  $i$ -й фракции. Для замыкания уравнений твердой фазы (2.1)–(2.4) используется гипотеза Буссинеска с учетом псевдовязкостных коэффициентов  $v_{si}^{x,y,\omega}$ ,  $D_{si}$  и тензоров  $\langle u_{si}^{\prime 2} \rangle_c$ ,  $\langle v_{si}^{\prime 2} \rangle_c$ ,  $\langle u_{si}^{\prime} v_{si}^{\prime} \rangle_c$ ,  $\langle u_{si}^{\prime} \omega_{si}^{\prime} \rangle_c$ ,  $\langle v_{si}^{\prime} \omega_{si}^{\prime} \rangle_c$ , имеющих столкновительное происхождение, полученных аналитически [11], а выражения  $\langle u_{pi}^{\prime} v_{pi}^{\prime} \rangle_t$ ,  $\langle v_{pi}^{\prime} \rangle_t$ ,  $\langle \omega_{pi}^{\prime} v_{pi}^{\prime} \rangle_t$  и  $D_{ii}$  – компоненты тензора напряжений твердой фазы турбулентного происхождения и коэффициент диффузии частиц [17]. Индекс  $s$  указывает на столкновительное происхождение пульсаций частиц,  $p$  – турбулентное,  $\Omega_i = \omega_{si} - 0.5(\partial u/\partial y - \partial v/\partial x)$  – разность угловых скоростей фаз,  $g$  – гравитационное ускорение. Коэффициенты силы Магнуса и момента вращения и сила Саффмена вычислены как в [23–25], соответственно

$$C_{Mi} = 0.75 \frac{\rho}{\rho_p}, \quad C_{\omega i} = \frac{10}{3}, \quad \text{Re}_{si} < 1 \quad (2.5)$$

$$C_{Mi} = \frac{3\rho \text{Re}_{si}}{\rho_p \text{Re}_{\omega i}} \min\left(0.5, \frac{\text{Re}_{\omega i}}{\text{Re}_{si}}\right), \quad C_{\omega i} = \frac{(C_1 \sqrt{\text{Re}_{\omega i}} + C_2 + C_3 \text{Re}_{\omega i}^2)}{16\pi}, \quad \text{Re}_{si} > 1$$

$$F_{si} = \frac{6 \cdot 6.44 \rho f_{si} (\text{Re}_{si}, \text{Re}_{\omega i})}{\pi \rho_p \delta_i} \sqrt{v \frac{\partial(u - u_{si})}{\partial y}} \quad (2.6)$$

$$\text{Re}_{\omega i} = \frac{\delta_i^2 |\Omega_i|}{4\nu}$$

где  $C_1 - C_3$  – табулированные константы [25].

*Граничные условия.* Частицы вводились в сформировавшийся однофазный поток с начальным скоростным скольжением, задаваемым  $k_{lag}$ . Тогда начальные поля для линейных и угловых скоростей падающего и отраженного потоков определены соотношениями

$$x = 0: u_{si} = k_{lag} \cdot u, \quad v_{si} = k_{lag} \cdot v, \quad \omega_{si} = k_{lag} \cdot (0.5 \text{rot } v)_z \quad (2.7)$$

где начальные поля концентрации равномерны и определяются загрузкой потока  $\psi = 2.5$

и 50 кг/кг, а  $k_{fi} \left( \sum_1^6 k_{fi} = 1 \right)$  – доли фракций частиц (индекс  $fi$  – доля  $i$ -й фракции) со сред-

ними по сечению скоростями газа  $u$  и фракций частиц  $u_{si}$ , рассчитываемых интегрированием по всей ширине канала от верхней до нижней стенки

$$x = 0: \alpha_i = \psi k_{fi} \left( \frac{u}{u_{si}} \right) \quad (2.8)$$

$$\lambda_i = \delta_i \left\{ \left[ \frac{\pi}{6} \left( \frac{\rho_p}{\rho \alpha_i} + 1 \right) \right]^{1/3} - 1 \right\} \quad (2.9)$$

Граничные условия для верхней ( $y = 0$ ) и нижней стенок ( $y = h$ ) “падающего” потока ( $i = 1-3$ ) задаются условиями скольжения линейных и угловых скоростей

$$y = 0, \quad h: u_{si} = \pm \lambda_i \frac{\partial u_{si}}{\partial y}, \quad \omega_{si} = \mp \lambda_i \frac{\partial \omega_{si}}{\partial y}, \quad y = 0: v_{si} = 0, \quad y = h: v_{si} = -\lambda_i \frac{\partial v_{si}}{\partial y} \quad (2.10)$$

где  $\lambda_i$  – межчастичное расстояние  $i$ -й фракции, определяемое по (2.9).

Граничные условия (2.10) взяты из [26], где скольжение частиц вычислялось не по длине свободного пробега частиц, а по расстоянию между ними, что важно, так как эти величины отличаются друг от друга более чем на порядок [27]. Знаки перед производными учитывают физику процесса, например при движении частиц в поток, характерный для верхней стенки ( $y = 0$ ), частицы ускоряются – знак “+” для осевой составляющей скорости и “-” для угловой составляющей скорости частиц, замедляющих вращение. На нижней стенке ( $y = h$ ) знаки меняются на противоположные. Приближаясь к ней, частицы тормозятся, при этом быстрее закручиваясь. На верхней стенке имеем нулевые граничные условия для поперечной скорости: частицы не сталкиваются с ней, на нижней – условие скольжения.

Для концентрации всех фракций частиц ставятся условия их сохранения

$$y = 0, \quad h: \alpha_i v_{si} = (D_{si} + D_{it}) \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \quad (2.11)$$

Для граничных условий отраженного потока частиц ( $i = 4-6$ ) на нижней стенке канала ( $y = 0$  систем координат отсчета для этого потока) используем [18]. Пересчет линейных и угловых составляющих скорости падающих частиц ( $i = 1-3$ ) на нижней стенке ( $y = h$  в системе координат падающего потока) на аналогичные отраженные частицы ( $i = 4-6$ ) введем как [22] с учетом проскальзывания (пересчитанные скорости отмечены двойными штрихами), тогда, если выполняется условие

$$\left| u_{si} + \frac{\delta_i \omega_{si}}{2} \right| > \frac{7}{2} \mu_0 (1 + k_n) v_{si}, \quad (i = 1-3, y = h) \quad (2.12)$$

$$y = 0: u''_{si(i=4,6)} = \left[ u_{si} - \mu_d \operatorname{sign} \left( u_{si} + \frac{\delta_i \omega_{si}}{2} \right) (1 + k_n) v_{si} \right]_{(i=1,3)}$$

$$\omega''_{si(i=4,6)} = \left[ \omega_{si} - 5 \mu_d \operatorname{sign} \left( u_{si} + \frac{\delta_i \omega_{si}}{2} \right) (1 + k_n) \frac{v_{si}}{\delta_i} \right]_{(i=1,3)} \quad (2.13)$$

$$\left| u_{si} + \frac{\delta_i \omega_i}{2} \right| \leq \frac{7}{2} \mu_0 (1 + k_n) v_{si}, \quad (i = 1-3, y = h)$$

$$u''_{si(i=4,6)} = \left[ u_{si} - \frac{2}{7} \left( u_{si} - \frac{\delta_i \omega_i}{2} \right) \right]_{(i=1,3)} \quad (2.14)$$

$$\omega''_{si(i=4,6)} = \left[ \omega_{si} - \frac{10}{7} \frac{\delta_i}{\delta_i} \left( u_{si} - \frac{\delta_i \omega_i}{2} \right) \right]_{(i=1,3)} \quad (2.15)$$

$$v''_{si(i=4,6)} = k_n v_{si(i=1,3)} \quad (2.16)$$

где индексы “0”, “d” при коэффициенте трения частиц о стенки канала относятся к статическому и динамическому коэффициентам трения соответственно, а  $k_n$  – коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости частиц при соударении со стенками канала [22].

На верхней стенке канала ( $y = h$ ) для отраженного потока частиц ( $i = 4-6$ ) ставятся такие же условия, как и для падающего при  $y = 0$  (2.10).

Граничные условия для концентрации отраженного потока частиц совпадают с условиями сохранения массы падающего потока (2.11).

**3. Замыкание уравнений (поли)дисперсной фазы.** Псевдовязкостные коэффициенты (компоненты тензора напряжений) в уравнениях движения твердой фазы [11], полученные аналитически на базе столкновений модели твердых сферических частиц [28], использованное для их замыкания. Частицы сталкиваются из-за разницы скоростей фаз в осредненном движении и их пульсаций; удовлетворяется предельный переход столкновений частиц одинакового размера, когда учитывается столкновение с зацеплением. Модель [11] тестировалась расчетом вертикальных двухфазных течений [19], дополненных здесь корреляциями скоростей с зацеплением и без. Так, если выполняется условие (3.1), получаем корреляции скоростей без зацепления (3.2)–(3.7), а, если нет – корреляции с зацеплением (3.8)–(3.13)

$$\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{G}_{ji}}{|\mathbf{G}_{ji}^{cr}|} < \frac{2}{7f(1+k_{pn})} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \langle (v'_{si} - v_{si})(u'_{si} - u_{si}) \rangle &= \beta_{ji}^2 a^2 (V_i + V_j)^2 \{ (0.5(\langle A^2 \rangle - \langle B^2 \rangle) \sin 2\gamma_i + \langle A \cdot B \rangle \times \\ &\times \cos 2\gamma_i) A_{ij} - 0.5[ (\langle A^2 \rangle - \langle B^2 \rangle) \sin 2\gamma_i + 2\langle A \cdot B \rangle \cos 2\gamma_i] C_{ij} - ((\langle A^2 \rangle - \langle B^2 \rangle) \times \\ &\times \cos 2\gamma_i - 2\langle A \cdot B \rangle \sin 2\gamma_i) B_{ij} \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \langle (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle &= \beta_{ji}^2 a^2 (V_i + V_j)^2 \{ \langle A^2 \rangle \sin^2 \gamma_i + \langle B \rangle \cos^2 \gamma_i + \langle A \cdot B \rangle \times \\ &\times \sin 2\gamma_i \} A_{ij} + 0.5[ (\langle A^2 \rangle - \langle B^2 \rangle) \cos 2\gamma_i - 2\langle AB \rangle \sin 2\gamma_i] C_{ij} - ((\langle A^2 \rangle - \langle B^2 \rangle) \times \\ &\times \sin 2\gamma_i + 2\langle AB \rangle \cos 2\gamma_i) B_{ij} \} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\langle (u'_{si} - u_{si})^2 + (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle = \beta_{ji}^2 a^2 (V_i + V_j)^2 (\langle A^2 \rangle + \langle B^2 \rangle) A_{ij} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \langle (v'_{si} - v_{si})(\omega'_{si} - \omega_{si}) \rangle &= \beta_{ji}^2 a^2 \frac{5(V_i + V_j)^2 \cos \gamma_i}{\delta_i} [ (\langle A \cdot C \rangle \operatorname{tg} \gamma_i + \langle B \cdot C \rangle) L_{ij} - \\ &- (\langle A \cdot C \rangle - \langle B \cdot C \rangle \operatorname{tg} \gamma_i) M_{ij} ] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle (u'_{si} - u_{si})(\omega'_{si} - \omega_{si}) \rangle &= \beta_{ji}^2 a^2 \frac{5(V_i + V_j)^2 \cos \gamma_i}{\delta_i} [ (\langle A \cdot C \rangle - \langle B \cdot C \rangle \operatorname{tg} \gamma_i) L_{ij} + \\ &+ (\langle A \cdot C \rangle \operatorname{tg} \gamma_i + \langle B \cdot C \rangle) M_{ij} ] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\langle (\omega'_{si} - \omega_{si})^2 \rangle = (V_i + V_j)^2 \langle C \rangle^2 A_{ij} \frac{5a^2 \beta_{ji}^2}{\delta_i^2} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \langle (v'_{si} - v_{si})(u'_{si} - v_{si}) \rangle &= \beta_{ji}^2 (V_i + V_j)^2 \{ g_1 A_{ij} \sin 2\gamma_i - g_1 (B_{ij} \cos 2\gamma_i + C_{ij} \sin 2\gamma_i) + g_2 R_{ij} \times \\ &\times (D_{ij} \cos 2\gamma_i - F_{ij} \sin 2\gamma_i) + g_3 R_{ij}^2 (G_{ij} \sin 2\gamma_i - 0.5 Q_{ij} \sin 2\gamma_i + H_{ij} \cos 2\gamma_i) \} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \langle (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle &= \beta_{ji}^2 (V_i + V_j)^2 \{ (g_4 + 2g_1 \sin^2 \gamma_i) A_{ij} - g_1 (B_{ij} \sin 2\gamma_i - C_{ij} \sin 2\gamma_i) + g_2 R_{ij} \times \\ &\times (F_{ij} \cos 2\gamma_i + D_{ij} \sin 2\gamma_i) + g_3 R_{ij}^2 ((1 + \cos^2 \gamma_i) Q_{ij} - G_{ij} \cos 2\gamma_i + H_{ij} \sin 2\gamma_i) \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\langle (u'_{si} - u_{si})^2 + (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle = \beta_{ij}^2 (V_i + V_j)^2 (g_8 A_{ij} + 3g_3 R_{ij}^2) \quad (3.10)$$

$$\langle (v'_{si} - v_{si})(\omega'_{si} - \omega_{si}) \rangle = \frac{2.5\beta_{ji}^2 (V_i + V_j)^2}{\delta_i} \cos \gamma_i \{ g_5 (L_{ij} + M_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i) + g_6 R_{ij} \times \\ \times (N_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i - O_{ij}) + g_7 R_{ij}^2 (P_{ij} - R_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i) \} \quad (3.11)$$

$$\langle (u'_{si} - u_{si})(\omega'_{si} - \omega_{si}) \rangle = \frac{2.5\beta_{ji}^2 (V_i + V_j)^2}{\delta_i} \cos \gamma_i \{ g_5 (-L_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i + M_{ij}) + g_6 R_{ij} \times \\ \times (N_{ij} - O_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i) - g_7 R_{ij}^2 (P_{ij} \operatorname{tg} \gamma_i - T_{ij}) \} \quad (3.12)$$

$$\langle (\omega'_{si} - \omega_{si})^2 \rangle = (V_i + V_j)^2 \left( A_{ij} + \frac{5}{8} R_{ij}^2 \right) \frac{5\beta_{ij}^2}{7\delta_i^2} \quad (3.13)$$

В (3.1)  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}$  и  $\mathbf{G}_{ij}^{ct}$  – орт, вектор разности скоростей частиц до их столкновения и его тангенциальная составляющая,  $k_{pn}$ ,  $f$  – коэффициенты восстановления нормальной скорости частиц и трения. Осредненные по трем столкновительным координатам  $\langle A \rangle$ ,  $\langle B \rangle$ ,  $\langle C \rangle$  и их комбинации аналитически получены, предполагая, что

а) разность линейных скоростей много меньше окружной скорости ( $\Delta_{ij} \ll \omega_{ij}$ ), где  $\Delta_{ij} \equiv \langle |\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i| \rangle$ ,  $\omega_{ij} \equiv 0.5(\omega_i \delta_i + \omega_j \delta_j)$

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{3} + \frac{f^2}{10}, \quad \langle B^2 \rangle = \frac{1}{12} + \frac{2f^2}{5}, \quad \langle A \cdot B \rangle = \langle A \cdot C \rangle \equiv 0, \quad \langle B \cdot C \rangle = -\frac{2f^2}{5} \\ \langle C^2 \rangle = \frac{5f^2}{12}$$

б) скорости близки по значению ( $\Delta_{ij} \approx \omega_{ij}$ )

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{2f}{5} + \frac{f^2}{10}, \quad \langle B^2 \rangle = \frac{1}{12} + \frac{f^2}{3}, \quad \langle A \cdot B \rangle = \frac{f}{15}(f - 4) \\ \langle A \cdot C \rangle = \frac{f}{3} - \frac{f^2}{15}, \quad \langle B \cdot C \rangle = -f \left( \frac{1}{60} + \frac{f}{3} \right), \quad \langle C^2 \rangle = \frac{9f^2}{20}$$

в) разность поступательных скоростей много больше окружной скорости ( $\Delta_{ij} \gg \omega_{ij}$ )

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{3} - \frac{\pi f}{8} + \frac{f^2}{6}, \quad \langle B^2 \rangle = \frac{1}{12} + \frac{\pi f}{16} + \frac{f^2}{6}, \quad \langle A \cdot B \rangle = \langle A \cdot C \rangle \equiv 0, \quad \langle C^2 \rangle = \frac{f^2}{4} \\ \langle B \cdot C \rangle = -\frac{f}{5} \left( \frac{2}{3} + f \right)$$

$$R_{ij} = \frac{\omega_i \delta_i + \omega_j \delta_j}{V_i + V_j}, \quad V_i = \sqrt{u_{si}^2 + v_{si}^2}, \quad g_1 = \frac{(a+b)^2}{8}, \quad g_2 = \frac{2b(2a+3b)}{15}$$

$$g_3 = \frac{b^2}{16}, \quad g_4 = \frac{(a-b)^2}{12}, \quad g_5 = \frac{4b(a-b)}{15}, \quad g_6 = \frac{b(5a+7b)}{12}, \quad g_7 = \frac{4b^2}{15}$$

$$g_8 = \frac{a^2 + 2g_1 + 16g_3}{3}$$

Здесь  $A_{ij}, T_{ij}$  – коэффициенты, аналитически рассчитанные в [11, 29], а  $a = 1 - k_{pn}, b = \frac{2}{7}$ ,  $\beta_{ij} = m_j/(m_i + m_j)$  – отношение масс, сталкивающихся частиц,  $\gamma_i$  – тангенс угла наклона между нормальной и осевой составляющими скоростей частиц  $i$ -й фракций.

Распространяя гипотезу вихревой вязкости Буссинеска на дисперсную фазу и рассматривая пульсационные скорости частиц в результате столкновений твердых сферических частиц между собой, запишем замыкающие уравнения (2.1)–(2.4) соотношения

$$\langle (u'_{si} - u_{si})(v'_{si} - v_{si}) \rangle = -v_{si}^x \frac{\partial u_{si}}{\partial y}, \quad \langle (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle = -2v_{si}^y \frac{\partial v_{si}}{\partial y} + \frac{2k_{si}}{3}$$

$$k_{si} = (\langle u'_{si} - u_{si} \rangle^2 + \langle v'_{si} - v_{si} \rangle^2)$$

$$\langle (\omega'_{si} - \omega_{si})(v'_{si} - v_{si}) \rangle = -v_{si}^\omega \frac{\partial \omega_{si}}{\partial y}, \quad \langle \alpha'_i(v'_{si} - v_{si}) \rangle = -D_{si} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y}$$

На последнее в этом ряду соотношение распространен закон Фика, связывающий пульсации концентрации через коэффициент псевдодиффузии  $D_{si}$ , имеющий столкновительное происхождение, с градиентом ее осредненной величины. Псевдовязкостные коэффициенты  $v_{si}^{x,y,\omega}$  вычислялись по найденным выше корреляционным моментам и времени межчастичных столкновений  $t_{cij}$  с учетом осреднения по трем столкновительным координатам [11, 29]

$$v_{si}^x = \sum_{j=1}^6 \langle (u'_{si} - u_{si})(v'_{si} - v_{si}) \rangle t_{cij}, \quad v_{si}^y = \sum_{j=1}^6 \langle (v'_{si} - v_{si})^2 \rangle t_{cij}$$

$$v_{si}^\omega = \sum_{j=1}^6 \langle (\omega'_{si} - \omega_{si})(v'_{si} - v_{si}) \rangle t_{cij}, \quad D_{si} = \sum_{j=1}^6 \langle (\Delta u_{sij})^2 + (\Delta v_{sij})^2 \rangle t_{cij}$$

Время межчастичных столкновений вычисляется по разности осредненных скоростей [30]

$$t_{cij} = \frac{2\rho_p \delta_j^3}{3\rho \alpha_j (\delta_i + \delta_j)^2 |\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i|}$$

$$|\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i| \equiv \frac{1}{\pi \varphi_{ij}} \int_0^{\varphi_{ij}} d\varphi \int_0^{2\pi} \sqrt{V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \varphi} d\theta$$

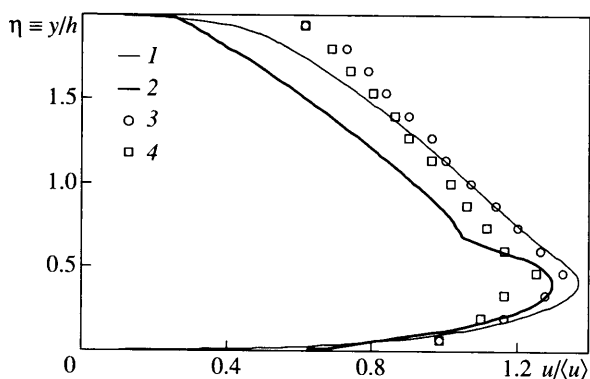
Для турбулентного режима столкновений

$$\varphi_{ij} \equiv 2\pi, \quad V_i \equiv \sqrt{u_{si}^2 + v_{si}^2}$$

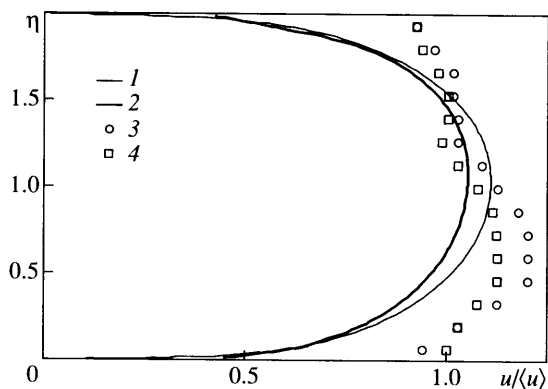
Для осредненного режима столкновений

$$\operatorname{tg} \varphi_{ij} \equiv \left| \left( \frac{v_{sj}}{u_{sj}} - \frac{v_{si}}{u_{si}} \right) \left( 1 + \frac{v_{si} v_{sj}}{u_{si} u_{sj}} \right) \right|^{-1}, \quad V_i = \sqrt{u_{si}^2 + v_{si}^2}$$





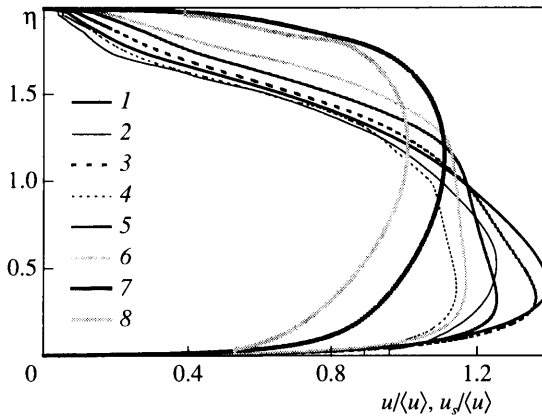
Фиг. 1. Распределения осевых скоростей газа и частиц по всей ширине канала при течении со средней скоростью потока 6 м/с: 1, 3 (эксперимент) –  $U$ ; 2, 4 (эксперимент) –  $U_s$



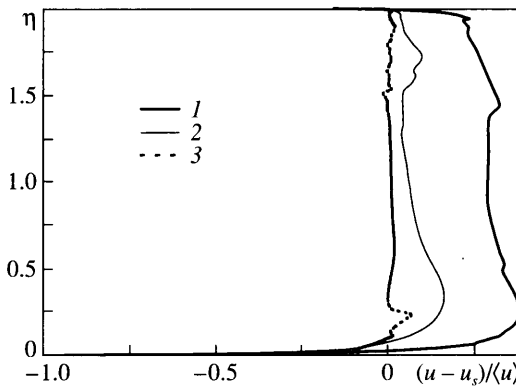
Фиг. 2. Распределения осевых скоростей газа и частиц по всей ширине канала при течении со средней скоростью потока 15 м/с, обозначения как на фиг. 1

**4. Результаты расчетов и их обсуждение.** Апробация численной модели газодисперсного потока в горизонтальном канале проводилась сравнением с экспериментами [1]. Выбирались два характерных режима – с асимметричным распределением осевых скоростей обеих фаз, полученных при средней скорости потока  $u = 6$  м/с и близким к симметричному распределению при  $u = 15$  м/с. Профили скоростей фаз на фиг. 1, 2 показывают, что модель описывает линейное их падение в направлении нижней стенки при  $u = 6$  и близкое к симметричному распределению скоростей фаз при  $u = 15$ . Расхождение с экспериментом вызвано тем, что расчеты получены в плоском канале, а эксперименты – в круглом, где профили более наполнены с коэффициентом неоднородности потока 1.25 против 1.13 в плоском канале.

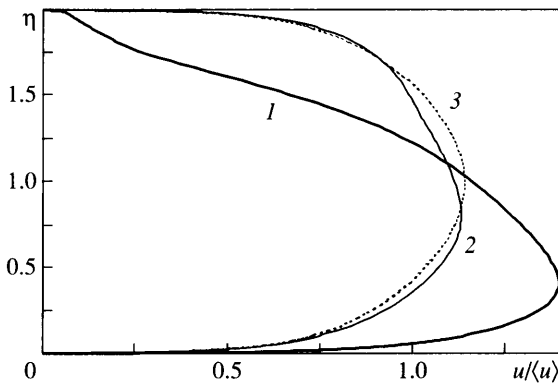
Далее показаны результаты расчетов, полученные при большой массовой загрузке потока  $k = 50$  кг/кг, скорости  $u = 12$  м/с с легкими крупными частицами  $\rho_p = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\delta = 500$  мкм. Распределения скоростей газа и частиц в различных сечениях потока для  $x/h = 10$ –200 на фиг. 3 показывают, что с ростом загрузки потока профили становятся асимметричными, динамически развиваясь вниз по потоку из-за накапливания (осаждения) частиц на нижней стенке. Из фиг. 4 видно ( $x/h = 200$ ), что с увеличением размера



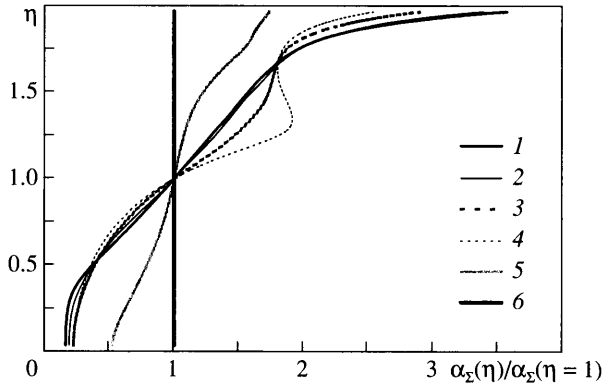
Фиг. 3. Распределения осевых скоростей газа и частиц по всей ширине канала в различных сечениях вниз по потоку при загрузке потока 50 кг/кг: 1 –  $x/h = 200$ , 3 – 100, 5 – 50, 7–10 –  $U$ ; 2– $x/h = 200$ , 4 – 100, 6 – 50, 8–10 –  $U_s$



Фиг. 4. Профили скоростного скольжения фаз для различных размеров частиц: 1 – 1 мм, 2 – 500 мкм, 3 – 210 мкм при загрузке потока 50 кг/кг



Фиг. 5. Профили скорости газовой фазы при различных загрузках потока: 1 – 50, 2 – 6, 3 – 0.5 кг/кг для частиц 500 мкм



Фиг. 6. Профили массовой концентрации частиц в различных сечениях вниз по потоку при загрузке потока 50 кг/кг: 1 –  $x/h = 200$ , 2 – 100, 3 – 50, 4 – 25, 5 – 10, 6 – 0

частиц растет скоростное скольжение фаз, а с увеличением загрузки потока (фиг. 5) профили скорости газовой фазы становятся асимметричнее, что подтверждается ростом концентрации частиц на нижней стенке вниз по течению (в различных сечениях канала на фиг. 6).

**Заключение.** Приведена математическая модель движения полидисперсной примеси твердых частиц в плоском горизонтальном канале с учетом осаждения. Для корректной постановки граничных условий на нижней стенке канала и описания процесса осаждения частиц на нее в рассмотрение вводятся два потока частиц – падающий и отраженный, рассчитываемые с учетом коэффициентов восстановления нормальной скорости частиц и трения. Замыкание уравнений твердой фазы проведено на базе оригинальной модели столкновений частиц с учетом псевдовязкостных коэффициентов. Модель использована для расчетов сильно запыленных потоков с доминирующим влиянием столкновений частиц.

Работа выполнена при поддержке гранта № 5866 Эстонского фонда науки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsuji Y., Morikawa Y.* LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a horizontal pipe // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 120. P. 385–409.
2. *Davies J.T.* Calculation of critical velocities to maintain solids in suspension in horizontal pipes // *Chem. Engn. Sci.* 1987. V. 42. № 7. P. 1667–1670.
3. *Cabrejos F.J., Klinzing G.E.* Pickup and saltation mechanisms of solid particles in horizontal pneumatic transport // *Powder Technology.* 1994. V. 79. № 2. P. 173–186.
4. *Sommerfeld M.* Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel: Part I. Particle transport // *Int. J. Multiphase Flow.* 2003. V. 29. № 4. P. 675–699.
5. *Sommerfeld M.* Validation of a stochastic Lagrangian modelling approach for inter-particle collisions in homogeneous isotropic turbulence // *Int. J. Multiphase Flow.* 2001. V. 27. № 10. P. 1829–1858.
6. *Oesterle B., Petitjean A.* Simulation of particle to particle interactions in gas-solid flows // *Int. J. Multiphase Flow.* 1993. V. 19. № 1. P. 199–211.
7. *Tanaka T., Tsuji Y.* Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in vertical pipe: On the effect of inter-particle collision // 4th Int. Symp. Gas-Solid Flows. Portland. ASME. 1991. FED-V. 121. P. 123–128.
8. *Louge M.Y., Mastorakos E., Jenkins J.T.* The role of particle collisions in pneumatic transport // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 231. P. 345–359.
9. *Cao J., Ahmadi G.* Gas-particle two-phase turbulent flow in vertical duct // *Int. J. Multiphase Flow.* 1995. V. 21. № 6. P. 1203–1228.

10. *Gidasov D.* Multiphase Flow and Fluidization. Boston etc. CA: Acad. Press, 1994. 467 p.
11. *Kartushinsky A., Michaelides E.E.* An analytical approach for the closure equations of gas-solid flows with inter-particle collisions // *Int. J. Multiphase Flow.* 2004. V. 30. № 2. P. 159–180.
12. *Crowe C.T., Gilland I.* Turbulence modulation of fluid-particle flows – a basic approach // 3d Int. Conf. Multiphase Flows. Lyon. 1998.
13. *Danon H., Wolfshtein M., Hetsroni G.* Numerical calculations of two-phase turbulent round jet // *Int. J. Multiphase Flow.* 1997. V. 3. № 3. P. 223–234.
14. *Elghobashi S., Abou-Arab T.W.* A two-equation turbulence model for two-phase flows // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. № 4. P. 931–938.
15. *Chen C.P., Wood P.E.* Turbulence closure modeling of two-phase flows // *Chem. Engng. Commun.* 1984. V. 29. P. 291–310.
16. *Pourahmadi F., Humphrey J.A. C.* Modeling solid-fluid turbulent flows with application to predicting erosive wear // *Physico-Chemical Hydrodyn.* 1983. V. 4. № 3. P. 191–219.
17. *Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.* Турбулентные течения газозвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
18. *Картушинский А.И., Михаэлидес Э.Э., Руди Ю.А.* Численное моделирование потоков газозвеси в вертикальных трубах и эффект столкновений частиц // *Изв. РАН МЖГ.* 2004. № 5. С. 84–93.
19. *Hussainov M., Kartushinsky A., Mulgi A., Rudi Ü., Tisler S.* Gas-solid flow with the slip velocity of particles in a horizontal channel // *J. Aerosol Sci.* 1996. V. 27. № 1. P. 41–59.
20. *Абрамович Г.Н., Гиринович Т.А., Крашенинников С.Ю. и др.* Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
21. *Shiller L., Naumann A.* Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung // *Z. Ver. Deut. Ing.* 1933. Bd. 77. S. 318–320.
22. *Matsumoto S., Saito S.J.* Monte Carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model // *Chem. Engng. Japan.* 1970. V. 3. № 2. P. 223–230.
23. *Rubinow S.I., Keller J.B.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 11. Pt. 3. P. 447–459.
24. *Mei R.* An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number // *Int. J. Multiphase Flow.* 1992. V. 18. № 1. P. 145–147.
25. *Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y.* Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 442. P. 303–334.
26. *Ding J., Lyczkowski R.W., Sha W.T., Altobelli S.A., Fukushima E.* Numerical analysis of liquid-solids suspension velocities and concentrations obtained by NMR imaging // *Powder Technology.* 1993. V. 77. P. 301–312.
27. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Nonuniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1952. 431 p.
28. *Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji M.* Multiphase flows with droplets and particle. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1998. 471 p.
29. *Frishman F., Hussainov M., Kartushinsky A., Mulgi A.* Numerical simulation of a two-phase turbulent pipe-jet flow loaded with polyfractional solid admixture // *Int. J. Multiphase Flow.* 1997. V. 23. № 4. P. 765–796.
30. *Marble F.E.* Mechanism of particle collision in one-dimensional dynamics of gas-particle admixture // *Phys. Fluids.* 1964. V. 7. № 8. P. 1270–1282.