

УДК 532.517.2:551.213.3

© 2006 г. А. А. ОСИПЦОВ

ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ЛАВЫ НА НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В приближении тонкого слоя сильновязкой несжимаемой тяжелой жидкости построена гидродинамическая модель трехмерного изотермического течения лавы на неосесимметричной конической поверхности. Аналитическими методами получено автомодельное решение для закона движения переднего фронта течения от неосесимметричного источника, расположенного в вершине конической поверхности с плавно меняющимися свойствами. В случае течения на существенно неосесимметричной поверхности показано существование автомодельного решения для закона движения переднего фронта течения и формы свободной поверхности. Это решение исследовано численно для конкретного примера подстилающей поверхности и источника. В общем случае неавтомодельного течения на существенно неосесимметричной конической поверхности найдено локальное аналитическое решение для формы свободной поверхности и поля скоростей вблизи переднего фронта течения.

Ключевые слова: автомодельность, вязкая жидкость, коническая поверхность, пленочное течение, экстрезивное извержение.

Течение лавы, возникающее при экстрезивном вулканическом извержении, как правило происходит на существенно криволинейной подстилающей поверхности [1], однако при построении гидродинамических моделей лавовых течений в целях упрощения подстилающая поверхность обычно считается плоской [2]. В литературе известны автомодельные решения, полученные в рамках асимптотической модели тонкого слоя, которые описывают изотермическое распространение лавового фронта на горизонтальной [3] либо наклонной [4] плоской поверхности. Влияние криволинейности подстилающей поверхности исследовано в недавней работе [5], где для случая осесимметричного изотермического течения на искривленной поверхности в приближении тонкого слоя найдены стационарные решения для формы свободной границы. В [6] в рамках асимптотической модели [5] получено аналитическое автомодельное решение, описывающее течение от точечного источника, расположенного в вершине конуса с конечным углом наклона образующей к горизонтали при степенном (либо экспоненциальном) законе роста объема движущейся жидкости со временем. Найденный закон движения существенно отличается от соответствующего закона для горизонтальной плоскости [3]. В [6] полученное решение было также обобщено на случай течения от осесимметричного источника на слабо неосесимметричной конической поверхности. В [7] исследованы асимптотические модели неизотермического течения лавы при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры.

В настоящей работе изучается трехмерное течение от неосесимметричного источника, расположенного в вершине произвольной неосесимметричной конической поверхности. Такая постановка задачи обобщает предложенную в [6] модель течения лавы на поверхности круглого конуса. Ниже построены асимптотические модели течения лавы в случаях конической поверхности с плавно меняющимися свойствами в азимутальном направлении и существенно неосесимметричной конической поверхности, а также изу-

чена структура течения в непосредственной окрестности лавового фронта. В отличие от [6] данная модель учитывает перетекание жидкости в азимутальном направлении за счет неосесимметричности подстилающей поверхности и источника.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерное нестационарное изотермическое течение тонкого слоя сильновязкой тяжелой несжимаемой жидкости со свободной границей от неосесимметричного точечного источника в вершине произвольной неосесимметричной конической поверхности. Считаем, что внешняя среда покоится. Введем ортогональную криволинейную систему координат с центром в вершине O . Оси x и y направим по образующей и нормали к поверхности соответственно. Угол φ будем отсчитывать в горизонтальной плоскости против часовой стрелки от некоторого фиксированного направления (соответственно ось координат φ направим вдоль криволинейного пространственного контура $x = \text{const}$, $y = \text{const}$). Компоненты скорости в проекции на оси x , φ , y обозначим u , w , v соответственно. Конкретный вид конической подстилающей поверхности задан функцией $\theta = \theta(\varphi)$, где θ – угол наклона образующей поверхности к горизонтали. Считаем, что величина θ имеет порядок единицы.

Коэффициенты Ламэ для координатных осей x и y равны 1. Так как при выводе уравнений движения будет использовано приближение тонкого слоя, коэффициент Ламэ координаты φ достаточно вычислить для точек, лежащих на конической поверхности (при $y = 0$). Используя сферические координаты как вспомогательные, получаем выражение для коэффициента Ламэ координаты φ :

$$H = x\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}$$

Здесь и далее символом “штрих” обозначается обыкновенная производная по φ . Уравнения Навье – Стокса в безразмерных переменных со стандартными граничными условиями на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h$) поверхностях в проекции на оси криволинейной системы координат принимают вид [8]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon \text{Re} a_x + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{H} L_x + \sin \theta \quad (1.1)$$

$$\varepsilon \text{Re} a_\varphi + \frac{\varepsilon}{H} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \varepsilon L_\varphi + \frac{\theta' \cos \theta}{\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}}, \quad \varepsilon \text{Re} a_y + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{H} L_y - \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\theta^2 + \cos^2 \theta}}$$

$$L_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[H \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{H} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$L_\varphi = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{H} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$L_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[H \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{H} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$y = h, \quad x > 0: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{H} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{P}_n = 0$$

$$y = 0, \quad x > 0: u = w = v = 0$$

$$u^* = Uu, \quad v^* = Uv, \quad w^* = Uw, \quad x^* = Lx, \quad y^* = Ly, \quad h^* = Lh$$

$$t^* = \frac{L}{U} t, \quad p^* = \frac{\rho U^2}{\text{Re}} p, \quad \text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\text{Fr}^2}{\text{Re}} = \frac{\mu U}{\rho g L^2}, \quad \text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

Здесь a_x, a_φ, a_y и L_x, L_φ, L_y – проекции векторов $d\mathbf{V}/dt$ и $\Delta\mathbf{V}$ на оси координат, \mathbf{P}_n – вектор напряжений на свободной поверхности, p – давление, ρ и μ – плотность и вязкость жидкости, L – характерный масштаб длины, U – характерный масштаб продольной компоненты скорости, размерные переменные обозначены звездочкой. При обезразмеривании все характерные масштабы заданы, кроме масштаба скорости U , который будет определен ниже.

Считаем, что размерный общий объем движущейся жидкости растет со временем по степенному закону $2\pi Q t^{*\gamma}$, где Q – размерная константа. Это условие накладывает ограничение лишь на вид зависимости массоподвода от времени. В общем случае источник в вершине конической поверхности может быть несосимметричным. Конкретный размерный вид зависимости массоподвода от угла φ задается выражением $2\pi Q Q_s(\varphi)(t^*)^{\gamma-1}$ для потока массы через площадку с основанием $Hd\varphi$ и высотой h , перпендикулярную к образующей конической поверхности и находящуюся на расстоянии $x \ll 1$ от вершины поверхности. В этом выражении азимутальное распределение интенсивности массоподвода $Q_s(\varphi)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{2\pi} Q_s(\varphi) d\varphi = 1 \quad (1.2)$$

В случае течения на круглом конусе эволюция формы свободной поверхности описывается гиперболическим уравнением [6], решение которого содержит разрыв на переднем фронте течения. Следует ожидать, что при течении на конической поверхности на переднем фронте также может возникнуть разрыв толщины слоя. Закон сохранения массы на передней кромке течения в интегральной форме имеет вид

$$\int_0^h \left(u - \frac{\partial x_r}{\partial t} - \frac{w}{x \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \frac{\partial x_r}{\partial \varphi} \right) dy = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $x_r(t, \varphi)$ – закон движения переднего фронта течения.

Постановка задачи в безразмерных переменных содержит малый параметр ϵ , типичные значения которого для реальных лавовых течений находятся в диапазоне $[10^{-2}, 10^{-6}]$ [7]. Будем искать решение уравнений Навье – Стокса и неразрывности с граничными условиями (1.1) в виде асимптотических рядов по ϵ , удерживая в них лишь главные члены.

2. Автономные решения при малых $\theta'(\varphi)$. Рассмотрим течение на конической поверхности, для которой угол наклона образующей $\theta(\varphi)$ плавно изменяется при изменении φ , т.е. можно считать $\theta'(\varphi) \ll 1$. Это требование выполняется для достаточно широкого класса поверхностей с плавно меняющимися свойствами, для которых область изменения угла θ составляет менее $\pi/3$. В этом случае значения $\theta'(\varphi)$ имеют порядок $1/6$, что можно считать числом, существенно меньшим единицы. Для конических поверхностей, удовлетворяющих требованию $\theta'(\varphi) \ll 1$, ищем решение уравнений (1.1) в виде асимптотических рядов по ϵ , главные члены которых имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \epsilon^{1/2} u_0, & h &= \epsilon^{1/2} h_0, & v &= \epsilon^{1/2} v_0 \\ w &= \epsilon^{1/2} w_0, & \theta' &= \epsilon^{1/2} \theta', & p &= \epsilon^{-1/2} p_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Остальные функции имеют порядок единицы, индекс 0 далее опущен. Положим $\epsilon^{1/2} L^3 = Q(L/U)^\gamma$, тогда U и ϵ выражаются через известные размерные определяющие параметры по формулам [6]

$$U = \left(\frac{\rho g}{\mu} \right)^{1/(2\gamma+1)} Q^{2/(2\gamma+1)} L^{(2\gamma-4)/(2\gamma+1)}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu}{\rho g}\right)^{2\gamma/(2\gamma+1)} Q^{2/(2\gamma+1)} L^{-(2\gamma+6)/(2\gamma+1)}$$

Будем считать $\text{Re} = o(\varepsilon^{-1/2})$. Подставляя разложения (2.1) в уравнения (1.1) и оставляя главные члены, имеем

$$\frac{\partial u x}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\cos \theta, \quad \frac{1}{H} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \vartheta'$$

$$\eta = h, \quad x > 0: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad p = 0 \quad (2.2)$$

$$\eta = 0, \quad x > 0: u = w = v = 0; \quad x = x_r; \quad h = 0$$

Компонента скорости w не входит в уравнение неразрывности и кинематическое граничное условие. Таким образом, задача о нахождении w отделилась, и φ входит в остальные уравнения как параметр. Это позволяет искать решение трехмерной задачи как однопараметрическое семейство решений двумерной задачи о течении на поверхности круглого конуса. Интегрируя динамическое уравнение в проекции на x (2.2) с учетом граничных условий, получаем выражение для компоненты скорости u . Подставляя это выражение в проинтегрированное уравнение неразрывности (2.2), получаем эволюционное уравнение для случая круглого конуса [6], в котором θ зависит от φ как от параметра

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial(xh^3)}{\partial x} \sin \theta(\varphi) = 0 \quad (2.3)$$

Учитывая выражение для скорости u , запишем азимутальное распределение интенсивности массоподвода в виде

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h^3 x \sin 2\theta}{6} \right) = Q_s(\varphi) t^{\gamma-1} \quad (2.4)$$

Течение от осесимметричного источника описывается автомодельным решением для закона движения переднего фронта течения [6], в котором $\theta = \theta(\varphi)$.

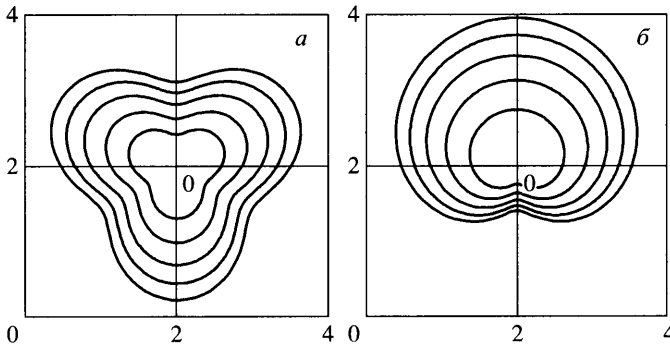
Обобщим автомодельное решение [6] на случай течения от несесимметричного источника с интенсивностью (2.4). Закон движения в явном размерном виде принимает вид

$$x_r^*(t^*, \varphi) = z_r(\gamma) \left[\frac{Q_s^2(\varphi) \sin \theta(\varphi)}{\cos^2 \theta(\varphi)} \right]^{1/5} \left(\frac{\rho g Q^2}{\mu} \right)^{1/5} (t^*)^{(2\gamma+1)/5} \quad (2.5)$$

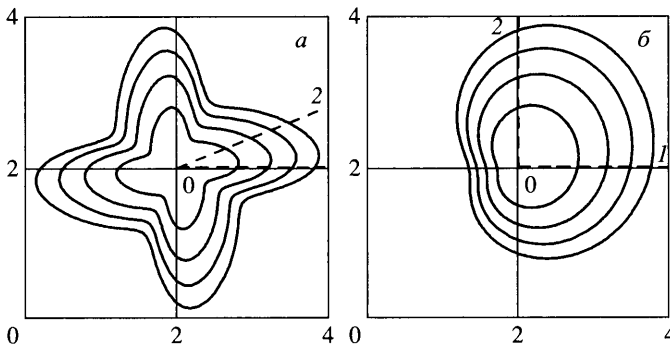
$$z_r(\gamma) = \left(\int_0^1 g(\xi) \xi d\xi \right)^{-2/5}, \quad (5g^2 - 3\xi)^{1-\gamma} g^{2\gamma+1} \xi = (6\gamma)^{1-\gamma} \left(\frac{3(2\gamma+1)}{5} \right)^{\gamma+1/2}$$

Вторая формула дает неявное выражение для формы свободной поверхности в автомодельных переменных $g(\xi)$, которая связана с толщиной слоя h в исходных переменных соотношением

$$h(t, x, \varphi) = t^{(\gamma-2)/2} \sqrt{z_r(\gamma)} \left(\frac{Q_s}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right)^{1/5} g(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_r}$$



Фиг. 1. Зависимость координаты переднего фронта от азимутального угла φ при течении на круглом конусе от неосесимметричного источника постоянной интенсивности. Интервал времени постоянный



Фиг. 2. Зависимость координаты переднего фронта от азимутального угла φ при течении на неосесимметричных конических поверхностях, от неосесимметричного источника постоянной интенсивности. Штриховые линии – направления максимумов угла наклона образующей 1 и интенсивности массоподвода 2. Интервал времени постоянный

В выражение для закона движения переднего фронта (2.5) явно входит зависимость от угла φ , что позволяет оценить наиболее опасные направления распространения лавы в случае, когда вид подстилающей поверхности и азимутальное распределение интенсивности массоподвода являются известными. В целях иллюстрации влияния неосесимметричности подстилающей поверхности и интенсивности источника на фиг. 1, 2 представлены положения переднего фронта в случае круглого конуса с неосесимметричным источником, а также в самом общем случае течения на неосесимметричной поверхности от неосесимметричного источника.

На фиг. 1 представлена безразмерная зависимость координаты границы течения от φ (2.5) через равные промежутки времени в случае течения на круглом конусе при следующем азимутальном распределении интенсивности массоподвода: $Q_s(\varphi) = 2 + \sin 4\varphi$ (а) и $Q_s(\varphi) = 1.1 + \sin\varphi$ (б).

На фиг. 2, а представлены зависимости координаты переднего фронта от азимутального угла через равные интервалы времени при течении на поверхности $\theta(\varphi) = \pi/3 + (\pi/12)\cos(4\varphi)$ от неосесимметричного источника постоянной интенсивности $Q_s(\varphi) = 2 + \sin 4\varphi$. Коническая поверхность имеет четыре ущелья ($\varphi = n\pi/2, n = 0, \dots, 3$), которые при осесимметричном источнике являются направлениями максимальной ско-

рости переднего фронта. Интенсивность источника имеет четыре максимума ($\varphi = \pi/8 + n\pi/2$, $n = 0, \dots, 3$) и четыре минимума. Нелинейное взаимодействие указанных эффектов приводит к формированию направлений наискорейшего распространения течения, отличных от направлений максимумов угла наклона образующей поверхности к горизонтали $\theta(\varphi)$ и интенсивности массоподвода $Q_s(\varphi)$. В рассматриваемом случае направления максимальной скорости переднего фронта лежат ближе к направлениям ущелий, чем к направлениям максимума интенсивности Q_s .

Рассмотрим течение на поверхности $\theta(\varphi) = \pi/4 + (\pi/6)\cos(\varphi)$ от постоянного источника интенсивности $Q_s(\varphi) = 1.1 + \sin\varphi$. Угол наклона поверхности и интенсивность массоподвода имеют по одному несовпадающему максимуму, причем функция $\theta(\varphi)$ медленно изменяется с ростом φ . Формирующееся в данном случае направление максимума скорости переднего фронта лежит ближе к направлению максимума интенсивности массоподвода Q_s (фиг. 2, б).

Найдем условие для $\theta(\varphi)$ и $Q_s(\varphi)$, при котором передний фронт течения движется с одинаковой скоростью по всем направлениям. Приравнявая нулю выражение для $dx/d\varphi$ (2.5), приходим к уравнению

$$\frac{Q_s'}{Q_s} = -\frac{1 + \sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}\theta'$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$Q_s(\varphi) = \frac{\cos\theta(\varphi)}{\sqrt{\sin\theta(\varphi)}}$$

3. Автономные решения при конечных $\theta'(\varphi)$. В случае сильно неосесимметричной конической поверхности с конечным углом наклона образующей к горизонтали главные члены асимптотических разложений искомых функций имеют порядки:

$$y = \varepsilon^{1/2}\eta, \quad h = \varepsilon^{1/2}h_0, \quad v = \varepsilon^{1/2}v_0, \quad p = \varepsilon^{-1/2}p_0 \quad (3.1)$$

Остальные функции имеют порядок единицы, индекс 0 ниже опущен. Считаем $Re = o(\varepsilon^{-1})$. Подставляя разложения (3.1) в уравнения Навье – Стокса и граничные условия (1.1) и оставляя главные члены, получаем

$$\frac{\partial uH}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial vH}{\partial \eta} = 0, \quad H = x\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta} \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin\theta, \quad 0 = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\theta'\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}}, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}}$$

$$\eta = h, \quad x > 0: v = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{H}\frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad p = 0$$

$$\eta = 0, \quad x > 0: u = w = v = 0; \quad x = x_r(t, \varphi): h = 0$$

Интегрирование динамических уравнений и уравнения неразрывности по поперечной координате с учетом граничных условий приводит к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x}\frac{\partial(xh^3)}{\partial x}\sin\theta + \frac{1}{3x\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{h^3\theta'\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta}}\right) = 0 \quad (3.3)$$

Здесь под знаком производной по φ стоит выражение для потока массы в азимутальном направлении, возникающего в силу неосесимметричности подстилающей поверхности. В отличие от уравнения (2.3), описывающего течение на поверхности круглого конуса, данное уравнение является существенно трехмерным.

Интегральный закон сохранения массы в растянутых безразмерных переменных принимает вид

$$\int_0^{2\pi x_r} \int_0 \! \! \int_0 h x \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta} dx d\varphi = 2\pi t^\gamma \quad (3.4)$$

С учетом выражения для u , полученного интегрированием (3.2), азимутальное распределение интенсивности массоподвода записывается в виде

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x h^3 \sin \theta}{3} \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta} \right) = Q_s(\varphi) t^{\gamma-1} \quad (3.5)$$

Уравнение (3.3) имеет автомодельное решение вида

$$h(t, x, \varphi) = t^\alpha f(\xi, \varphi), \quad x = t^\beta \xi, \quad 0 < \xi < \xi_r(\varphi), \quad 2\alpha + 1 = \beta \quad (3.6)$$

В автомодельных переменных закон движения переднего фронта имеет вид $\xi = \xi_r(\varphi)$. После подстановки выражений (3.6) в (3.3) получаем квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \left[\frac{f^2 \theta' \cos \theta}{\xi D (f^2 \sin \theta - \beta \xi)} \right] = -\frac{f}{3\xi} \left(\frac{f^2 A + 3\alpha \xi}{f^2 \sin \theta - \beta \xi} \right) \quad (3.7)$$

$$A(\varphi) = \sin \theta + \frac{\theta'' \cos^3 \theta - \theta'^4 \sin \theta}{D^2}, \quad D(\varphi) = \theta'^2 + \cos^2 \theta$$

Автомодельная замена (3.6) позволила сократить число независимых переменных до двух. Из условия, что закон сохранения массы (3.4) допускает автомодельную замену (3.6), находим $\alpha = (\gamma - 2)/5$ и $\beta = (2\gamma + 1)/5$. Эти формулы совпадают с соответствующими выражениями для течения на круглом конусе. Таким образом, при степенном законе массоподвода зависимость координаты переднего фронта от времени $x_r = \xi_r(\varphi) t^{(2\gamma+1)/5}$ одинакова для всех конических поверхностей. Здесь коэффициент $\xi_r(\varphi)$ определяется конкретным видом подстилающей поверхности $\theta(\varphi)$ и азимутальным распределением интенсивности массоподвода $Q_s(\varphi)$.

Условия (3.5) и (1.3) в автомодельных переменных принимают вид

$$\xi \rightarrow 0: \quad f = \left(\frac{3Q_s}{\xi B \sin \theta} \right)^{1/3}, \quad B = \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta} \quad (3.8)$$

$$\xi = \xi_r(\varphi): \quad \frac{d\xi_r}{d\varphi} = \frac{\xi_r D (f^2 \sin \theta - 3\beta \xi_r)}{f^2 \theta' \cos \theta} \quad (3.9)$$

Уравнение (3.7) с условиями (3.8), (3.9) можно упростить с помощью замены переменных $g(\xi, \varphi) = f^2/\xi$ и привести к виду

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \left[\frac{g \theta' \cos \theta}{\xi D (g \sin \theta - \beta)} \right] = -\frac{g}{3\xi} \left(\frac{gC - 3}{g \sin \theta - \beta} \right) \quad (3.10)$$

$$C(\varphi) = 5 \sin \theta + 2 \frac{\theta'' \cos^3 \theta - \theta'^4 \sin \theta}{D^2} \quad (3.11)$$

$$\xi \rightarrow 0: \quad g = \left(\frac{9Q_s^2}{\xi^5 D \sin^2 \theta} \right)^{1/3}$$

$$\xi = \xi_r(\varphi): \quad \frac{d\xi_r}{d\varphi} = \frac{\xi_r D (g \sin \theta - 3\beta)}{g \theta' \cos \theta} \quad (3.12)$$

Для удобства последующего численного решения уравнений (3.10) с условиями (3.11), (3.12) отобразим область течения с неизвестной границей $\xi_r(\varphi)$ на внутренность единичного круга с помощью замены переменных

$$g(\xi, \varphi) = \psi(\zeta, \varphi), \quad \xi = \xi_r(\varphi)\zeta, \quad 0 < \zeta < 1$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi_r} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \zeta \frac{\xi_r'}{\xi_r} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Аналогичное отображение области течения с неизвестной границей на фиксированную область использовалось, например в [9, 10]. В новых переменных уравнение (3.10) с условиями (3.11), (3.12) принимает вид

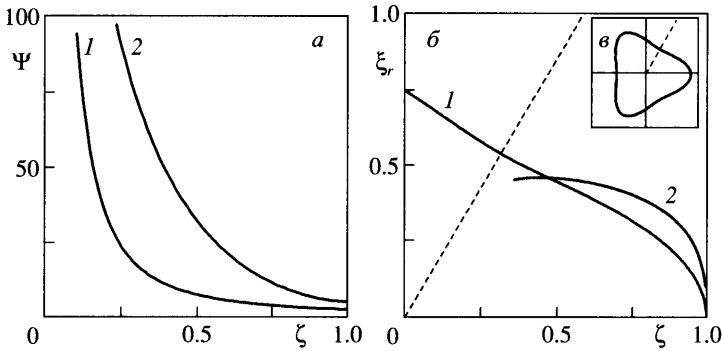
$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = - \frac{\zeta}{\psi} \left[\frac{(\psi \sin \theta - \beta) \xi_r D - \psi \xi_r' \theta' \cos \theta}{\xi_r \theta' \cos \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{D(\psi C - 3)}{3\theta' \cos \theta} \quad (3.13)$$

$$\zeta = \zeta_0 \ll 1: \quad \psi = \frac{1}{\zeta^{5/3}} \left(\frac{9Q_s^2}{\xi_r^5 D \sin^2 \theta} \right)^{1/3} \quad (3.14)$$

$$\zeta = 1: \quad \frac{d\xi_r}{d\varphi} = \frac{\xi_r D (\psi \sin \theta - 3\beta)}{\psi \theta' \cos \theta} \quad (3.15)$$

Полученная система исследовалась численно для получения оценки влияния азимутального перетекания жидкости на закон распространения переднего фронта. Система (3.13)–(3.15) решалась в области $[\varphi_0, \varphi_1] \times [\zeta_0, 1]$. Предполагается, что на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ производная $\theta'(\varphi)$ меняется от малого значения до конечного, а затем опять достигает малого значения. Таким образом, считаем, что на отрезке $[0, \varphi_0]$ $\theta'(\varphi) \ll 1$ и справедливо автомодельное решение (2.5), а на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ $\theta'(\varphi) \sim 1$ и справедлива данная система уравнений. При численных расчетах точка φ_0 (так же, как и φ_1) условно считается границей применимости различных приближений.

Была выбрана прямоугольная сетка с шагами $\Delta\varphi$ и $\Delta\zeta$ по координатам φ и ζ соответственно. Производная $\partial\psi/\partial\varphi$ заменялась разностью вперед с первым порядком, а производная $\partial\psi/\partial\zeta$ центральной разностью со вторым порядком аппроксимации соответственно. В результате для уравнения (3.13) была получена двухслойная неявная схема на четырехточечном шаблоне. В качестве граничного условия слева принималось (3.14), а справа было задано мягкое условие равенства нулю производной $\partial\psi/\partial\zeta$. Уравнение (3.15) решалось методом трапеций. В качестве начального условия $\psi(\varphi_0, \zeta)$ и $\xi_r(\varphi_0)$ было принято автомодельное решение (2.5), полученное в приближении $\theta'(\varphi) \ll 1$. Процедура расчета была организована следующим образом: сначала по известному значению ξ_r на текущем слое по φ методом прогонки определялась ψ на следующем слое, а затем уже на следующем слое методом трапеций находилось ξ_r .



Фиг. 3. Численное решение для трехмерного течения от осесимметричного источника. Форма свободной поверхности (а) вблизи хребта (1) и ущелья (2). Форма переднего фронта течения (б). Аналитическое автомодельное решение (1) и численный расчет (2). Форма переднего фронта в соответствии с автомодельным решением (в).

На фиг. 3 в качестве примера представлены результаты расчетов формы свободной поверхности ψ и переднего фронта ξ_r для течения от осесимметричного источника на существенно неосесимметричной поверхности $\theta(\varphi) = \pi/3 + (\pi/12)\cos(3\varphi)$, которая имеет три “хребта” и три “ущелья”. Для рассматриваемого примера максимальное значение $\theta' \approx 0.8$. Расчеты показали, что в данном случае форма переднего фронта течения, найденная численно из решения полной системы уравнений, отличается незначительно (на величину порядка 10%) от соответствующего аналитического решения (2.5), полученного в пренебрежении перетеканием в азимутальном направлении (фиг. 3, б). Рассмотренный пример позволяет говорить о возможности применения автомодельного решения (2.5) для описания течения лавы даже на существенно неосесимметричной конической поверхности.

4. Стационарные решения. Рассмотрим стационарные решения уравнений для формы свободной поверхности. В случае малых $\theta'(\varphi)$ уравнения (2.2) имеют стационарное решение для толщины слоя $h = Cx^{-1/3}$, где константа C зависит от φ как от параметра. С учетом азимутального распределения интенсивности массоподвода (2.5) получаем аналитическое стационарное решение для формы свободной поверхности в следующий форме:

$$h = \left(\frac{6Q_s(\varphi)}{x \sin 2\theta(\varphi)} \right)^{1/3} \tag{4.1}$$

Сравнивая это решение с решением [5], получаем, что при течении на конической поверхности с плавно меняющимися свойствами толщина слоя зависит от x вдоль каждого направления φ так же, как на круглом конусе с углом наклона образующей $\theta(\varphi)$ и общим размерным расходом из источника $QQ_s(\varphi)$.

В случае стационарного течения при конечных $\theta'(\varphi)$ уравнение (3.3) можно записать в форме

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial \varphi} \left(\frac{\theta' \cos \theta}{xB^2 \sin \theta} \right) = -\frac{h_1}{x} \left[1 + \frac{1}{B \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\theta' \cos \theta}{B} \right)' \right] \tag{4.2}$$

Здесь $h_1 = h^3$, а выражение для $B(\varphi)$ определяется по формуле (3.8). Запишем уравнение (4.2) в характеристической форме

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{h_1}{x} \left[1 + \frac{1}{B \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\theta' \cos \theta}{B} \right)' \right], \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\theta' \cos \theta}{xB^2 \sin \theta} \tag{4.3}$$

Начальные условия для этой системы уравнений следуют из азимутального распределения интенсивности источника (3.5)

$$x = x_0 \ll 1: \quad h_1 = \frac{3Q_s(\varphi_0)}{x_0 B(\varphi_0) \sin \theta(\varphi_0)}, \quad \varphi = \varphi_0 \in [0, 2\pi] \quad (4.4)$$

В уравнениях системы (4.3) разделяются переменные, что позволяет их проинтегрировать аналитически в квадратурах. С учетом начальных условий (4.4) получаем решение вдоль характеристики $x(\varphi)$

$$h = \left[\frac{3Q_s(\varphi_0)}{x_0 B(\varphi_0) \sin \theta(\varphi_0)} \left(\frac{\theta'(\varphi_0) B(\varphi)}{\theta'(\varphi) B(\varphi_0)} \right) \right]^{1/3} \exp \left(- \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin 2\theta(\tau)}{6\theta'(\tau)} d\tau \right) \quad (4.5)$$

$$x(\varphi) = x_0 \frac{\cos \theta(\varphi_0)}{\cos \theta(\varphi)} \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin 2\theta(\tau)}{2\theta'(\tau)} d\tau \right)$$

В общем случае для построения стационарного решения во всей области течения кривую начальных данных $x = x_0$ следует разделить на две (несвязные) области по φ , в которых θ' мала и конечна соответственно. В первой области решение следует строить вдоль характеристик в соответствии с формулой (4.1), а во второй решение находится по формулам (4.5).

5. Структура разрыва на переднем фронте течения. Выше были исследованы автомодельные решения для формы свободной поверхности, каждое из которых содержит разрыв на переднем фронте течения. Закон движения переднего фронта течения может быть получен без раскрытия этой особенности, однако для выяснения более подробной картины течения в окрестности переднего фронта необходимо получить непрерывное решение, удовлетворяющее условию нулевой толщины на переднем крае течения. С этой целью на основе уравнений (3.2), описывающих общий случай неосесимметричного течения, построим двухмасштабное разложение для толщины пленки, позволяющее получить непрерывное решение.

При конечных θ динамическое уравнение в проекции на образующую (см. (3.2)) содержит лишь производную касательного напряжения и проекцию силы тяжести (уравнение для толщины пленки является гиперболическим), тогда как при малых θ динамическое уравнение содержит продольный градиент давления, производную касательного напряжения и силу тяжести [5]. При этом в отличие от случая конечных θ уравнение для толщины пленки является параболическим, что позволяет построить непрерывное решение для толщины слоя.

Асимптотический анализ исходных уравнений (1.1) показывает, что в рассматриваемом случае конечных θ всю область течения можно разбить на три асимптотические области: внешнюю область, где исходные длина и толщина имеют порядки 1 и $\sqrt{\epsilon}$ и справедливы уравнения тонкого слоя (3.2), промежуточную область, где оба масштаба одинаковы и имеют порядок $\sqrt{\epsilon}$ и справедливы полные уравнения Стокса с учетом силы тяжести, и малую окрестность контактной линии, где масштабы длины и толщины равны и имеют порядок ϵ и справедливы полные уравнения Стокса в прямоугольном угле без учета силы тяжести. Считаем, что течение во внешней области в общем случае происходит при произвольном законе массоподвода и не является автомодельным. На основе уравнений (3.2) можно построить двухмасштабное разложение для искомого решения, описывающее форму свободной поверхности как во внешней области, так и в промежуточной (для этого в уравнениях (3.2), записанных на внешнем масштабе, достаточно учесть одно старшее внепорядковое слагаемое с продольным градиентом давле-

ния). Отметим, что внутреннее решение не будет решением полных уравнений Стокса в промежуточной области, а является асимптотикой решения уравнений тонкого слоя с продольным градиентом давления в этой области.

Учитывая в динамическом уравнении (3.2) в проекции на образующую старший вне-порядковый член с продольным градиентом давления, получим

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \sin \theta$$

Остальные уравнения и граничные условия системы (3.2) остаются без изменений. Интегрируя динамические уравнения и уравнение неразрывности с учетом указанного слагаемого, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x h^3 \left(\sin \theta - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3 \theta' \cos \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$x = x_r: \quad h = 0$$

Здесь x_r – координата переднего фронта течения. Данное уравнение является параболическим уравнением с частными производными второго порядка с малым коэффициентом $\sqrt{\varepsilon}$ при старшей производной по продольной координате. Переходя в нем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение (3.3), справедливое во внешней области. Построим внутреннее разложение для толщины слоя в окрестности переднего фронта, где следует учитывать вторую производную по продольной координате. Введем новые переменные

$$t = t_1, \quad x = x_r(t, \varphi) + \sqrt{\varepsilon} \xi, \quad \varphi = \varphi_1, \quad h(t, x) = h_1(t_1, \xi, \varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{u_r}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - \frac{w_r}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

В этих формулах $u_r = \partial x_r / \partial t$ и $w_r = \partial x_r / \partial \varphi$ – проекции скорости переднего фронта на оси x и φ (x_r, u_r и w_r известны из внешнего решения). Подставляя эти выражения в (5.1) и оставляя только главные члены при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[x_r h_1^3 \left(\sin \theta - \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}} \right) - 3x_r u_r h_1 - \frac{h_1^3 w_r \theta' \cos \theta}{\theta'^2 + \cos^2 \theta} \right] = 0 \quad (5.2)$$

$$\xi = 0: \quad h_1 = 0, \quad \xi \rightarrow -\infty: \quad h_1 = h_0$$

Данное уравнение содержит только производные по ξ , и, следовательно, его решение зависит от t и φ как от параметров, поэтому производную по ξ будем понимать как обыкновенную. Последнее условие (5.2) представляет собой условие асимптотического срачивания [11] с решением во внешней области, где $h_0(t, \varphi)$ – толщина слоя на переднем фронте течения, найденная из решения задачи во внешней области. Интегрируя один раз уравнение (5.2), получаем, что выражение под знаком производной по ξ есть некоторая функция времени и угла φ . Из условия срачивания с внешним решением с использованием закона сохранения массы на переднем фронте (1.3) находим, что эта функция тождественно равна нулю. Введем новые переменные

$$\eta = \sqrt{a} \eta_s, \quad h_1 = \sqrt{a} h_s, \quad \xi = \sqrt{ab} \zeta$$

$$a(t, \varphi) = \frac{3u_r x_r (\theta'^2 + \cos^2 \theta)}{x_r \sin \theta (\theta'^2 + \cos^2 \theta) - \theta' w_r \cos \theta}$$

$$b(t, \varphi) = \frac{x_r \cos^2 \theta \sqrt{\theta'^2 + \cos^2 \theta}}{x_r \sin \theta (\theta'^2 + \cos^2 \theta) - \theta' w_r \cos \theta}$$

В этих переменных полученное уравнение для $h_s(\zeta)$ не зависит явно от времени и угла φ :

$$\frac{dh_s}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{h_s^2}, \quad \zeta = 0: h_s = 0 \quad (5.3)$$

Интегрируя это уравнение, получим¹

$$h_s + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - h_s}{1 + h_s} \right) = \zeta \quad (5.4)$$

Асимптотика полученного решения вблизи контактной линии имеет вид

$$\zeta \rightarrow 0: \quad h_s = (3|\zeta|)^{1/3} + O(|\zeta|^{5/3})$$

Решение (5.4) представлено на фиг. 4. Отметим, что найденное решение в общем случае описывает структуру разрыва на переднем фронте произвольного течения, которое не обязательно является автомодельным.

В частности, решение (5.4) описывает форму свободной поверхности в окрестности переднего фронта течения на поверхности круглого конуса. В этом случае из уравнений (2.2) можно получить компоненты скорости в растянутых переменных, не зависящие явно от угла θ

$$\begin{aligned} u &= \left(\eta h - \frac{\eta^2}{2} \right) \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ v &= -\frac{\eta^2}{2x} \left(h - \frac{\eta}{3} \right) \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\eta^2}{2} \left(h - \frac{\eta}{3} \right) \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для построения картины линий тока перепишем выражения для компонент скорости (5.5) в новых переменных

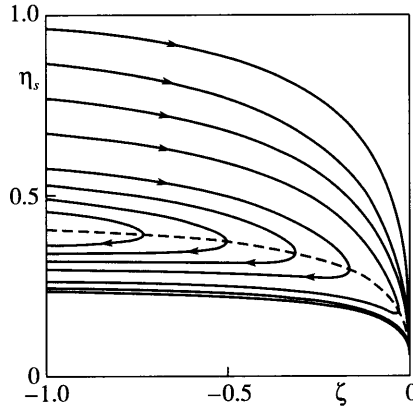
$$(u - u_r)/u_r = u_s(\zeta, \chi), \quad v/3u_r = v_s(\zeta, \chi), \quad \chi = \eta_s/h_s$$

В асимптотическом пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получим выражения

$$u_s = -\frac{3}{2}\chi^2 + 3\chi - 1, \quad v_s = \frac{1 - h_s^2}{6h_s^2} (2\chi - 3)\chi^2 \quad (5.6)$$

При этом оказывается, что при переходе во внутреннюю область асимптотический порядок величины поперечной компоненты скорости изменяется и становится равным

¹ Данный результат был впервые получен автором в работе А.А. Осипцов. Асимптотические модели течений лавы на криволинейной подстилающей поверхности // Дипломная работа, Май 2005, Мех.-мат. факультет МГУ. С. 1–112.



Фиг. 4. Локальное аналитическое решение для формы свободной поверхности и линий тока вблизи переднего фронта течения. Стрелками показано направление течения. На штриховой линии продольная компонента скорости равна нулю

единице. Таким образом, продольная и поперечная компоненты скорости имеют одинаковый порядок в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности переднего фронта. Линии тока являются решением обыкновенного дифференциального уравнения $d\chi/d\zeta = v_s/u_s$, которое с учетом полученных выражений (5.6) принимает вид

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = \frac{1 - h_s^2 \chi^2 (2\chi - 3)}{3h_s^2 3\chi(2 - \chi) - 2} \quad (5.7)$$

Разделяя переменные и выражая h_s через $dh_s/d\zeta$ с использованием уравнения (5.3), получаем аналитическое решение в виде

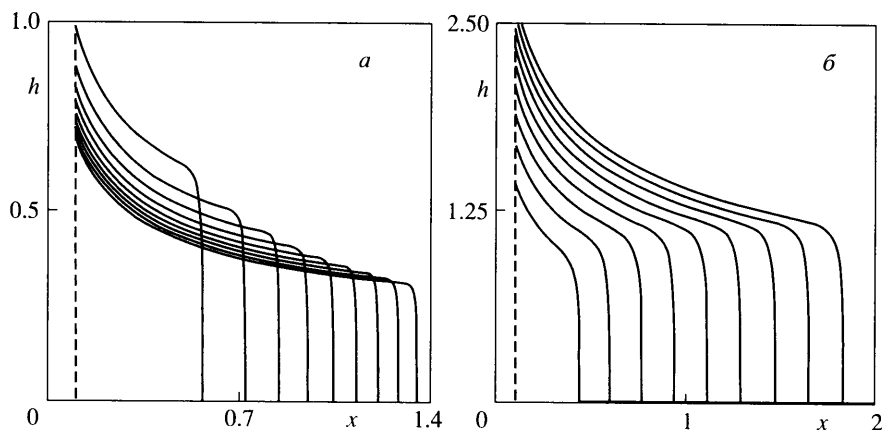
$$h_s + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{3 - 2\chi}{2\chi^{28}}\right) + \frac{2}{\chi} = \text{const} \quad (5.8)$$

На фиг. 4 представлены линии тока в переменных ζ , η_s описываемые аналитическим решением (5.8). Пунктиром обозначена разделяющая линия $h_d(\zeta)$, на которой продольная компонента скорости меняет знак. Выше этой линии $u_s > 0$, а ниже ее $u_s < 0$. При этом во всей области $v_s < 0$, за исключением нижней границы, где $v_s = 0$. Уравнение (5.8) позволяет найти явное выражение для разделяющей кривой из условия, что на этой линии знаменатель выражения для $d\chi/d\zeta$ обращается в ноль. Получаем

$$h_d = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h_s$$

Решение (5.4) описывает структуру разрыва на переднем фронте также и в частном случае течения на наклонной плоскости. Для такого течения в [4] была указана асимптотика автомодельного решения для формы свободной поверхности в окрестности переднего фронта, совпадающая с (5.4). При этом в [4] поле скоростей и картина линий тока в окрестности переднего фронта изучены не были².

² Уже в период подготовки статьи к печати автору стала известна работа M. Dragoni, I. Borsari, A. Talarico. A model for the shape of lava flow fronts // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. B09203, в которой было получено аналитическое решение для поля скоростей и формы свободной поверхности в окрестности фронта стационарного двумерного течения на наклонной плоскости. Полученное в настоящей работе решение (5.4) более общее, так как оно описывает произвольное нестационарное трехмерное течение на существенно неосесимметричной конической поверхности.



Фиг. 5. Форма свободной поверхности при течении на поверхности конуса, полученная численно с учетом продольного градиента давления. Интервал времени постоянный, $\gamma = 0.5$ (а) и 2 (б)

Уравнение (5.1) решалось конечно-разностным методом на прямоугольной сетке с использованием двухслойной неявной схемы на шеститочечном шаблоне. В качестве левого краевого условия было принято (2.5) (записанное в осесимметричном случае), справа было задано условие равенства нулю производной по продольной координате. Схема имеет первый порядок аппроксимации. В начальный момент времени был задан тонкий слой конечной толщины (предвестник) во всей расчетной области, за исключением окрестности левого края, где толщина быстро меняется до значения (2.5). Результаты расчетов представлены на фиг. 5. Аналитическое решение (5.4) описывает форму свободной поверхности, представленную на фиг. 5, в малой окрестности переднего фронта, где слагаемое с продольным градиентом давления в динамическом уравнении имеет порядок единицы.

Закключение. В случае трехмерного изотермического течения от неосесимметричного источника, расположенного в вершине неосесимметричной конической поверхности с плавно меняющимися в азимутальном направлении свойствами, для формы свободной поверхности получено двумерное гиперболическое уравнение первого порядка, содержащее азимутальный угол как параметр. При постоянном массопроводе для формы свободной поверхности найдено аналитическое стационарное решение. При степенной зависимости общего объема движущейся жидкости от времени получено аналитическое автомодельное решение для закона движения переднего фронта течения.

В случае течения на существенно неосесимметричной конической поверхности получено трехмерное гиперболическое уравнение для формы свободной поверхности, которое учитывает перетекание жидкости в азимутальном направлении. Стационарное решение данного уравнения найдено аналитически в квадратурах. При степенной зависимости общего объема движущейся жидкости от времени найдено автомодельное решение. Показано, что закон движения переднего фронта со временем одинаков для всех конических поверхностей. На основании численных расчетов показано, что аналитическое автомодельное решение для конической поверхности с плавно меняющимися свойствами может быть использовано и для приближенного описания течений на существенно неосесимметричных конических поверхностях, для которых производная угла наклона образующей по азимутальному углу достигает конечных значений.

В рамках уравнений тонкого слоя с учетом старшего внепорядкового члена с продольным градиентом давления найдено аналитическое решение для формы свободной

поверхности и картины линий тока вблизи переднего фронта течения. Построенное решение описывает структуру течения в окрестности переднего фронта в общем случае произвольного неавтономного течения на существенно неосесимметричной конической поверхности.

Автор выражает благодарность А.А. Бармину и О.Э. Мельнику за обсуждение, а также А.Г. Куликовскому за ряд полезных замечаний. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00228) и Президентского гранта для ведущих научных школ (проект НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Мельник О.Э. Гидродинамика вулканических извержений // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 1. С. 32–60.
2. Griffiths R.W. The dynamics of lava flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 477–518.
3. Huppert H.E. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58.
4. Lister J.R. Viscous flow down an inclined plane from point and line sources // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 631–653.
5. Осипцов А.А. Стационарное пленочное течение сильновязкой тяжелой жидкости с массоподводом // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 24–31.
6. Осипцов А.А. Автомодельное решение задачи о росте лавового купола на произвольной конической поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 53–68.
7. Осипцов А.А. Неизотермические течения лавы на конической подстилающей поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 62–75.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
9. Lister J.R., Dellar P.J. Solidification of pressure-driven flow in a finite rigid channel with application to volcanic eruptions // J. Fluid Mech. 1996. V. 323. P. 267–283.
10. Balmforth N.J., Craster R.V., Sassi R. Dynamics of cooling viscoplastic domes // J. Fluid Mech. 2004. V. 499. P. 149–182.
11. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.XI.2005