

УДК 532.527.013.3:551.515.11

© 2006 г. М. А. ЖВАНИЯ, М. В. КАЛАШНИК, В. О. КАХИАНИ, Дж. И. НАНОБАШВИЛИ,
К.И. ПАТАРАШВИЛИ, С. Дж. ЦАКАДЗЕ

ФОРМИРОВАНИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ, СОЗДАВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ИСТОЧНИК-СТОК МАССЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛОИДЕ

Теоретически и экспериментально исследован процесс формирования азимутальных течений, создаваемых системой источник-сток массы в тонком слое воды на поверхности вращающегося параболоида. Расчеты выполнены в рамках уравнений теории мелкой воды с учетом придонного трения. Построены асимптотические решения, описывающие процесс установления стационарных азимутальных течений, происходящий после мгновенного включения системы источник-сток. Показано, что имеется удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

Ключевые слова: теория мелкой воды, экмановский пограничный слой, азимутальные течения, метод источников и стоков массы.

Лабораторное моделирование течений жидкости во вращающихся параболических сосудах широко используется в исследованиях общей циркуляции атмосферы и океана, устойчивости зональных геострофических течений и их взаимодействия с топографией [1]. Распространенный метод генерации зональных течений в лабораторных условиях – метод источников и стоков массы [2–5]. Возникающий между концентрическими источником и стоком массы радиальный поток в поле силы Кориолиса трансформируется в азимутальное (зональное) течение. Упрощенная двумерная модель, пригодная для расчета азимутальных течений в параболоиде вращения, была предложена в [6]. В модели [6], основанной на уравнениях теории мелкой воды, учитывается тот факт, что при достаточно больших скоростях вращения течение является приближенно двумерным, за исключением придонного экмановского пограничного слоя. Влияние последнего описывается линейным по скорости выражением для напряжения придонного трения. С использованием предложенной модели в [6] изучена структура стационарных азимутальных течений, генерируемых системой источник-сток массы.

В настоящей работе теоретически исследуется переходный процесс установления стационарных течений, происходящий после мгновенного включения системы источник-сток. Соответствующая задача близка к классическим задачам о спинапе и спиндауне во вращающейся жидкости [7]. Представлены также результаты экспериментального исследования переходного процесса, полученные на специальной установке Абастуманской астрофизической обсерватории.

1. Основные уравнения и стационарные решения. Рассмотрим заполненный жидкостью параболоид с формой дна $z = D(r) = \kappa r^2/2$. При вращении параболоида с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{g\kappa}$ вокруг вертикальной оси z жидкость распределяется по поверхности параболоида слоем постоянной толщины H . Для описания осесимметричных течений жидкости в параболоиде используем интегральную модель [6], основанную на уравнениях теории мелкой воды с включением линейных по скорости слагаемых, учитываю-

щих трение жидкости о дно. При наличии источников и стоков массы система уравнений динамики имеет вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - fv + \frac{\alpha u_r}{h} = -g \frac{\partial h}{\partial r} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u_r v}{r} + f u_r + \frac{\alpha v}{h} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r h) = Q(r) \quad (1.3)$$

Здесь u_r , v – радиальная и азимутальная компоненты скорости во вращающейся вместе с параболоидом системе координат, h – полная глубина жидкости, отсчитываемая от дна по вертикали, $f = 2\Omega$ – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения, $\alpha = v/\delta_E$ – коэффициент трения, $\delta_E = \sqrt{2\nu/f}$ – толщина придонного слоя Экмана, $Q(r)$ – заданная интенсивность источников и стоков массы, расположенных на дне сосуда. Систему (1.1)–(1.3) рассматриваем в области $r_1 \leq r \leq r_2$ (кольцевой канал) с условием непротекания $u_r = 0$ при $r = r_1$, $r = r_2$. Распределение источников и стоков возьмем в виде

$$Q(r) = \pm \begin{cases} \frac{Q_0}{\pi(r_1'^2 - r_1^2)}, & r_1 \leq r \leq r_1' \\ 0, & r_1' \leq r \leq r_2' \\ \frac{-Q_0}{\pi(r_2^2 - r_2'^2)}, & r_2' \leq r \leq r_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Такое распределение отвечает ситуации, когда имеются источник и сток массы равной интенсивности, примыкающие к границам рассматриваемой области. Величина $Q_0 > 0$ имеет смысл полного объема жидкости, прокачиваемой в единицу времени. Если в (1.4) выбирается положительный знак, то ближе к оси вращения находится источник, если отрицательный – сток. Переходя в (1.4) к пределу $r_1' \rightarrow r_1$, $r_2' \rightarrow r_2$, получим случай сосредоточенных источников и стоков

$$Q(r) = \pm \left[Q_0 \frac{\delta(r - r_1)}{2\pi r} - Q_0 \frac{\delta(r - r_2)}{2\pi r} \right] \quad (1.5)$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция.

Запишем систему (1.1)–(1.3) в безразмерных переменных. Удобно представить полную глубину в виде $h = H + \eta$, где $H = \text{const}$ – средняя глубина в отсутствие движений, η – отклонение глубины от средней (возмущение уровня). Принимая в качестве масштабов r , t , u_r , v , η соответственно

$$L = r_2 - r_1, \quad T = \frac{H}{\alpha}, \quad U = \frac{Q_0}{2\pi H L}, \quad V = \frac{fH}{\alpha} U, \quad N = \frac{fVL}{g} \quad (1.6)$$

из (1.1)–(1.3) получим систему

$$\lambda^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + \text{Ro} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{1 + \text{Ro} F \eta} \right) - v \left(1 + \text{Ro} \frac{v}{r} \right) = -\frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{Ro} u_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + u_r + \frac{v}{1 + \text{Ro} F \eta} = 0 \quad (1.8)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r (1 + \text{Ro} F \eta)) = Q(r) \quad (1.9)$$

содержащую три безразмерных параметра: $\lambda = (U/V)^2 \equiv (2\delta_E/H)^2$, $\text{Ro} = V/fL$ – число Россби, $F = (L/L_R)^2$ – число Фруда. Здесь $L_R = \sqrt{gH}/f$ – так называемый радиус деформации Россби [4]. Распределение $Q(r)$ в безразмерных переменных описывается (1.4), (1.5), где $Q_0/2\pi = 1$. Отметим, что входящий в (1.6) масштаб для компоненты v выбран из условия равенства двух последних слагаемых в (1.2), а масштаб η – из геострофического условия $f v \sim g \partial \eta / \partial r$ в (1.1). С учетом соотношения $\alpha = f \delta_E / 2$ временной масштаб T (экмановский масштаб [7]) также можно записать в виде $T = H \delta_E / \nu = H / \delta_E \Omega$. Первое из этих равенств показывает, что масштаб T получается из обычного диффузионного масштаба H^2/ν заменой $H^2 \rightarrow H \delta_E$. Из второго равенства следует, что в характерном случае $H \gg \delta_E$ этот масштаб много больше периода вращения системы $2\pi/\Omega$.

В системе (1.7)–(1.9) удобно вместо компоненты u_r рассматривать полный радиальный поток $u = r u_r h$, где $h = 1 + \text{Ro} F \eta$ – полная безразмерная глубина. В терминах u уравнения (1.8), (1.9) записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv) + \text{Ro} \frac{u}{h r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{u}{h} + \frac{(rv)}{h} = 0 \quad (1.10)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = Q(r) \quad (1.11)$$

Стационарные решения уравнений (1.10), (1.11) при другой нормировке переменных получены в [6]. В стационарном случае (1.11) сводится к простейшему уравнению $r^{-1} \partial u / \partial r = Q(r)$, откуда для распределенных источников и стоков

$$u(r) = \pm \begin{cases} \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2 - r_1'^2}, & r_1 \leq r < r_1' \\ 1, & r_1' \leq r < r_2' \\ \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_2'^2}, & r_2' \leq r < r_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

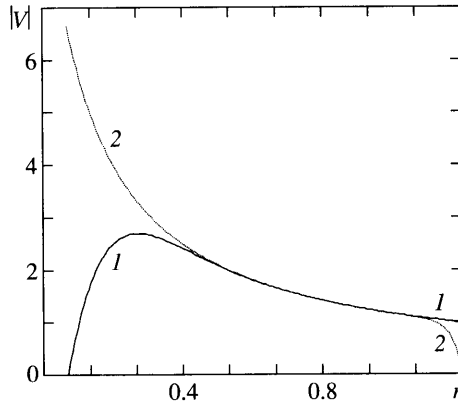
Переходя в (1.12) к пределу $r_1' \rightarrow r_1$, $r_2' \rightarrow r_2$, найдем распределение u для сосредоточенных источников и стоков: $u(r) = \pm 1$. Обратим внимание, что для радиального потока u области вблизи источников и стоков являются своеобразными погранслоями, обеспечивающими непрерывное примыкание к нулевым граничным условиям.

Для сосредоточенных источников и стоков, $u(r) = \pm 1$, стационарный вариант уравнения (1.10) после сокращения на h сводится к линейному уравнению

$$\text{Ro} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv) \pm (rv) + 1 = 0 \quad (1.13)$$

общее решение которого имеет вид

$$v(r) = \frac{1}{r} \left[C \exp\left(\mp \frac{r^2}{2\text{Ro}}\right) - 1 \right] \quad (1.14)$$



Фиг. 1. Безразмерные радиальные профили $v(r)$ для различных полярностей системы источник–сток и $Ro = 0.02$; источники на радиусах: $1 - r_1 = 0.15$ ($v(r) < 0$) и $2 - r_2 = 1$

В (1.14) входит произвольная константа C , для определения которой в данной задаче нет никаких граничных условий. Как показано в [6], для выделения единственного решения следует построить решение $v(r)$ в случае распределенных источников и стоков (1.4) и далее устремить их размеры к нулю. Соответствующий предельный переход, учитывающий ограниченность решения, показывает, что неизвестная константа C должна находиться из условия $v(r_*) = 0$, где r_* – радиус, на котором находится источник. Таким образом, если сосредоточенный источник расположен на радиусе r_1 , решение определяется выражением

$$v(r) = \frac{1}{r} \left[\exp\left(\frac{r_1^2 - r^2}{2Ro}\right) - 1 \right] \quad (1.15)$$

В случае, когда источник находится на радиусе r_2

$$v(r) = \frac{1}{r} \left[1 - \exp\left(\frac{r^2 - r_2^2}{2Ro}\right) \right] \quad (1.16)$$

Типичные примеры радиальных зависимостей $v(r)$ представлены на фиг. 1. Как видно из этих примеров, структура азимутального потока принципиально меняется при изменении полярности в системе источник–сток. В случае распределения (1.16) (источник на периферии) профиль скорости строго монотонный и близок к потенциальному вращению. В случае распределения (1.15) имеется максимум абсолютной величины скорости вблизи источника. Обратим внимание, что при $Ro \ll 1$ уравнение (1.13) является сингулярно возмущенным (малый параметр при старшей производной). Отсюда следует, что при $Ro \ll 1$ в решениях возникают боковые инерционные погранслои, примыкающие к источникам. Вне погранслоев решения близки к решению вырожденной задачи, отвечающей $Ro = 0$: $v(r) = \mp 1/r$. После нахождения $v(r)$, $v(r)$ распределение полной глубины $h = 1 + RoF\eta(r)$ может быть найдено из уравнения (1.7). В случае $\lambda \ll 1$ это уравнение сводится к уравнению градиентного баланса $v(1 + Ro v/r) = \partial\eta/\partial r$, откуда $\eta(r)$ и, следовательно, $h(r)$ находятся простым интегрированием.

В следующих разделах для различных значений внешних параметров исследуется процесс установления стационарных течений (1.15), (1.16), происходящий после мгновенного включения системы источник–сток.

2. Нестационарные решения. Случай $F \ll 1$. Если пространственный масштаб L много меньше радиуса деформации Россби L_R , число Фруда $F \ll 1$. Для этих значений F в

уравнениях (1.10), (1.11) можно пренебрегать деформацией свободной поверхности, т.е. считать $h = 1 + \text{Ro}F\eta(r) \sim 1$, $u \sim u_s$, где $u_s = u_s(r)$ – радиальный поток, индуцируемый источниками и стоками в стационарном случае: $r^{-1} \partial u_s / \partial r = Q(r)$. С учетом сделанных допущений (1.10) сводится к линейному гиперболическому уравнению для определения $u(r, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv) + \text{Ro} u_s \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + u_s + (rv) = 0 \quad (2.1)$$

которое рассматриваем в области $r_1 \leq r \leq r_2$ с начальным условием $v = v_0(r)$ при $t = 0$. В случае сосредоточенных источников и стоков, $u_s = \pm 1$, уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv) \pm \text{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \pm 1 + (rv) = 0 \quad (2.2)$$

Для решения уравнения (2.2) помимо начальных следует задать также граничные условия. Эти условия вытекают из рассмотрения уравнения (2.1) на границах $r = r_1$, $r = r_2$. Поскольку $u_s(r_1) = u_s(r_2) = 0$, на этих границах $v_t + v = 0$, откуда

$$r = r_i: v = v_0(r_i) e^{-t}, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

Как следует из теории гиперболических уравнений, если в уравнении (2.2) выбирается знак плюс (источник в центре), граничное условие (2.3) должно ставиться на левом конце рассматриваемого интервала $r = r_1$, если минус – на правом конце $r = r_2$. Отметим, что в случае сосредоточенных источников и стоков граничные условия (2.3) следует интерпретировать как предельную форму соответствующих условий для источников и стоков конечной ширины.

Общее решение (2.2) с заданными начальными и граничными условиями легко находится прямым интегрированием на характеристиках. Область интегрирования при этом разбивается на две подобласти, существенно влияющие на начальных и граничных условиях. Процедура интегрирования существенно упрощается заменой $s = r^2/2$, $m = rv$, приводящей (2.2) к простейшему виду

$$\frac{\partial m}{\partial t} \pm \text{Ro} \frac{\partial m}{\partial s} \pm 1 + m = 0$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем результат. Источник в центре ($r_* = r_1$)

$$D_1 = \sqrt{r_1^2 + 2\text{Ro}t}, \quad D_2 = \sqrt{r^2 - 2\text{Ro}t}$$

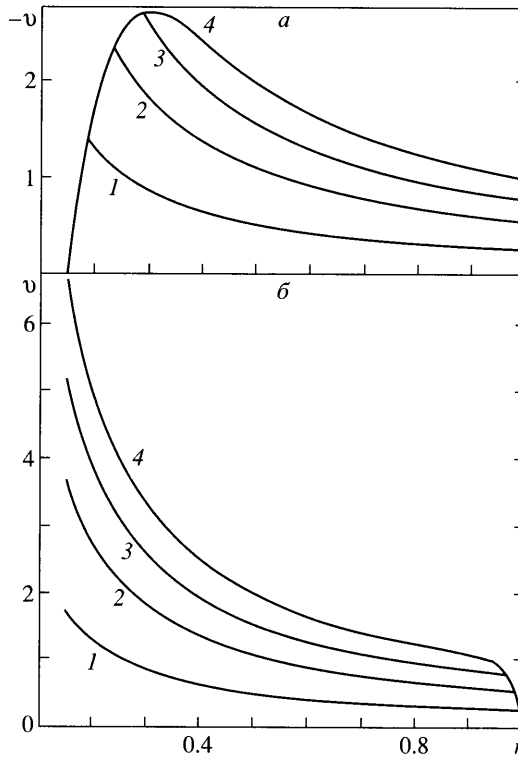
$$v(r, t) = \frac{1}{r} \begin{cases} r_1 v_0(r_1) \exp(-t) + \exp\left(\frac{r_1^2 - r^2}{2\text{Ro}}\right) - 1, & r_1 < r < D_1 \\ D_2 v_0(D_2) \exp(-t) + \exp(-t) - 1, & D_1 < r < r_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Источник на периферии ($r_* = r_2$)

$$D_3 = \sqrt{r_2^2 - 2\text{Ro}t}, \quad D_4 = \sqrt{r^2 + 2\text{Ro}t}$$

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \begin{cases} r_2 v_0(r_2) \exp(-t) + 1 - \exp\left(\frac{r^2 - r_2^2}{2\text{Ro}}\right), & D_3 < r < r_2 \\ D_4 v_0(D_4) \exp(-t) + 1 - \exp(-t), & r_1 < r < D_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Решения (2.4), (2.5) справедливы при $0 < t < (r_2^2 - r_1^2)/2\text{Ro}$. При $t > (r_2^2 - r_1^2)/2\text{Ro}$ в области $r_1 \leq r \leq r_2$ устанавливаются стационарные решения (1.15), (1.16).



Фиг. 2. Безразмерные радиальные профили $v(r)$ в различные моменты времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$ (1-3) и в стационарном состоянии (4); источники на радиусах: $a - r_1 = 0.15$ и $b - r_2 = 1$, $Ro = 0.02$

На фиг. 2 представлены радиальные зависимости v для различных моментов времени t в случае $v_0 \equiv 0$. Соответствующие решения описывают процесс установления стационарного азимутального течения из состояния покоя

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \begin{cases} \exp\left(\frac{r_1^2 - r^2}{2Ro}\right) - 1, & r_1 < r < D_1 \\ \exp(-t) - 1, & D_1 < r < r_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \begin{cases} 1 - \exp(-t), & r_1 < r < D_3 \\ 1 - \exp\left(\frac{r^2 - r_2^2}{2Ro}\right), & D_3 < r < r_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Физическая интерпретация решений (2.6), (2.7) достаточно прозрачна. После включения системы источник-сток в жидкости мгновенно устанавливается стационарное радиальное течение, направленное от источника. В поле кориолисовых сил радиальный поток приобретает циклоническую (антициклоническую) завихренность, т.е. в большой степени трансформируется в азимутальное течение. Граница области возникающего стационарного азимутального течения расширяется в направлении от источника. Если он расположен в центральной части, то на радиусе r решение устанавливается к момен-

ту времени $t_*(r) = (r^2 - r_1^2)/2Ro$, за которое волна, идущая от источника, достигает радиуса r . Во всей рассматриваемой области решение устанавливается за время $t_* = (r_2^2 - r_1^2)/2Ro$ или, в размерных единицах, $t_* = (r_2^2 - r_1^2)\pi H/Q_0$. Отметим, что в процессе установления стационарного азимутального течения существенны два временных масштаба – экмановский масштаб T , связанный с наличием экспоненты в (2.6), (2.7), и конвективный масштаб $T_* = T/2Ro$. В случае $Ro \ll 1$ масштаб $T_* \gg T$, однако в действительности решения (2.6), (2.7) становятся достаточно близкими к стационарным решениям за время T , после чего происходит дальнейшая подстройка на масштабе T_* .

Используя выражения (1.12), нетрудно построить также решения уравнения (2.1) для распределенных источников и стоков. Эти решения записываются достаточно громоздко, так как характеристики (2.1) разбивают область интегрирования на шесть подобластей. Анализ показывает, что соответствующие решения переходят в (2.4), (2.5) при стремлении ширины источников и стоков к нулю. В качестве примера приведем выражение для решения в области источника $r_2' \leq r \leq r_2$ ($v_0 \equiv 0$)

$$v(r, t) = \frac{1}{2rRo + \Delta} \frac{r_2^2 - r^2}{\Delta} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(1 + \frac{Ro}{\Delta} \right) t \right] \right\}, \quad \Delta = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_2'^2) \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что при $r = r_2'$ и $\Delta \rightarrow 0$

$$v(r_2', t) = \frac{\Delta}{Ro + \Delta} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(1 + \frac{Ro}{\Delta} \right) t \right] \right\} \rightarrow 0$$

Последний результат служит обоснованием законности использования граничных условий (2.3) в модели сосредоточенных источников и стоков.

3. Сбалансированная модель. Рассмотрим теперь процесс установления стационарных решений для конечных значений параметра F , т.е. в ситуациях, когда нельзя пренебрегать деформацией свободной поверхности. Этот процесс можно исследовать в рамках так называемых сбалансированных моделей, использующих допущение о сохранении во времени градиентного или геострофического баланса. При этом уравнение (1.7) заменяется уравнением $v + Ro(u^2/r) = \partial\eta/\partial r$ или его предельной формой $v = \partial\eta/\partial r$. Далее для простоты рассмотрим второй случай – уравнение геострофического баланса. Система уравнений сбалансированной модели имеет вид

$$v = \partial\eta/\partial r \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Ro \frac{u}{r} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{u}{rh} + \frac{v}{h} = 0 \quad (3.2)$$

$$F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = Q(r) \quad (3.3)$$

Отметим, что геострофическое или градиентное приближения формально справедливы, если параметр $\lambda \ll 1$. Последнее условие, эквивалентное условию $U \ll V$ или $H \gg \delta_E$, с большой точностью выполняется как в лабораторных условиях, так и в земной атмосфере. По этой причине указанные приближения, фильтрующие быстрые гравитационные волны, широко используются в теоретических моделях вихревых течений [8].

Опишем процедуру решения задачи с начальными данными для системы (3.1) – (3.3). Дифференцируя уравнение (3.3) по r и вычитая (3.2), умноженное на F , с учетом (3.1) получим диагностическое (не содержащее временных производных) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{F}{hr} \left[\text{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + 1 \right] u = \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{Fv}{h} \quad (3.4)$$

Это уравнение, дополненное краевыми условиями $u(r_1) = u(r_2) = 0$, позволяет найти радиальный поток $u(r, t)$ в момент времени t по известному для этого момента распределению $v(r, t)$. Определив u , распределение v в следующий момент времени $t + \Delta t$ находится интегрированием уравнения (3.2), на характеристиках. Продолжая этот процесс шагами, построим решение задачи Коши. Хотя описанная процедура осуществима только численно, процесс установления стационарных решений подобен описанному в предыдущем разделе с той разницей, что в силу зависимости u от t изменится характерное время установления стационарного решения. Аналитические решения и оценки времени установления можно получить в рамках линейной сбалансированной модели (следующий раздел).

Используя уравнение (3.4), можно получить некоторую оценку погрешности решений (2.4), (2.5). Напомним, что при построении этих решений полагалось $u = u_s$, $r^{-1} \partial u_s / \partial r = Q(r)$. Положим в (3.4) $u = u_s + u'$. При этом для u' получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} \right) - \frac{F}{hr} \left[\text{Ro} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + 1 \right] u' = \frac{F}{hr} \left[\text{Ro} u_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + u_s + (rv) \right] \quad (3.5)$$

с условиями $u'(r_1) = u'(r_2) = 0$. Поскольку правая часть (3.5) пропорциональна F , отсюда сразу следует, что $u' = O(F)$, т.е. в случае $F \ll 1$ полный радиальный поток мало отличается от u_s . В задаче с нулевым начальным полем скорости максимальное значение u' достигается в начальный момент $t = 0$. Для этого момента (3.5) сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} \right) - \frac{F}{r} u' = \frac{F}{r} u_s \quad (3.6)$$

Общее решение (3.6) записывается в виде

$$u' = F \int_{r_1}^{r_2} G(\rho, r) u_s(\rho) d\rho \quad (3.7)$$

где функция Грина

$$G = W^{-1}(\rho) q_1(r) q_2(\rho) \quad (r_1 \leq r \leq \rho), \quad G = W^{-1}(\rho) q_2(r) q_1(\rho) \quad (\rho \leq r \leq r_2)$$

$$q_i(r) = r [K_1(r_i \sqrt{F}) I_1(r \sqrt{F}) - I_1(r_i \sqrt{F}) K_1(r \sqrt{F})], \quad i = 1, 2$$

$$W(\rho) = \rho [I_1(r_1 \sqrt{F}) K_1(r_2 \sqrt{F}) - K_1(r_1 \sqrt{F}) I_1(r_2 \sqrt{F})]$$

Здесь I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя 1-го порядка. Расчеты по формуле (3.7) показывают, что при $F \ll 1$ отличия u от u_s действительно малы, т.е. с большой точностью справедливы решения (2.4), (2.5).

Аналогичным образом строится сбалансированная модель в случае, когда используется уравнение градиентного баланса. Анализ соответствующего диагностического уравнения для радиального потока показывает, что и в этом случае отклонения u от u_s малы при $F \ll 1$.

4. Линейная сбалансированная модель. В случае $Ro = 0$ из (3.1)–(3.3) следуют уравнения сбалансированной модели

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u_r + v = 0, \quad F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = Q(r) \quad (4.1)$$

где вместо радиального потока u снова используется переменная u_r – радиальная составляющая скорости. Стационарное решение системы (4.1) описывается выражениями

$$u_r = \frac{1}{r} \int_{r_1}^r Q(\rho) \rho d\rho, \quad v = -u_r, \quad \eta = \int_{r_1}^r v(\rho) d\rho - C \quad (4.2)$$

где константа C определяется из условия сохранения массы

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(\rho) \rho d\rho = 0$$

В случае сосредоточенных источников и стоков из (4.2) получим

$$u_r = \pm \frac{1}{r}, \quad v = \mp \frac{1}{r}, \quad \eta = \mp(C + \ln r), \quad C = \frac{1}{2} - \frac{r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.3)$$

Из сравнения (4.3) и (1.15), (1.16) непосредственно следует, что в рамках линейной модели нельзя описать эффекты, связанные с формированием боковых пограничных слоев вблизи источника, в частности, появление максимума азимутальной компоненты скорости. Тем не менее линейная модель позволяет получить оценки характерного времени установления стационарных решений.

Для исследования нестационарных процессов в линейной модели удобно исключить из системы (4.1) компоненты скорости u_r , v . При этом для отклонения уровня $\eta(r, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - F \eta \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) = -Q(r) \quad (4.4)$$

в области $r_1 < r < r_2$ с начальным условием $\eta = \eta_0(r)$ при $t = 0$. Уравнение (4.4) представляет собой линеаризованную форму уравнения Чарни – Обухова [4] с учетом диссипативных факторов. К уравнению (4.4) присоединим граничные условия

$$r = r_i: \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \eta_0}{\partial r}(r_i) e^{-t}, \quad i = 1, 2$$

которые вытекают из условий (2.3) и геострофического соотношения. Если в начальный момент движение отсутствует ($\eta_0(r) = 0$), эти условия упрощаются: $\partial \eta / \partial r = 0$ при $r = r_1, r = r_2$. Общее решение (4.4) можно представить в виде $\eta = \eta_s(r) + \eta'(r, t)$, где $\eta_s(r)$ – распределение уровня в стационарном состоянии, $\eta'(r, t)$ – решение (4.4) при $Q = 0$ с начальным условием $\eta' = -\eta_s(r)$ при $t = 0$. Соответствующее решение находится методом разделения переменных

$$\eta'(r, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{t}{\lambda_n}\right) \Psi_n(r), \quad \lambda_n = 1 + \frac{Fr_1^2}{\mu_n^2} \quad (4.5)$$

$$\Psi_n(r) = Y_1(\mu_n)J_0(\mu_n r/r_1) - J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n r/r_1), \quad A_n = \|\Psi_n\|^{-2} \int_{r_1}^{r_2} \eta_s(r) \Psi_n(r) r dr$$

$$\|\Psi_n\|^2 = 2r_1^2 [J_1^2(\mu_n) - J_1^2(\mu_n m)] / [\pi^2 \mu_n^2 J_1^2(\mu_n m)]$$

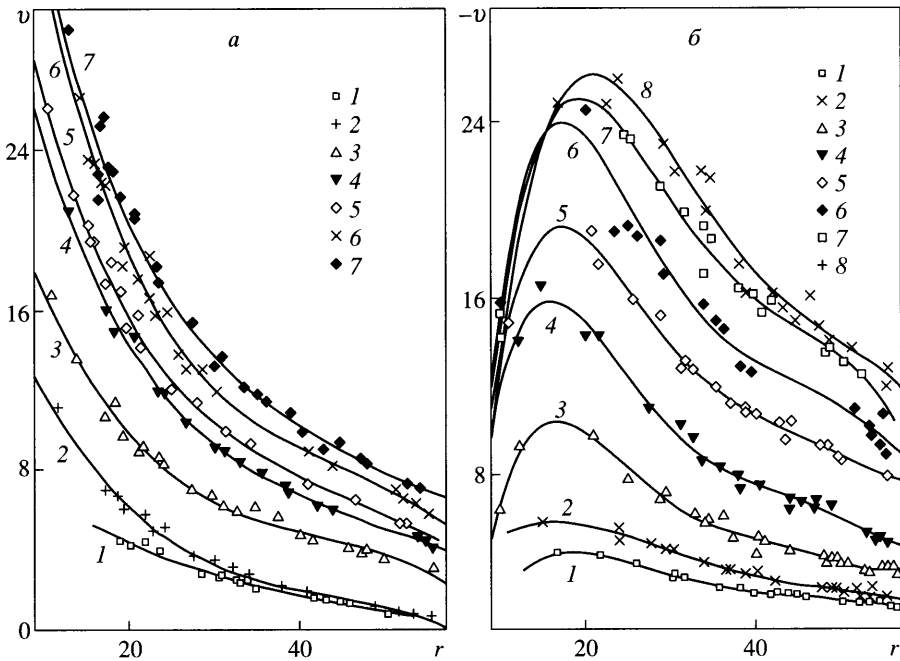
где μ_n – корни уравнения $J_1(\mu)Y_1(\mu m) - J_1(\mu m)Y_1(\mu) = 0$, $m = r_2/r_1$, J_k, Y_k – функции Бесселя.

Характерное время T_s установления стационарного течения определяется наименьшим значением λ_1 показателей λ_n при экспонентах в (4.5). Это время зависит от числа Фруда F , характеризующего степень деформации свободной поверхности. Если $F \ll 1$, то все $\lambda_n \sim 1$ и $\eta' \sim -\eta_s e^{-t}$. Решение начальной задачи при этом можно записать в виде $\eta = \eta_s(1 - e^{-t})$ или $v = v_s(1 - e^{-t})$. Соответствующие решения являются пределом при $Ro \rightarrow 0$ решений (2.6), (2.7) и устанавливаются на экмановском временном масштабе $T = H\delta_E/v$ (в размерных единицах). В случае умеренных значений F время установления стационарного решения $T_s = \lambda_1 = 1 + Fr_1^2/\mu_1^2$ или в размерных единицах $T_s = T(1 + r_1^2/L_R^2\mu_1^2)$. Полученный временной масштаб можно представить в виде суммы

$$T_s = T_1 + T_2 = \frac{H\delta_E}{v} + \frac{2r_1^2 f}{\mu_1^2 g \delta_E} \quad (4.6)$$

Основное различие масштабов T_1, T_2 состоит в том, что первый (экмановский) линейно зависит от средней глубины H , а второй от глубины не зависит. Масштаб T_2 можно также записать в виде $T_2 = (1/\mu_1^2)(r_1/L_E)^2(2/f)$, где $L_E = \sqrt{g\delta_E}/f$ – радиус деформации, определенный по толщине экмановского слоя δ_E . При наличии достаточно сильных деформаций свободной поверхности вклад масштаба T_2 в характерное время установления может быть весьма существенным.

5. Эксперимент. Экспериментальные исследования течений, создаваемых системой источник–сток массы, проводились на специальной установке Абастуманской астрофизической обсерватории АН Грузии. Эта установка представляет собой параболоид вращения, который может приводиться в регулируемое вращение вокруг вертикальной оси. Максимальный диаметр параболоида $d = 1.2$ м, радиус кривизны в полюсе $R = 1/\kappa = 0.698$ м. Параболоид с водой приводился во вращение с угловой скоростью $\Omega = \sqrt{g\kappa} = 3.75$ с⁻¹, которой отвечает постоянная глубина жидкости по вертикали (период вращения $T = 1.677$ с). При такой угловой скорости параметр Кориолиса $f = 2\Omega \approx 7.5$ с⁻¹, толщина придонного экмановского слоя $\delta_E = \sqrt{2\nu/f} \approx 0.052$ см при кинематической вязкости воды $\nu = 10^{-2}$ см²/с. После того как устанавливалось равномерное распределение глубины (уровня), в действие приводилась система источник-сток, состоящая из двух концентрических кольцевых пазов шириной 0.3 см расположенных на дне параболоида на радиусах $r_1 = 8.4$ и $r_2 = 57.3$ см. Через эти пазы с заданным расходом Q_0 и в заданном направлении прокачивалась вода. В ходе экспериментов глубина жидкости измерялась емкостными малогабаритными (диаметр < 1.5 мм) датчиками, расположенными по радиусу сосуда, для измерения скорости жидкости относительно вращающегося сосуда использовался фотографический метод трассирующих частиц. Погрешность измерения глубин не превышала 0.1 мм, абсолютная погрешность измерения скорости зависела от длины трека и в наименее благоприятном случае не превышала 5 мм/с.

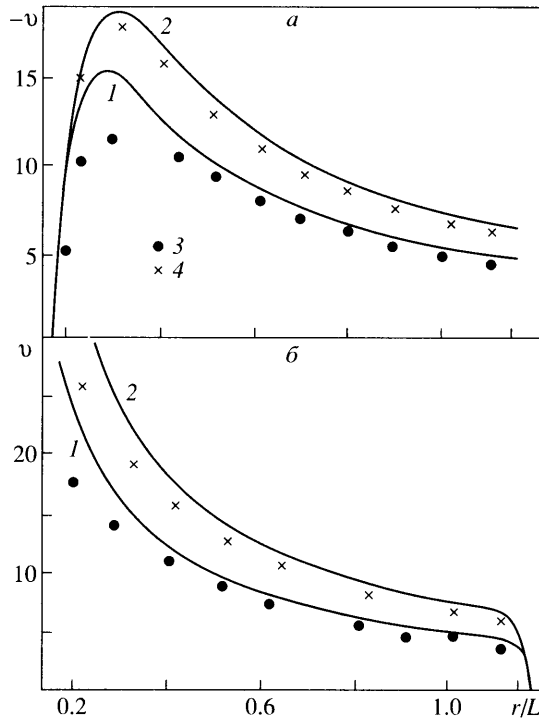


Фиг. 3. Радиальные профили $u(r)$, построенные по соответствующим экспериментальным точкам, в стационарном состоянии для различных значений полного расхода Q_0 (a – источник на периферии, b – в центре); полная глубина в отсутствие радиальных движений: $a, b - H = 6.4, 5.8$ см; $1-7 - Q_0 = 17.7, 25.3, 39.0, 56.2, 65.8, 74.5, 86.7$ (a); $1-8 - Q_0 = 17.7, 27.5, 41.2, 56.3, 80.8, 97.2, 121.3, 143.2$ cm^3/c (b)

Следует сразу отметить некоторые различия постановки задачи в описанной выше теоретической модели и лабораторных экспериментах. В модели предполагалось, что на радиусах r_1, r_2 расположены твердые вертикальные стенки, к которым примыкают сосредоточенные источники и стоки. Кроме того, в теоретических расчетах не учитывались геометрические эффекты, связанные с кривизной параболоида. Эти различия следует иметь в виду при сравнении теории с результатами экспериментов.

Как показали измерения, за время порядка одной-двух минут после включения системы источник–сток в параболоиде устанавливается стационарное азимутальное течение. Экспериментальные радиальные профили $u(r)$ в стационарном состоянии при различных значениях Q_0 представлены на фиг. 3. В соответствии с теорией, структура азимутальных течений принципиально меняется при смене полярности в системе источник–сток. Если источник расположен на радиусе r_2 (на периферии), течение близко к потенциальному вращению. Если он находится на радиусе r_1 (вблизи центра), то наблюдается максимум азимутальной скорости вблизи источника. Прямое сравнение экспериментальных профилей с теоретическими распределениями (1.15), (1.16) приведено на фиг. 4. Как видно, экспериментальные значения скорости всегда несколько меньше теоретических. Помимо упомянутых различий условий теории и эксперимента это может быть связано с влиянием вязкости вне придонного слоя [6] и трением быстро вращающейся жидкости о воздух.

Рассмотрим теперь процесс установления стационарного течения. Напомним, что основными параметрами теоретической модели являются число Фруда $F = (L/L_R)^2$, где $L_R = \sqrt{gH}/f$, и число Россби $Ro = Vf/L$, где $V = Q_0/\pi\delta_E$, L – характерный горизонтальный

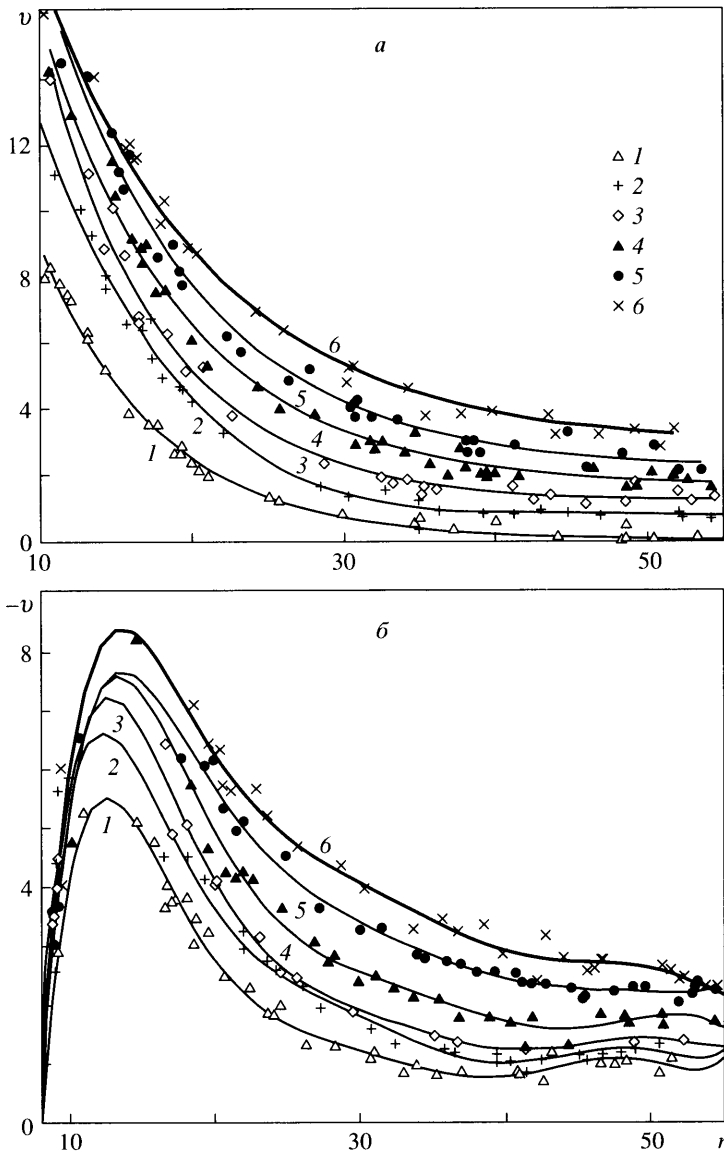


Фиг. 4. Сравнение теоретических стационарных профилей $u(r)$ (1, 2) с экспериментальными данными (3, 4) для значений $Q_0 = 56.3, 41.2 \text{ см}^3/\text{с}$ (а – источник в центре) и $Q_0 = 58.2, 39 \text{ см}^3/\text{с}$ (б – источник на периферии); полная глубина в отсутствие радиальных движений: а, б – $H = 5.8, 6.4 \text{ см}$

масштаб. Примем $L = r_2 - r_1 = 48.9 \text{ см}$. В ходе экспериментов полная глубина в отсутствие движений H и полный расход Q_0 менялись в пределах: $H = 2-15 \text{ см}$, $Q_0 = 8.2-161 \text{ см}^3/\text{с}$. При этом $Ro = 2.8 \cdot 10^{-3}$ для $Q_0 = 8.2 \text{ см}^3/\text{с}$; $Ro = 6 \cdot 10^{-2}$, $Q_0 = 161 \text{ см}^3/\text{с}$. Соответственно число Фруда $F = 68.7$ при $H = 2 \text{ см}$ ($L_R = 5.9 \text{ см}$), $F = 8.6$, $H = 15 \text{ см}$ ($L_R = 16.2 \text{ см}$). Таким образом, для условий экспериментов характерны малые значения числа Россби и умеренные значения числа Фруда. Как показано ранее, при умеренных F существенны эффекты, связанные с деформацией свободной поверхности (эффекты двумерной сжимаемости).

Общее представление о процессе установления стационарного течения, происходящем после мгновенного включения системы источник–сток, дает фиг. 5, где даны радиальные профили скорости $u(r)$ в различные моменты времени. Хотя в экспериментах число Фруда не мало, наблюдается качественное согласие экспериментальных профилей с теоретическими распределениями (2.6), (2.7).

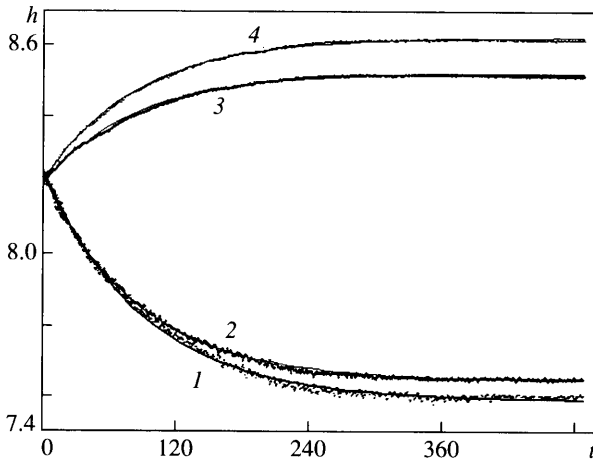
Зависимости полной глубины от времени на разных радиусах ясно свидетельствуют о наличии характерного времени установления стационарного течения T_s (фиг. 6). Это время находилось путем аппроксимации приведенных экспериментальных зависимостей выражениями, содержащими затухающую экспоненту $\exp(-t/T_s)$ (использовался метод наименьших квадратов). Анализ данных измерений показал, что вдали от источников и стоков время T_s не зависит от радиуса и величины Q_0 и практически линейно растет с увеличением средней глубины H . На фиг. 7 сопоставляются экспериментальные зависимости T_s от H и соответствующая теоретическая зависимость (4.6) (прямая), кото-



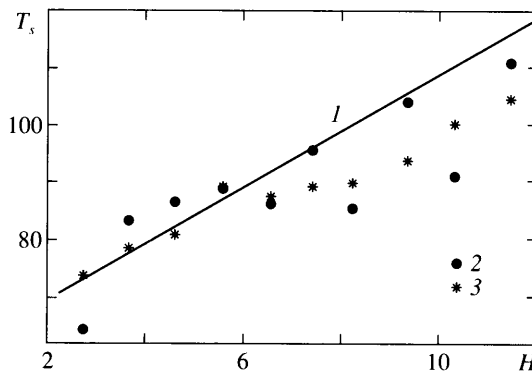
Фиг. 5. Радиальные профили $u(r)$ (см/с), построенные по экспериментальным точкам, для различных моментов времени и источников: a – на периферии, $Q_0 = 56$, $H = 8.2$, b – в центре, $Q_0 = 40$ см³/с, $H = 8.2$ см; 1–6 – $t = 20, 40, 60, 80, 120, 180$ (a), $t = 25, 45, 65, 85, 125, 185$ с (b)

рую для значений параметров параболоида можно записать в виде $T_s = aH + b$, $a = 5.13$, $b = 59.7$. Учитывая указанные различия в постановках теоретической задачи и эксперимента, количественное согласие можно считать удовлетворительным.

Подчеркнем, что время установления T_s практически на два порядка меньше диффузионного времени H^2/ν , которое при $H = 10$ см составляет около 3 ч. Это характерно для всех вращающихся течений, в динамике которых важную роль играют экмановские пограничные слои [7]. В выполненных экспериментах время установления T_s также отли-



Фиг. 6. Зависимости полной глубины h (см) от времени на разных радиусах для $Q_0 = 23 \text{ см}^3/\text{с}$, $H = 8.2 \text{ см}$: 1–4 – $r = 17.2, 20.5, 50.7, 53.4 \text{ см}$, время установления $T_s = 89.8, 85.5, 82.2, 82.4 \text{ с}$



Фиг. 7. Теоретическая зависимость времени установления T_s от глубины H (1) и экспериментальные значения T_s для двух радиусов: 2 – $r = 20.7$, 3 – 17 см при $Q_0 = 25 \text{ см}^3/\text{с}$

чается (больше) от традиционного экмановского времени $H\delta_E/\nu$, что связано с эффектом деформации свободной поверхности.

Заключение. Теоретически и экспериментально исследован процесс установления стационарных азимутальных течений, создаваемых системой источник–сток массы во вращающемся параболоиде. В рамках теории мелкой воды с учетом придонного трения построены асимптотические решения, описывающие этот процесс. Исследована зависимость времени установления от безразмерных параметров задачи – чисел Россби и Фруда. Показано, что при малых значениях числа Фруда, когда можно пренебречь деформацией свободной поверхности, течения устанавливаются на характерном экмановском временном масштабе. Если число Фруда не мало, время установления превышает экмановский масштаб и при малых числах Россби практически линейно зависит от глубины жидкости. Показано удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

Авторы благодарят Л.Х. Ингеля за помощь и полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке МНТЦ (проект G-553).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Незлин М.В., Снежкин Е.Н.* Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990. 238 с.
2. *Hide R.* On source-sink flows in a rotating fluid // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. Pt. 4. P. 737–764.
3. *Манин Д.Ю., Черноушко Ю.Л.* Экспериментальное исследование устойчивости квазидвумерного струйного течения, создаваемого во вращающейся жидкости методом источников и стоков // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 5. С. 483–492.
4. *Должанский Ф.В., Крымов В.А., Манин Д.Ю.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений // *Успехи физ. наук.* 1990. Т. 160. Вып. 7. С. 1–47.
5. *Vennetts D.A., Jackson W.D.N.* Source-sink flows in a rotating annulus: a combined laboratory and numerical study // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 66. Pt 4. P. 689–705.
6. *Данилов С.Д., Сазонов И.А.* Вычисление азимутального потока, создаваемого во вращающемся сосуде методом источников и стоков // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1999. Т. 35. № 3. С. 344–355.
7. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
8. *Калашиник М.В.* Формирование вихревой воронки стоком массы в модели мелкой воды // *Изв. РАН. МЖГ.* 2004. № 2. С. 120–132.

Обнинск,
Тбилиси

Поступила в редакцию
26.IV.2005